泛函分析习题集

V. K. Krishnan 著
步尚全 方宣 译

清华大学出版社

CHAPTER 1

第 1 章

赋范线性空间

本章研究赋范线性空间的一些基本性质. 在 1.1 节中介绍线性空间和范数. 线性映射是线性空间之间的同态. 在 1.2 节中考虑线性映射的连续性. 由于有限维赋范线性空间有很多类似于欧氏空间的性质,所以在 1.3 节中研究有限维赋范线性空间. Hahn-Banach 延拓定理是泛函分析的基本定理之一,因而关于它的一些问题放在 1.4 节来研究.

1.1 线性空间及范数

线性空间是由一个加法阿贝尔群 X,一个**数域** K 和一个**数乘**运算组成的. 这个数乘运算对每个 $k\in K$ 和 $x\in X$ 按如下的方式确定了一个向量 kx: 对所有 $k,k'\in K$ 和 $x,y\in X$,有

$$k(x+y)=kx+ky,$$
$$(k+k')x=kx+k'x,$$
$$k(k'x)=(kk')x,$$
$$1x=x.$$

线性空间也称为向量空间.

在本书中,数域 K(以后用$\mathbb{K}$ 来表示)是实数域$\mathbb{R}$ 或复数域$\mathbb{C}$. 当我们在一个问题中涉及两个或更多的线性空间时,就设它们有相同的数域,或是$\mathbb{R}$,或是$\mathbb{C}$.

设 X 是复数域$\mathbb{C}$ 上的线性空间. 把(k,x)映到 kx 的数乘运算是对所有 $k\in\mathbb{C}$ 和 $x\in X$ 都有定义的. 当然对所有 $k\in\mathbb{R}$,数乘也有

定义. 所以 X 也是$\mathbb{R}$ 上的线性空间. 这个$\mathbb{R}$ 上的线性空间称为**相应的实线性空间**. 相应的实线性空间$(X,\mathbb{R})$的阿贝尔群 X 和原来的复线性空间$(X,\mathbb{C})$的阿贝尔群是一样的.

称线性空间 X 的子集 Y 为**子空间**,如果对 $k\in\mathbb{K}$,$y_1,y_2\in Y$,有

$$ky_1+y_2\in Y.$$

若 S 是 X 的子集,包含 S 的 X 的最小子空间称为由 S 生成的子空间.

我们称向量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是**线性无关的**,如果下式:

$$k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n=0,\quad k_i\in\mathbb{K}$$

只有当每个 k_i 都是 0 时才成立. 集合 $S\subset X$ 称为是线性无关的,如果 S 的每个有限子集都是线性无关的. 称线性无关集合 S 是一个**基**,若 S 生成的空间是 X. 每个线性空间都有基. 任一个基元素的个数都是相同的,这个数称为空间的**维数**.

称线性空间 X 的子集 E 为**凸**的,如果当 $x,y\in E$,恒有

$$tx+(1-t)y\in E,\quad \text{其中}\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

零维空间 $X=\{0\}$和一维空间 $X=\mathbb{K}$ 是线性空间的两个例子. 设 T 是非空集合. 函数 $x:T\to\mathbb{K}$ 的集合是线性空间,如果加法和数乘是逐点按如下规则定义的:

$$(x+y)(t)=x(t)+y(t),$$

$$(kx)(t)=kx(t),$$

其中 $t\in T,k\in\mathbb{K}$.

序列是定义在自然数集$\mathbb{N}$ 上的函数. n 元数组是定义在集合$\{1,2,\cdots,n\}$上的函数. 所以 $\mathbb{K}$ 上的序列空间和$\mathbb{K}^n$ 可以看作是分别定义在 $T=\mathbb{N}$ 和 $T=\{1,2,\cdots,n\}$上的$\mathbb{K}$ 值函数所组成的空间. 当然,它们都是线性空间. 这些空间中的第 i 个单位向量 e_i 是这样定义的:

$$e_i(j)=\begin{cases}0, & j\neq i,\\ 1, & j=i,\end{cases}$$

即 $e_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$,其中第 i 个位置是 1,其余位置都是 0.

线性空间上的**范数**是一个函数,它使得 X 中的每个 x 都对应一个非负实数 $\|x\|$. 它有如下的性质:

$$\|x\|=0\quad \text{当且仅当}\quad x=0,$$

$$\|kx\|=|k|\,\|x\|,\quad \text{其中}\quad k\in\mathbb{K},\quad x\in X,$$

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|,\quad \text{其中}\quad x,y\in X\text{(三角不等式)}.$$

赋予了范数的线性空间称为**赋范线性空间或赋范空间**.

赋范空间是距离空间,且它的距离是

$$d(x,y)=\|x-y\|,\quad x,y\in X.$$

所以称序列$\{x_n\}$收敛到 x,如果当 $n\to\infty$时有 $\|x_n-x\|\to 0$.

当处理多个赋范空间时,为了方便,我们用同一个符号 $\|\cdot\|$ 来表示这些空间的范数. 如果 X 是复赋范空间,则相应的实线性空间$(X,\mathbb{R})$上的范数就是原来 X 上的范数.

若 Y 是赋范线性空间的子空间,则它的闭包 $\bar{Y}$ 也是子空间.

赋范空间最简单的例子是一维空间 $X=\mathbb{K}$，其中 $\|x\|=|x|$.

空间 $C(T)$，$C_0(T)$，$C_c(T)$

设 T 是距离空间. 用 $C(T)$来表示 T 上所有有界连续的$\mathbb{K}$ 值函数. 它是关于逐点定义的加法和数乘运算的线性空间.

$$\|x\|_\infty=\sup\{|x(t)|:t\in T\},x\in C(T)$$

定义了 $C(T)$上的范数，它被称为上确界范数. $C_0(T)$是所有 $x\in C(T)$有如下特性元素的集合：对每个 $\epsilon>0$，都有一个依赖于 x 和 ϵ 的 T 的紧子集 S，使得

$$|x(t)|<\epsilon,\text{对所有 } t\notin S.$$

所有 $x\in C(T)$有以下特性元素的集合用 $C_c(T)$来表示：存在依赖于 x 的 T 的紧子集 S，使得对所有 $t\notin S$，$x(t)=0$.

空间 $C_0(T)$和 $C_c(T)$都是 $C(T)$的子空间.

设 T 是赋有离散距离的自然数集，则 $C(T)$是$\mathbb{K}$ 中所有有界序列$\{x(n)\}$的集合. 这个空间用 l^∞ 来表示，它的范数是

$$\|x\|_\infty=\sup_{n\geqslant 1}|x(n)|,\quad x\in l^\infty.$$

子空间 $C_0(T)$就是

$$c_0=\{x\in l^\infty:\lim_{n\to\infty}x(n)=0\};$$

$C_c(T)$是

$$c_{00}=\{x\in l^\infty:\quad \text{除了有限多个 } n \text{ 都有 } x(n)=0\}.$$

所有收敛数列的集合用 c 来表示.

空间 $L^p(T)$，l^p，其中 $1\leqslant p\leqslant\infty$

设 T 是测度为 μ 的测度空间. 若 $1\leqslant p<\infty$，所有具有性质 $\int|x|^p\mathrm{d}x<\infty$ 的可测函数的集合用 $L^p(T)$或 $L^p(\mu)$来表示，$L^p(T)$中几乎处处相等的函数均视为一个函数. 它是线性空间，而且

$$\|x\|_p=\left(\int|x|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}},\quad x\in L^p(T)$$

定义了 $L^p(T)$上的范数. 对 $1<p<\infty$，利用 Hölder 不等式：

$$\int|xy|\,\mathrm{d}\mu\leqslant\left(\int|x|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int|y|^q\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}},$$

其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，来证明三角不等式. $p=q=2$ 情形的 Hölder 不等式称为 Schwarz 不等式.

所有**本质有界**可测函数的集合用 $L^\infty(T)$或 $L^\infty(\mu)$来表示. 它也是线性空间，而且

$$\|x\|_\infty=\mathrm{ess}\cdot\sup\{|x(t)|:t\in T\},\quad x\in L^\infty(T)$$

定义了 $L^\infty(T)$的范数. 空间 $L^p(T)$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，称为 **Lebesgue 空间**.

设 T 是赋予了计数测度的自然数集. 若 $1\leqslant p<\infty$，则 $L^p(T)$变为了所有 p-阶可和数列

$\{x(n)\}$的集合 l^p，它的范数是

$$\| x \|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} | x(n) |^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

空间 $L^\infty(T)$变为了前面给出的序列空间 l^∞.

若 $T=\{1,2,\cdots,n\}$且赋予了计数测度，则 $L^p(T)$就是$\mathbb{K}^n$ 且赋予了范数 $\| \cdot \|_p$：

$$\| x \|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} | x(j) |^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 < p < \infty,$$

$$\| x \|_\infty = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} | x(j) |, \quad p = \infty.$$

空间 $C^n[a,b]$,$C^\infty[a,b]$

设$[a,b]$是$\mathbb{R}$ 的子区间. $C^n[a,b]$是$[a,b]$上所有如下纯量函数 x 的集合，它们的 n 阶导数 $x^{(n)}$存在且属于 $C[a,b]$. 令 $C^\infty[a,b]=\bigcap_{n \geqslant 1} C^n[a,b]$.

赋范空间的乘积 若 X 和 Y 是赋范空间，则 $X \times Y$ 是线性空间，它的加法和数乘依坐标来定义，且

$$\| (x,y) \| = \| x \| + \| y \|, \quad x \in X, y \in Y$$

定义了它上面的范数.

商空间 设 Y 是赋范空间 X 的闭子空间. 商空间 X/Y 由陪集

$$x+Y = \{x+y : y \in Y\}, \quad x \in X$$

组成. 它是线性空间，加法和数乘按

$$(x_1+Y)+(x_2+Y) = (x_1+x_2)+Y, \quad x_1, x_2 \in X,$$

$$k(x+Y) = kx+Y, \quad k \in \mathbb{K}, x \in X$$

的方式来定义. 它的范数称为**商范数**，是这样定义的：

$$\| x+Y \| = \inf\{ \| x+y \| : y \in Y \}.$$

范数 $\| x+Y \|$ 就是 x 到子空间 Y 的距离.

练习

1. 设 $x=(1,2) \in \mathbb{R}^2$，当 $p=1,2,4,\infty$时，求 $\| x \|_p$.
2. 设 $X=L^p[0,1]$,$x(t)=t^2$；若 $1 \leqslant p \leqslant \infty$，求 $\| x \|_p$. 并证明 $\lim\limits_{p \to \infty} \| x \|_p = \| x \|_\infty$.
3. 设 $X=L^p(0,\infty)$,$x(t)=\mathrm{e}^{-t}$；若 $1 \leqslant p \leqslant \infty$，求 $\| x \|_p$. 并证明 $\lim\limits_{p \to \infty} \| x \|_p = \| x \|_\infty$.
4. 设 $X=Y=\mathbb{R}$ 都赋予范数 $\| \cdot \|_p$,$1 \leqslant p < \infty$. 求乘积空间 $X \times Y$ 元素(x,y)的范数.
5. 设 $X=\mathbb{R}^2$,$Y=\mathbb{R}$ 都赋予范数 $\| \cdot \|_p$,$1 \leqslant p \leqslant \infty$，求乘积空间 $X \times Y$ 元素(x,y)的范数，并求出当 $p \to \infty$时，这个范数的极限.
6. 设 $X=\mathbb{R}^2$，且赋予了范数 $\| \cdot \|_2$；Y 是 X 的子空间，它由有如下性质的元素 x 组成：

$x=(x(1),x(2))$，且 $x(2)=2x(1)$. 求 X/Y 中的元素 $x+Y$ 的范数.

问题

问题 1.1.1 设 X 是赋范线性空间，$a\in X$，k 是非零数. 证明映射

$$x\to x+a \quad 和 \quad x\to kx$$

是 X 到自身的同胚.

解答 对 $a\in X$ 和 $0\neq k\in\mathbb{K}$，设

$$T_a(x)=x+a,\quad M_k(x)=kx,\quad x\in X.$$

则

$$\|T_a(x)-T_a(y)\|=\|(x+a)-(y+a)\|=\|x-y\|,$$
$$\|M_k(x)-M_k(y)\|=\|kx-ky\|=|k|\,\|x-y\|.$$

这就证明了 T_a 和 M_k 是一致连续的. 还有，

$$T_{-a}T_a(x)=T_{-a}(x+a)=(x+a)-a=x,$$

$$M_{1/k}M_k(x)=M_{1/k}(kx)=\frac{1}{k}(kx)=x.$$

这说明了 T_a 和 M_k 都有逆，且

$$T_a^{-1}=T_{-a},\quad M_k^{-1}=M_{1/k}.$$

这两个逆可类似定义，且它们都是一致连续的. 命题得证. ■

问题 1.1.2 线性空间极大的真子空间被称为**超平面**. 如果 Y 是赋范线性空间 X 的超平面，证明如下结论是等价的：

(a) Y 是闭的.

(b) Y 在 X 中不是**稠密的**.

(c) Y 在 X 中是**无处稠密的**.

解答 称 X 的子集 E 在 X 中是稠密的，如果 $\overline{E}=X$；称 E 在 X 中是无处稠密的，如果 $\overline{E}$ 没有内点.

若 $\overline{Y}$ 没有内点，则 $\overline{Y}$ 不会等于 X，即 Y 不是稠密的. 所以有(c)⇒(b).

因为 $Y\subset\overline{Y}\subset X$ 且 $\overline{Y}$ 是子空间，Y 的极大性说明 $\overline{Y}=Y$ 或者 $\overline{Y}=X$. 所以若 $\overline{Y}\neq X$，则 $\overline{Y}=Y$. 所以有(b)⇒(a). 设 a 是 $\overline{Y}$ 的内点. 则存在 $r>0$ 使得

$$U(a,r)=\{x\in X:\|x-a\|<r\}\subset\overline{Y}.$$

设 x 是 X 的任一个元素. 若 $x\neq 0$，设

$$y=a+\frac{r}{2\|x\|}x.$$

则 $\|y-a\|=\frac{r}{2\|x\|}\|x\|<r$，所以 $y\in U(a,r)\subset\overline{Y}$. 因为 $\overline{Y}$ 是子空间，我们有

$$x = 2\frac{\|x\|}{r}(y-a) \in \bar{Y}.$$

若 $x=0$，上述结论也成立. 所以 $\bar{Y}=X$. 又因 $Y\neq X$，则 $\bar{Y}\neq Y$. 这就说明若 $\bar{Y}=Y$，则 $\bar{Y}$ 就没有内点. 故(a)⇒(c). 这就完成了证明. ■

问题 1.1.3 证明赋范空间 X 同胚于开球

$$U(0,r) = \{x \in X: \|x\| < r\}, \quad r > 0.$$

解答 取 $x,y\in X$ 且 $\|y\|<r$，令

$$\phi(x) = \frac{rx}{1+\|x\|}, \quad \psi(y) = \frac{y}{r-\|y\|}.$$

若 $y=\phi(x)$，则

$$\|y\| = \frac{r\|x\|}{1+\|x\|} < r, \quad r-\|y\| = \frac{r}{1+\|x\|}.$$

所以 $\psi(\phi(x))=\psi(y)=x$. 若 $x=\psi(y)$，$\|y\|<r$，则 $\|x\| = \dfrac{\|y\|}{r-\|y\|}$，所以 $\phi(\psi(y))=\phi(x)=y$，这就证明了 $\phi: X\to U(0,r)$ 是双射且 $\psi=\phi^{-1}$. 若 $x_n\to x$，则 $\|x_n\|\to\|x\|$，且

$$\phi(x_n) = \frac{rx_n}{1+\|x_n\|} \to \frac{rx}{1+\|x\|} = \phi(x).$$

所以 ϕ 是连续的. 同理，若 $y_n\to y, y_n, y\in U(0,r)$，则

$$\phi^{-1}(y_n) = \frac{y_n}{r-\|y_n\|} \to \frac{y}{r-\|y\|} = \phi^{-1}(y).$$

所以 ϕ^{-1} 也是连续的. 故 ϕ 是一个同胚. ■

问题 1.1.4 设 E_1 和 E_2 是赋范空间 X 的子集，

$$E_1 + E_2 = \{x+y: x \in E_1, y \in E_2\}.$$

证明以下结论：

(a) 若 E_1 或者 E_2 是开的，则 E_1+E_2 是开的.

(b) 若 E_1 和 E_2 都是紧的，则 E_1+E_2 是紧的.

(c) 若 E_1 是紧的，E_2 是闭的，则 E_1+E_2 是闭的.

(d) 即使 E_1 和 E_2 都是闭的，E_1+E_2 也不一定是闭的.

解答 (a) 若 $c\in E_1+E_2$，则 $c=a+b, a\in E_1, b\in E_2$. 假设 E_1 是开的，则存在 $r>0$ 使得

$$U(a,r) = \{x \in X: \|x-a\| < r\} \subset E_1.$$

令 $\|z-c\|<r$. 若 $x=z-b$，则 $x-a=z-c$，$\|x-a\|<r$，所以 $x\in E_1$，$z=x+b\in E_1+E_2$. 只要 $\|z-c\|<r$，上述结论就成立，所以 E_1+E_2 是开的.

(b) 我们要利用事实：距离空间的子集 E 是紧的当且仅当 E 中的每个序列在 E 中都有收敛的子列. 设 $\{z_n\}$ 是 E_1+E_2 中的序列. 则 $z_n=x_n+y_n, x_n\in E_1, y_n\in E_2$. 因 E_1 是紧的，则 $\{x_n\}$ 有子列 $\{x_{n_i}\}$ 收敛到 E_1 中的点 x. 而 $\{y_{ni}: i=1,2,\cdots\}$ 是紧集 E_2 中的序列，其中我们把 n_i 写成了 ni. 所以它有子列 $\{y_{nj}: j=1,2,\cdots\}$ 收敛到 E_2 中的点 y. 当然，当 $j\to\infty$ 时

$x_{nj}\to x$. 于是，当 $j\to\infty$ 时有

$$z_{nj}=x_{nj}+y_{nj}\to x+y.$$

所以我们找到了 $\{z_n\}$ 的子列 $\{z_{nj}\}$ 收敛到 $x+y\in E_1+E_2$. 这就证明了 E_1+E_2 是紧的.

(c) 设 $z\in\overline{E_1+E_2}$. 则存在序列 $\{z_n\}$ 使得 $z_n\to z$，$z_n=x_n+y_n$，$x_n\in E_1$，$y_n\in E_2$. 因为 E_1 是紧的，故 $\{x_n\}$ 有子列 $\{x_{n_i}\}$ 收敛到 E_1 中的点 x. 所以当 $i\to\infty$ 时，有

$$y_{n_i}=z_{n_i}-x_{n_i}\to z-x.$$

于是 $z-x\in\bar{E}_2=E_2$ 且 $z=x+(z-x)\in E_1+E_2$. 这就证明了 E_1+E_2 是闭的.

(d) 设 $X=\mathbb{K}$. 考虑集合

$$E_1=\left\{n+\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\},\quad E_2=\{-n:n\in\mathbb{N}\}.$$

这两个集合都没有极限点，所以它们是闭的. 因为对所有 $p,n\geqslant 1$

$$p+\frac{1}{n+p}=\left(n+p+\frac{1}{n+p}\right)+(-n)\in E_1+E_2,$$

所以 p 是 E_1+E_2 的极限点. 若 $p\in E_1+E_2$，则

$$p=\left(n+\frac{1}{n}\right)+(-m),$$

即 $n(m+p-n)=1$. 只有当 $n=1$，$m=2-p$ 时，上述式子才成立. 若 $p\geqslant 2$，则 $p\notin E_1+E_2$，所以 E_1+E_2 不是闭的. ■

问题 1.1.5 设 E_1 和 E_2 是赋范空间 X 的子集，若 E_1 是紧的，E_2 是闭的且 $E_1\cap E_2=\varnothing$，证明存在 $r>0$ 使得

$$(E_1+U(0,r))\cap E_2=\varnothing,$$

其中 $U(0,r)=\{x\in X:\|x\|<r\}$.

解答 设

$$g(x)=d(x,E_2)=\inf\{\|x-y\|:y\in E_2\},\quad x\in X.$$

则 g 是 X 上的实值连续函数. 因 E_1 是紧的，则存在 $x_1\in E_1$ 使得

$$g(x_1)\leqslant g(x),\quad x\in E_1. \tag{1}$$

因为 $x_1\notin E_2$ 且 E_2 是闭的，所以有 $d(x_1,E_2)>0$，即 $g(x_1)>0$. 设 $0<r<g(x_1)$. 假设 $x\in(E_1+U(0,r))\cap E_2$，则 $x\in E_2$ 且 $x=y+z$，$y\in E_1$，$z\in U(0,r)$. 所以

$$g(y)=d(y,E_2)\leqslant d(y,x)=\|x-y\|=\|z\|<r<g(x_1).$$

但因 $y\in E_1$，由式(1)有 $g(x_1)\leqslant g(y)$. 这就产生了矛盾. 所以 $(E_1+U(0,r))\cap E_2=\varnothing$. ■

问题 1.1.6 设 $0<p<1$，

$$\|x\|_p=\left(\sum_{j=1}^{n}|x(j)|^p\right)^{\frac{1}{p}},\quad x\in\mathbb{K}^n.$$

证明：若 $n\geqslant 2$，则 $\|\cdot\|_p$ 不是 $\mathbb{K}^n$ 上的范数.

解答 若 $n\geqslant 2$，三角不等式不满足. 例如：设

$$x=(1,0,0,\cdots,0),\quad y=(0,1,0,\cdots,0),$$

则 $x+y=(1,1,0,\cdots,0)$,

$$\|x\|_p=(1^p)^{\frac{1}{p}}=1=\|y\|_p,\quad \|x+y\|_p=(1^p+1^p)^{\frac{1}{p}}=2^{\frac{1}{p}}.$$

因为 $\frac{1}{p}>1$,所以

$$\|x\|_p+\|y\|_p=2<2^{\frac{1}{p}}=\|x+y\|_p.$$

命题得证. ■

问题 1.1.7 设 X 是由变元为 t 的常系数一元多项式组成的线性空间. 对 $p\in X$,

$$p(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n,$$

定义

$$\|p\|=\sup\{|p(t)|:0\leqslant t\leqslant 1\},\quad \|p\|_1=|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_n|.$$

证明 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_1$ 都是 X 上的范数,且对每个 $p\in X$ 有 $\|p\|\leqslant\|p\|_1$. 再证明不存在常数 α,使得对所有的 $p\in X$ 有 $\|p\|_1\leqslant\alpha\|p\|$.

解答 很清楚 $\|\cdot\|$ 是 $C[0,1]$ 上的上确界范数且 X 是 $C[0,1]$ 的子空间. X 的任一个元素都是由它的系数组成的有限序列 $\{a_j\}$ 来确定的. $\|p\|_1$ 正好是这个序列的 l^1 范数. 所以 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_1$ 都是 X 上的范数.

若 $p(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n$,则对 $0\leqslant t\leqslant 1$,有

$$|p(t)|\leqslant|a_0|+|a_1|t+\cdots+|a_n|t^n\leqslant|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_n|=\|p\|_1.$$

为了证明问题中所说的 α 的不存在,设

$$p(t)=1-t+t^2-\cdots-t^{2n-1}.$$

对 $0\leqslant t\leqslant 1$,我们有

$$p(t)=(1-t)+t^2(1-t)+\cdots+t^{2n-2}(1-t)\geqslant 0,$$

$$p(t)=1-t(1-t)-\cdots-t^{2n-3}(1-t)-t^{2n-1}\leqslant 1.$$

因为 $p(0)=1$,所以有

$$\|p\|=\sup\{|p(t)|:0\leqslant t\leqslant 1\}=1,$$

又因为 $\|p\|_1=1+1+\cdots+1=2n$,所以若 $\|p\|_1>\alpha\|p\|$,则必有 $2n>\alpha$. 所以对任意 α,都能找到多项式 $p(t)$ 使得 $\|p\|_1>\alpha\|p\|$. ■

问题 1.1.8 设 $BV[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上所有有界变差函数的集合. 对 $x\in BV[a,b]$,令

$$\|x\|=|x(a)|+V(x),$$

其中 $V(x)$ 是 x 的全变差. 证明 $\|\cdot\|$ 是 $BV[a,b]$ 上的范数.

解答 对 $[a,b]$ 的一切可能的划分 $P=(t_0,t_1,\cdots,t_n)$,作和

$$S(x,P)=\sum_{i=1}^{n}|x(t_i)-x(t_{i-1})|.$$

这个和的上确界定义为全变差 $V(x)$.

显然,$V(x)\geqslant 0$. 所以对所有 $x\in BV[a,b]$ 有 $\|x\|\geqslant 0$. 若对所有 $t\in[a,b]$ 有 $x(t)=0$,

则对一切划分 P, $S(x,P)=0$; 所以 $\|x\|=0$.

设 $\|x\|=0$, 则 $x(a)=0$ 且 $V(x)=0$. 所以对所有 P, $S(x,P)=0$. 设 $a<t<b$, 若 $P=(a,t,b)$, 则

$$S(x,P)=|x(t)-x(a)|+|x(b)-x(t)|.$$

所以 $|x(t)-x(a)|=|x(b)-x(t)|=0$. 因为 $x(a)=0$, 所以有 $x(t)=0$. 故 $x=0$.

设 $x\in BV[a,b]$ 且 $k\in\mathbb{K}$. 若 $P=(t_0,t_1,\cdots,t_n)$ 是 $[a,b]$ 的任一个划分, 则

$$S(kx,P)=\sum_{i=1}^{n}|kx(t_i)-kx(t_{i-1})|=|k|S(x,P)\leqslant|k|V(x).$$

这就说明 $kx\in BV[a,b]$ 且 $V(kx)\leqslant|k|V(x)$. 所以

$$\|kx\|\leqslant|kx(a)|+|k|V(x)=|k|\,\|x\|.$$

若 $k\neq0$, 把 k 换为 $\frac{1}{k}$, 把 x 换为 kx, 就得到

$$\|x\|=\left\|\frac{1}{k}\cdot kx\right\|\leqslant\frac{1}{|k|}\|kx\|\leqslant\frac{1}{|k|}\cdot|k|\,\|x\|=\|x\|.$$

所以 $\|kx\|=|k|\,\|x\|$. 当 $k=0$ 时, 显然等式也成立.

最后, 设 $x,y\in BV[a,b]$ 且 $z=x+y$. 设 $P=(t_0,t_1,\cdots,t_n)$ 是 $[a,b]$ 的任一个划分. 因为

$$\begin{aligned}|z(t_i)-z(t_{i-1})|&=|x(t_i)+y(t_i)-x(t_{i-1})-y(t_{i-1})|\\&\leqslant|x(t_i)-x(t_{i-1})|+|y(t_i)-y(t_{i-1})|,\end{aligned}$$

所以逐个相加就得到:

$$S(z,P)\leqslant S(x,P)+S(y,P)\leqslant V(x)+V(y).$$

这就得到 $z\in BV[a,b]$ 且 $V(z)\leqslant V(x)+V(y)$. 因为

$$|z(a)|\leqslant|x(a)|+|y(a)|,$$

所以有 $\|z\|\leqslant\|x\|+\|y\|$, 这就是三角不等式. ■

问题 1.1.9 称线性空间 X 的非空子集 E 是**平衡的**, 若对于 $x\in E$, $k\in\mathbb{K}$ 且 $|k|\leqslant1$, 总有 $kx\in E$. 称 E 是**吸收的**, 若对任意 $x\in X$, 都存在 $r>0$, 使得 $r^{-1}x\in E$. 设 E 是凸平衡吸收的; 而且没有 X 的非零子空间含在 E 中. 取 $x\in X$, 令

$$\|x\|=\inf\{r>0:r^{-1}x\in E\}.$$

证明 $\|\cdot\|$ 是 X 上的范数, 且

$$\{x\in X:\|x\|<1\}\subset E\subset\{x\in X:\|x\|\leqslant1\}.$$

再证明任意赋范空间 X 上的范数都是由某个 E 按上述方式生成的.

解答 由于 $\|x\|=\inf S_x$, 其中

$$S_x=\{r>0:(1/r)x\in E\},\tag{2}$$

则 $S_x\subset(0,+\infty)$, 且对所有 x 有 $\|x\|\geqslant0$. 若 $x\in E$, 因 E 是平衡的, 则 $(-1)x\in E$. 又因 E 是凸的, 则 $0=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(-x)\in E$. 所以对所有 $r>0$, 有

$$\left(\frac{1}{r}\right)0 \in E,$$

$$S_0 = (0, +\infty), \quad \|0\| = \inf S_0 = 0.$$

设 $x \neq 0$，则 $Y = \{kx : k \in \mathbb{K}\}$ 是 X 的非零子空间，且 Y 不包含在 E 中. 所以存在 $k_1 \in \mathbb{K}$ 使得 $k_1 x \notin E$. 显然 $k_1 \neq 0$. 假设 $0 < r < \frac{1}{|k_1|}$ 且 $r \in S_x$，则 $(1/r)x \in E$. 因为 $|k_1 r| < 1$，所以

$$k_1 x = (k_1 r)\left(\frac{1}{r}x\right) \in E.$$

矛盾. 于是就有

$$r \in S_x \Rightarrow r \geqslant \frac{1}{|k_1|},$$

所以 $\|x\| \geqslant \frac{1}{|k_1|} > 0$. 这就证明了 $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

设 $k \neq 0$ 且 $r \in S_{kx}$，则

$$\frac{1}{r} \cdot kx \in E, \quad \frac{|k|}{r}x = \left(\frac{|k|}{k}\right) \cdot \left(\frac{kx}{r}\right) \in E.$$

所以 $\frac{r}{|k|} \in S_x$ 且 $\|x\| \leqslant \frac{r}{|k|}$，即 $|k|\,\|x\| \leqslant r$. 这对所有 $r \in S_{kx}$ 都成立，因此有 $|k|\,\|x\| \leqslant \|kx\|$. 把 k 换成 $\frac{1}{k}$，把 x 换成 kx，则有

$$\left|\frac{1}{k}\right| \|kx\| \leqslant \left\|\frac{1}{k} \cdot kx\right\| = \|x\|, \quad \|kx\| \leqslant |k|\,\|x\|,$$

所以 $\|kx\| = |k|\,\|x\|$. 当 $k = 0$ 时，显然等式也成立.

为了证明三角不等式. 取 $x, y \in X$. 任取 $\varepsilon > 0$，能找到 S_x 中的 r 和 S_y 中的 s 使得

$$r < \|x\| + \varepsilon, \quad s < \|y\| + \varepsilon.$$

因为 E 是凸的，则有

$$\frac{1}{r}x \in E, \quad \frac{1}{s}y \in E, \quad \frac{1}{r+s}(x+y) = \frac{r}{r+s}\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{s}{r+s}\left(\frac{y}{s}\right) \in E,$$

所以

$$r + s \in S_{x+y}, \quad \|x+y\| \leqslant r + s < \|x\| + \|y\| + 2\varepsilon.$$

因为 ε 是任意的，这就证明了三角不等式 $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

所以 $\|\cdot\|$ 是 X 上的范数. 设 $\|x\| < 1$，则存在 $r \in S_x$ 且 $\|x\| < r < 1$. 因为 $0 < r < 1$，所以

$$\frac{1}{r}x \in E, \quad x = r\left(\frac{x}{r}\right) \in E.$$

于是有

$$\{x \in X : \|x\| < 1\} \subset E.$$

若 $x \in E$，则 $x/1 \in E$，即 $1 \in S_x$. 因此有 $\|x\| \leqslant 1$. 所以

$$E \subset \{x \in X: \| x \| \leqslant 1\}.$$

为了证明第二部分，设 X 是赋范空间，

$$E = \{x \in X: \| x \| < 1\},$$

则 E 是凸平衡吸收的. 设 $x \in X$，且 S_x 由式(2)来定义. 若 $r \in S_x$，则 $r^{-1}x \in E$，且 $r^{-1} \| x \| < 1$. 所以对任意 $r \in S_x$ 有 $\| x \| < r$. 这就说明

$$\| x \| \leqslant \inf S_x. \tag{3}$$

若 $\| x \| < \inf S_x$，则存在 r 使得 $\| x \| < r < \inf S_x$. 所以 $r^{-1} \| x \| < 1$，于是有 $r^{-1}x \in E$，即 $r \in S_x$. 因为 $r < \inf S_x$，所以这是不可能的. 这就说明式(3)中只有等号是成立的. 这就完成了证明. ■

问题 1.1.10 设 Y 是赋范空间 X 的闭子空间. 证明 $x_n + Y \to x + Y$ 当且仅当存在 Y 中的序列 $\{y_n\}$ 使得 $x_n + y_n \to x \in X$.

解答 注意到 $\| x_n - x + Y \|$ 是下述集合的最大下界：

$$S_n = \{ \| x_n - x + y \| : y \in Y \}.$$

于是对于 $n = 1, 2, \cdots$，存在 Y 中的 y_n 使得

$$\| x_n - x + y_n \| < \| x_n - x + Y \| + \frac{1}{n}.$$

所以当 $n \to \infty$ 时，有

$$\| x_n - x + y_n \| < \| x_n - x + Y \| + \frac{1}{n} = \| (x_n + Y) - (x + Y) \| + \frac{1}{n} \to 0,$$

即 $x_n + y_n \to x \in X$.

反过来，假设在 Y 中存在这样的序列 $\{y_n\}$，则当 $n \to \infty$ 时有

$$\| (x_n + Y) - (x + Y) \| = \| x_n - x + Y \| \leqslant \| x_n - x + y_n \| \to 0,$$

所以 $x_n + Y \to x + Y \in X/Y$. 这就完成了证明. ■

问题 1.1.11 设 Y 是赋范空间 X 的闭子空间. $F: X \to X/Y$ 是**商映射**，定义如下：$F(x) = x + Y$. 证明 F 是连续的且映 X 中的开集为 X/Y 中的开集.

解答 因为

$$F(x_1) - F(x_2) = (x_1 + Y) - (x_2 + Y) = x_1 - x_2 + Y,$$

所以有

$$\| F(x_1) - F(x_2) \| = \inf\{ \| x_1 - x_2 + y \| : y \in Y \} \leqslant \| x_1 - x_2 \|.$$

这就证明了 F 是一致连续的.

设 V 是 X 的开集. 考虑 $F(V)$ 中的元素 $F(x_1)$，$x_1 \in V$. 因为 V 是开的，所以存在 $r > 0$ 使得

$$\| x - x_1 \| < r \Rightarrow x \in V. \tag{4}$$

若

$$\| x + Y - F(x_1) \| < r, \tag{5}$$

则

$$\| x - x_1 + Y \| = \| (x+Y) - (x_1 + Y) \| < r.$$

由商范数的定义知，对某个 $y_1 \in Y$ 有 $\| x - x_1 + y_1 \| < r$. 所以由式(4)得 $x + y_1 \in V$. 故 $F(x+y_1) \in F(V)$. 但是

$$F(x + y_1) = x + y_1 + Y = x + Y.$$

所以只要式(5)成立，就有 $x+Y \in F(V)$. 这就证明了 $F(V)$ 包含了 X/Y 中以 $F(x_1)$ 为中心以 r 为半径的开球. 所以 $F(V)$ 是开的. 这就完成了证明. ■

问题 1.1.12 证明：

(a) l^p 是可分的，其中 $1 \leqslant p < \infty$；

(b) l^∞ 是不可分的.

解答 (a) 设 M 是 $\mathbb{K}$ 的可数稠密子集. 若 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$，我们可以取 M 为有理数集；若 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$，我们可以取 M 是所有形如 $\alpha + \mathrm{i}\beta$(α, β 是有理数)的复数集合. 对 $n = 1, 2, \cdots$，设 E_n 是 l^p 中下列 y 的集合：

$$y(j) \in M, \quad j \geqslant 1; \quad y(j) = 0, \quad j > n.$$

则 E_n 是可数的，这是因为它和 M^n 是一一对应的. 设 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$，则 E 是可数的. 我们将证明 E 在 l^p 中是稠密的.

设 $x \in l^p$，给定的 $\varepsilon > 0$，则存在 n 使得

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} | x(j) |^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

固定 n，对每一个 j，$1 \leqslant j \leqslant n$，在 M 中选择 $y(j)$ 使得

$$| x(j) - y(j) | < (2n)^{-1/p} \varepsilon,$$

且对 $j > n$，$y(j) = 0$. 则 $y \in E_n \subset E$，且

$$\begin{aligned} \| x - y \|_p{}^p &= \sum_{j=1}^{n} | x(j) - y(j) |^p + \sum_{j=n+1}^{\infty} | x(j) |^p \\ &< n \cdot (2n)^{-1/p} \cdot \varepsilon^p + 2^{-1} \varepsilon^p = \varepsilon^p. \end{aligned}$$

所以 $\| x - y \|_p < \varepsilon$，这就证明了 $x \in \overline{E}$. 所以 $\overline{E} = l^p$.

(b) 假设 $E \subset l^\infty$ 且 $\overline{E} = l^\infty$. 0 和 1 之间的每个实数 t 都可以表示为

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) 2^{-n}, \tag{6}$$

其中对所有 n，$x(n) = 0$ 或 1，

所以对每个(0,1)中的 t，我们能找到满足式(6)的 $h(t) = x$，其中 $x \in l^\infty$；且能找到 E 中的 $g(x)$ 使得

$$\| g(x) - x \|_\infty < 1/4.$$

设 $f(t)=g(h(t)),0<t<1$. 若 $f(t_1)=f(t_2),h(t_1)=x_1$ 和 $h(t_2)=x_2$. 则 $g(x_1)-g(x_2)=0$. 所以

$$\| x_1-x_2 \| \leqslant \| x_1-g(x_1) \|_\infty + \| g(x_1)-g(x_2) \|_\infty + \| g(x_2)-x_2 \|_\infty < 1/2,$$

$$| x_1(n)-x_2(n) | \leqslant \| x_1-x_2 \|_\infty < 1/2.$$

但是对所有 n 有 $x_1(n)-x_2(n)=0,\pm 1$. 所以对所有 n 必须有 $x_1(n)-x_2(n)=0$; 故

$$t_1 = \sum_{n=1}^{\infty} x_1(n)2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_2(n)2^{-n} = t_2.$$

这就证明了 $f:(0,1)\to E$ 是单射. 因为 $(0,1)$ 是不可数的, 所以 E 一定不可数. 因而 l^∞ 不可能有可数的稠密子集. 这就完成了证明. ■

问题 1.1.13 证明: 若赋范空间 X 是可分的, Y 是 X 的闭子空间, 则商空间 X/Y 是可分的.

解答 设 E 是 X 的可数稠密子集,

$$F = \{y+Y : y \in E\},$$

则 F 是可数的. 设 $x+Y$ 是 X/Y 中任一个元素. 给定 $\varepsilon>0$, 则存在 E 中的 y 使得 $\| y-x \|<\varepsilon$. 所以由商范数的定义可知

$$\| (x+Y)-(y+Y) \| = \| x-y+Y \| \leqslant \| x-y \| < \varepsilon.$$

这就说明 $\overline{F}=X/Y$. 所以 X/Y 是可分的. ■

问题 1.1.14 若 $x\in L^p(T),x\in L^q(T),p<q$, 证明 $x\in L^r(T)$, 其中 $p<r<q$.

解答 众所周知 e^t 是关于 t 的凸函数. 所以

$$e^{\lambda u+(1-\lambda)v} \leqslant \lambda e^u + (1-\lambda)e^v, \quad 0<\lambda<1.$$

若 $t\in T,0<|x(t)|<\infty$, 选择 u、v 和 λ 使得

$$e^u = | x(t) |^p, \quad e^v = | x(t) |^q, \quad r = \lambda p + (1-\lambda)q.$$

则有

$$| x(t) |^r = | x(t) |^{p\lambda} | x(t) |^{(1-\lambda)q} = e^{\lambda u} e^{(1-\lambda)v}$$

$$\leqslant \lambda e^u + (1-\lambda)e^v = \lambda | x(t) |^p + (1-\lambda) | x(t) |^q,$$

两边积分得到

$$\int | x |^r d\mu \leqslant \lambda \int | x |^p d\mu + (1-\lambda) \int | x |^q d\mu < \infty.$$

这就证明了 $x\in L^r(T)$. ■

问题 1.1.15 证明: 若 $x\in l^r,r\geqslant 1$, 则对所有 $p>r,x\in l^p$. 再证明对 l^r 或 $\mathbb{K}^n$ 中的任意 x, 有

$$\lim_{p\to\infty} \| x \|_p = \| x \|_\infty.$$

解答 若 $x\in l^r$, 则 $\sum | x(n) |^r$ 收敛, 所以对所有 $n\geqslant n_0$ 有 $|x(n)|<1$. 进而若 $p>r$, 则

$$| x(n) |^p \leqslant | x(n) |^r, \quad n \geqslant n_0.$$

所以 $\sum | x(n) |^p < \infty$. 这就证明了第一部分.

若 $x=0$，则第二部分是平凡的. 所以设 $x\in l^r$，$x\neq 0$，则有

$$\left(\frac{\|x\|_p}{\|x\|_\infty}\right)^p=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|x(n)|}{\|x\|_\infty}\right)^p\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|x(n)|}{\|x\|_\infty}\right)^r=\left(\frac{\|x\|_r}{\|x\|_\infty}\right)^r,$$

$$\|x\|_p\leqslant\left(\frac{\|x\|_r}{\|x\|_\infty}\right)^{r/p}\|x\|_\infty.$$

又因为

$$(\|x\|_p)^p=\sum_{n=1}^{\infty}|x(n)|^p\geqslant|x(j)|^p,$$

所以对 $j\geqslant 1$ 有 $|x(j)|\leqslant\|x\|_p$，进而有 $\|x\|_\infty\leqslant\|x\|_p$. 所以

$$\|x\|_\infty\leqslant\|x\|_p\leqslant\left(\frac{\|x\|_r}{\|x\|_\infty}\right)^{r/p}\|x\|_\infty.$$

令 $p\to\infty$ 就得到了所需的结论. 对 $x\in\mathbb{K}^n$，可以类似地给出证明. ■

问题 1.1.16 证明：$c_{00}\subset l^p$，$1\leqslant p\leqslant\infty$. $c_0\subset l^p$ 是不是也对？

解答 设 $x\in c_{00}$，则对足够大的 n 都有 $x(n)=0$；所以 $\sum|x(n)|^p<\infty$. 所以若 $1\leqslant p<\infty$，则 $x\in l^p$. 因为 $\{x(n)\}$ 是有界的，从而也有 $x\in l^\infty$.

设 $x(n)=n^{-1/p}$，则当 $n\to\infty$ 时有 $x(n)\to 0$. 所以 $x\in c_0$. 但是

$$\sum|x(n)|^p=\sum\frac{1}{n}=\infty,$$

所以 $x\notin l^p$. 另一方面，因为收敛序列都是有界的，所以若 $x\in c_0$，则 $x\in l^\infty$. 所以当 $1\leqslant p<\infty$ 时，$c_0\subset l^p$ 不成立；当 $p=\infty$ 时，$c_0\subset l^p$ 成立. ■

1.2 线性映射的连续性

设 X 和 Y 是同一数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范空间. 称映射 $F:X\to Y$ 是线性的，如果

$$F(kx+y)=kF(x)+F(y),\quad k\in\mathbb{K},\quad x,y\in X.$$

称线性映射 $f:X\to\mathbb{K}$ 为**线性泛函**.

称映射 $F:X\to Y$ 是**有界**的，如果

$$\|F\|=\sup\{\|F(x)\|:x\in X,\|x\|\leqslant 1\}<\infty. \tag{1}$$

设 $F:X\to Y$ 是线性的. 为了方便，我们把 $F(x)$ 写为 Fx. F 的零空间或核空间是

$$Z(F)=\{x\in X:F(x)=0\}.$$

$Z(F)$ 是 X 的子空间，它的值域

$$R(F)=\{y\in Y:y=F(x),x\in X\}$$

是 Y 的子空间. 线性映射 F 是单射当且仅当

$$F(x)=0\Rightarrow x=0,\quad \text{即}\quad Z(F)=\{0\}.$$

若 $F:X\to Y$ 是线性双射，则它的逆 $F^{-1}:Y\to X$ 也是线性的.

若 $F:X\to Y$ 是线性的，则下列陈述是等价的：

(a) F 在 0 点是连续的.

(b) F 在 X 上连续.

(c) F 是有界的.

线性映射 $F:X\to Y$ 是有界的当且仅当存在常数 $\alpha>0$ 使得

$$\|F(x)\|\leqslant\alpha\|x\|,\quad x\in X.$$

称 $F:X\to Y$ 是**下有界的**，如果存在常数 $\beta>0$ 使得对所有 $x\in X$ 有

$$\beta\|x\|\leqslant\|F(x)\|.$$

我们用 $BL(X,Y)$ 来表示有界线性映射 $F:X\to Y$ 的集合. 若 $Y=X$，用 $BL(X)$ 来代替 $BL(X,X)$. 若加法和数乘都是逐点定义的，则 $BL(X,Y)$ 是线性空间，且式(1)定义了 $BL(X,Y)$ 上的范数. 很显然 $\|F\|$ 是具有下述性质

$$\|F(x)\|\leqslant\alpha\|x\|,\quad x\in X$$

的所有实数 $\alpha>0$ 的下确界，且

$$\|F(x)\|\leqslant\|F\|\,\|x\|,\quad x\in X,$$

$$\|F\|=\sup\{\|F(x)\|:x\in X,\|x\|=1\},\quad X\neq\{0\}.$$

X 上所有连续线性泛函的集合 $BL(X,\mathbb{K})$ 用 X' 来表示，称 X' 为 X 的**对偶空间**.

线性映射也称为线性算子或线性变换. 设 (k_{ij}) 是元素为纯量的 $m\times n$ 矩阵，且

$$y(i)=\sum_{j=1}^{n}k_{ij}x(j),\quad 1\leqslant i\leqslant m.$$

这就定义了从 $\mathbb{K}^n$ 到 $\mathbb{K}^m$ 的线性映射. 任何线性映射 $F:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^m$ 都可以用这种形式的矩阵给出. 若 (k_{ij}) 是无穷矩阵，则 k_{ij} 满足某种条件时，关系

$$y(i)=\sum_{j=1}^{\infty}k_{ij}x(j),\quad i=1,2,\cdots$$

定义了一个线性变换 $x\mapsto y$.

由

$$y(s)=\int_a^b k(s,t)x(t)\mathrm{d}t$$

给出的变换 $x\mapsto y$ 是线性的，它被称为**核为 $k(s,t)$ 的积分变换**.

练习

1. 设 X 和 Y 是赋范空间，$F:X\to Y$ 是线性的. 证明 $Z(F)$ 和 $R(F)$ 分别是 X 和 Y 的子空间.

2. 设 X 和 Y 是赋范空间，$F:X\to Y$ 是线性的，证明 F 是单射当且仅当 $Z(F)=\{0\}$.

3. 设 X 和 Y 是赋范空间，$F:X\to Y$ 是线性的，证明下列叙述是等价的：(a) F 是连续

的；(b)F 在 0 点是连续的；(c)F 是有界的.

4. 设 X 和 Y 是赋范空间，F：$X\to Y$ 是线性的，证明对所有 $x\in X$，

$$\|F(x)\| \leqslant \|F\|\,\|x\|.$$

5. 设 F：$X\to Y$ 是双射和线性的，证明它的逆 F^{-1}：$Y\to X$ 是线性的.

6. 设 $X=\mathbb{R}^2$，它的范数是 $\|\cdot\|_1$，$A\in BL(X)$ 是用 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ 给出的. 证明 $\|A\|=6$.

问题

问题 1.2.1 设 f 是线性空间 X 上的线性泛函，且对某个 x_0，$f(x_0)\neq 0$. 证明对于 X 中的任意 x 都有唯一的表示 $x=kx_0+y$，$k\in\mathbb{K}$，$y\in Z(f)$，$Z(f)$ 为 f 的零空间.

解答 若 $x\in X$. 设 $k=f(x)/f(x_0)$，$y=x-kx_0$. 则 $x=kx_0+y$，且

$$f(y)=f(x)-kf(x_0)=0;$$

所以 $y\in Z(f)$. 因为 $k\in\mathbb{K}$，所以这就证明了表示的存在性. 为了证明唯一性，设

$$x=k_1x_0+y_1=k_2x_0+y_2,\quad y_1,y_2\in Z(f).$$

则

$$(k_1-k_2)x_0=y_2-y_1\in Z(f).$$

因为 $x_0\notin Z(f)$，所以必有 $k_1-k_2=0$，即 $k_1=k_2$ 且 $y_1=y_2$. 这就证明了唯一性并完成了证明. ■

问题 1.2.2 设 f_1 和 f_2 是线性空间 X 上的两个线性泛函. 证明若它们有相同的零空间，则存在非零常数 k 使得对所有 $x\in X$ 有 $f_2(x)=kf_1(x)$.

解答 若对所有 $x\in X$，有 $f_1(x)=0$，因 $Z(f_2)=Z(f_1)=X$，则对所有 $x\in X$，$f_2(x)=0$，这种情形可以取任意 $k\neq 0$. 所以假设对某个 x_0，$f_1(x_0)\neq 0$，则 $f_2(x_0)\neq 0$. 设

$$k=\frac{f_2(x_0)}{f_1(x_0)},$$

则 $k\neq 0$. 若 $x\in X$，设 $\alpha=\dfrac{f_1(x)}{f_1(x_0)}$. 则

$$f_1(x)=\alpha f_1(x_0)=f_1(\alpha x_0),$$

$$f_1(x-\alpha x_0)=0,$$

$$x-\alpha x_0\in Z(f_1)=Z(f_2).$$

所以 $f_2(x-\alpha x_0)=0$. 则

$$f_2(x)=\alpha f_2(x_0)=\alpha k f_1(x_0)=kf_1(x).$$

这就证明了结论. ■

问题 1.2.3 设 X 和 Y 是赋范空间，$X\neq\{0\}$，F：$X\to Y$ 是有界线性映射. 证明存在 X 中的序列 $\{x_n\}$，使得对所有 n 都有 $\|x_n\|=1$，且当 $n\to\infty$ 时有 $\|F(x_n)\|\to\|F\|$.

解答 由定义知 $\| F \|$ 是集合

$$S = \{ \| F(x) \| : x \in X, \| x \| \leqslant 1 \}$$

的上确界.

若 $\| F \| = 0$,则 S 仅包含 0. 设 $\{x_n\}$ 是 X 中的任一个序列且 $\| x_n \| = 1$. 则对所有 n 有 $\| F(x_n) \| = 0$. 所以 $\| F(x_n) \| \to 0 = \| F \|$.

下面假设 $\| F \| \neq 0$,则对所有 $n \geqslant 1$, $\| F \| - \frac{1}{n} \| F \| < \| F \|$. 所以存在 $\alpha_n \in S$ 使得

$$\| F \| - \frac{1}{n} \| F \| < \alpha_n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

我们有 $\alpha_n = \| F(z_n) \|$,其中 $z_n \in X$, $\| z_n \| \leqslant 1$. 因为 $\alpha_n > \| F \| - \frac{1}{n} \| F \| \geqslant 0$, $\alpha_n \neq 0$,所以对所有 n, $z_n \neq 0$. 设 $x_n = z_n / \| z_n \|$. 则对所有 $n \geqslant 1$, $\| x_n \| = 1$,所以 $\| F(x_n) \| \in S$,且 $\| F(x_n) \| \leqslant \| F \|$. 另外

$$\| F(x_n) \| = \frac{1}{\| z_n \|} \| F(z_n) \| = \frac{\alpha_n}{\| z_n \|} \geqslant \alpha_n,$$

所以,对所有 n

$$\| F \| - \frac{1}{n} \| F \| < \alpha_n \leqslant \| F(x_n) \| \leqslant \| F \|.$$

这就说明当 $n \to \infty$ 时, $\| F(x_n) \| \to \| F \|$. ■

问题 1.2.4 设 X 是赋范空间, f 是 X 上的非零有界线性泛函. 证明

$$E = \{ x \in X : f(x) = \| f \| \}$$

是 X 的非空闭凸子集且

$$\inf\{ \| x \| : x \in E \} = 1.$$

解答 由于对某个 $x_0 \in X$, $f(x_0) \neq 0$,设 $k = \| f \| / f(x_0)$,则

$$f(kx_0) = kf(x_0) = \| f \|.$$

所以 $kx_0 \in E$,这说明 E 是非空的.

设 $x \in \bar{E}$,则存在 E 中的序列 $\{x_n\}$ 使得 $x_n \to x$. 于是 $f(x_n) = \| f \|$,由 f 的连续性有 $f(x_n) \to f(x)$. 所以 $f(x) = \| f \|$,即 $x \in E$. 所以 E 是闭的.

若 $x, y \in E$, $0 \leqslant t \leqslant 1$,则

$$f(tx + (1-t)y) = tf(x) + (1-t)f(y) = t \| f \| + (1-t) \| f \| = \| f \|.$$

所以 $tx + (1-t)y \in E$,这就证明了 E 是凸的.

若 $x \in E$,则 $\| f \| = f(x) \leqslant \| f \| \| x \|$. 因为 $\| f \| > 0$,所以对所有 $x \in E$ 有 $1 \leqslant \| x \|$. 由问题 1.2.3 知,存在 X 中的序列 $\{x_n\}$ 使得 $\| x_n \| = 1$ 且 $|f(x_n)| \to \| f \|$. 设

$$k_n = \frac{\| f \|}{f(x_n)},$$

则 $|k_n| \to 1$ 且 $\| f \| = k_n f(x_n) = f(k_n x_n)$. 所以 $k_n x_n \in E$ 且 $\| k_n x_n \| = |k_n| \to 1$. 这就证明了

$\inf\{\|x\|:x\in E\}=1$. ■

问题 1.2.5 对 $x\in c_{00}$，设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x(n)$，$f$ 是线性的吗?连续的吗?

解答 若 $x\in c_{00}$，则和式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x(n)$ 仅包含有限项不为零. 所以对每一个 $x\in c_{00}$，$f(x)$ 都存在. 若 $x,y\in c_{00}$，$k\in\mathbb{K}$，则

$$(kx+y)(n)=kx(n)+y(n),\quad n\geqslant 1.$$

这说明 $f(kx+y)=kf(x)+f(y)$. 所以 f 是线性的.

c_{00} 上的范数是上确界范数 $\|\cdot\|_\infty$. 考虑如下定义的 $x_n\in c_{00}$：

$$x_n(j)=\begin{cases}1, & 1\leqslant j\leqslant n,\\ 0, & j>n,\end{cases}$$

则 $\|x_n\|_\infty=1$，且

$$f(x_n)=\sum_{j=1}^{\infty}x_n(j)=n.$$

假设 f 是连续的，存在 $\alpha>0$ 使得

$$|f(x_n)|\leqslant\alpha\|x_n\|_\infty=\alpha,$$

即对所有 n 有 $n\leqslant\alpha$. 只有当 $\alpha=\infty$ 时上式才成立. 这就说明 f 是不连续的. ■

问题 1.2.6 设 c 是收敛序列空间，

$$f_1(x)=\lim_{n\to\infty}x(n),\quad x\in c;\quad f_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x(n)}{n^2},\quad x\in l^\infty.$$

证明 f_1 和 f_2 分别是 c 和 l^∞ 上的有界线性泛函，并计算它们的范数.

解答 若 $x,y\in c$，$k\in\mathbb{K}$，则对所有 n

$$(kx+y)(n)=kx(n)+y(n).$$

令 $n\to\infty$ 有

$$f_1(kx+y)=kf_1(x)+f_1(y).$$

所以 $f_1:c\to\mathbb{K}$ 是线性的.

对 $x\in c$，有

$$|x(n)|\leqslant\|x\|_\infty,\quad n\geqslant 1,$$

当 $n\to\infty$ 时，$|x(n)|\to|f_1(x)|$，所以 $|f_1(x)|\leqslant\|x\|_\infty$. 这证明了 f_1 是有界的且 $\|f_1\|\leqslant 1$. 另一方面若对所有 n，令 $x(n)=1$，则 $x\in c$，$f_1(x)=1$ 且 $\|x\|_\infty=1$. 所以

$$1=f_1(x)\leqslant\|f_1\|\,\|x\|_\infty=\|f_1\|,$$

故 $\|f_1\|=1$.

若 $x\in l^\infty$，则对所有 n 有 $|x(n)|\leqslant\|x\|_\infty$. 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x(n)}{n^2}\right|\leqslant\|x\|_\infty\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\|x\|_\infty.\tag{2}$$

这就证明了对 l^∞ 中的每个 x，$f_2(x)$ 都存在. 因为

$$\frac{(kx+y)(n)}{n^2}=\frac{kx(n)}{n^2}+\frac{y(n)}{n^2},$$

即对 $x,y\in l^\infty$，$k\in\mathbb{K}$，有

$$f_2(kx+y)=kf_2(x)+f_2(y).$$

所以 $f_2:l^\infty\to\mathbb{K}$ 是线性的. 进一步，由(2)式有

$$|f_2(x)|\leqslant\frac{\pi^2}{6}\|x\|_\infty,\quad x\in l^\infty.$$

所以 f_2 是有界的且 $\|f_2\|\leqslant\frac{\pi^2}{6}$. 另一方面，若对所有 n，令 $x(n)=1$，则 $x\in l^\infty$，$f_2(x)=\sum\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，且 $\|x\|_\infty=1$. 所以

$$\frac{\pi^2}{6}=f_2(x)\leqslant\|f_2\|\|x\|_\infty=\|f_2\|.$$

故 $\|f_2\|=\frac{\pi^2}{6}$. ■

问题 1.2.7 计算定义在 $C[-1,1]$ 上的线性泛函 f 的范数：

$$f(x)=\int_{-1}^{0}x(t)\mathrm{d}t-\int_{0}^{1}x(t)\mathrm{d}t,\quad x\in C[-1,1].$$

解答 很容易证明 f 是线性的. 因为 $C[-1,1]$ 上的范数是上确界范数，所以对所有 $x\in C[-1,1]$ 有

$$|x(t)|\leqslant\|x\|_\infty,\quad t\in[-1,1],$$

$$|f(x)|\leqslant\int_{-1}^{0}|x(t)|\mathrm{d}t+\int_{0}^{1}|x(t)|\mathrm{d}t\leqslant\|x\|_\infty+\|x\|_\infty=2\|x\|_\infty.$$

所以 $\|f\|\leqslant2$. 对 $n=1,2,\cdots$，设

$$x_n(t)=\begin{cases}1, & -1\leqslant t\leqslant-\frac{1}{n},\\ -nt, & -\frac{1}{n}<t\leqslant\frac{1}{n},\\ -1, & \frac{1}{n}\leqslant t\leqslant1,\end{cases}$$

则 $x_n\in C[-1,1]$，$\|x_n\|_\infty=1$ 且

$$f(x_n)=\int_{-1}^{-\frac{1}{n}}\mathrm{d}t+\int_{-\frac{1}{n}}^{0}-nt\,\mathrm{d}t-\int_{0}^{\frac{1}{n}}-nt\,\mathrm{d}t-\int_{\frac{1}{n}}^{1}(-1)\mathrm{d}t=2-\frac{1}{n};$$

所以对所有 n，

$$2-\frac{1}{n}=f(x_n)\leqslant\|f\|\|x_n\|_\infty=\|f\|.$$

故 $\|f\|=2$. ■

问题 1.2.8 证明赋范线性空间 X 上的不连续线性泛函的零空间在 X 中稠密.

解答 设 f 是 X 上的不连续线性泛函,则 f 不是有界的. 所以对 $n=1,2,\cdots$,存在 $x_n\in X$ 使得 $\|x_n\|\leqslant 1$ 且 $|f(x_n)|>n$. 设 $x\in X$ 且 $f(x)\neq 0$. 由问题 1.2.1 知,存在 $k_n\in\mathbb{K}$ 及 $y_n\in Z(f)$ 使得 $x_n=k_nx+y_n$,则

$$f(x_n)=k_nf(x)+f(y_n)=k_nf(x).$$

所以

$$n\|x_n\|\leqslant n<|f(x_n)|=k_nf(x), \tag{3}$$

特别 $k_n\neq 0$. 设 $z_n=-\frac{1}{k_n}y_n$,则 $z_n\in Z(f)$,

$$x_n=k_nx-k_nz_n=k_n(x-z_n),$$

由(3)式得

$$|k_n|\,\|x-z_n\|=\|x_n\|<\frac{1}{n}|k_n||f(x)|.$$

所以 $\|x-z_n\|<\frac{|f(x)|}{n}$,则 $z_n\to x$. 因为 $z_n\in Z(f)$,所以若 $f(x)\neq 0$,则有 $x\in\overline{Z(f)}$. 另一方面,若 $f(x)=0$,则 $x\in Z(f)\subset\overline{Z(f)}$. 所以,$\overline{Z(f)}=X$,这就证明了结论. ■

问题 1.2.9 设 X 是$\mathbb{K}$ 上的赋范线性空间,$S=\{x\in X:\|x\|\leqslant 1\}$. 设 $g:S\to\mathbb{K}$ 是一个映射,使得

$$g(kx+y)=kg(x)+g(y), \tag{4}$$

其中 x,y 和 $kx+y$ 属于 S,k 在$\mathbb{K}$ 中. 证明 g 能唯一地延拓到 X 上的线性泛函 f. 再证明 f 是连续的当且仅当 g 是连续的.

解答 定义 $f:X\to\mathbb{K}$ 为

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \|x\|g\left(\frac{x}{\|x\|}\right), & x\neq 0.\end{cases}$$

取 $x=y=0$ 和 $k=1$,由(4)式得 $g(0)=g(0)+g(0)$. 所以 $g(0)=0=f(0)$. 若 $x\in S$ 且$x\neq 0$,则在(4)式中令 $k=\frac{1}{\|x\|}$,$y=0$,有

$$\frac{1}{\|x\|}f(x)=g\left(\frac{1}{\|x\|}x+0\right)=\frac{1}{\|x\|}g(x)+g(0).$$

所以对所有 $x\in S$ 有 $f(x)=g(x)$. 故 f 是 g 的延拓.

若 x 和 kx 都在 S 中,则

$$g\left(\frac{kx}{\|kx\|}\right)=g\left(\frac{k}{|k|}\,\frac{x}{\|x\|}\right)=\frac{k}{|k|}g\left(\frac{x}{\|x\|}\right).$$

这就是说

$$\frac{1}{\|kx\|}f(kx)=\frac{k}{|k|}\,\frac{1}{\|x\|}f(x),\quad f(kx)=kf(x).$$

当 $k=0$ 或 $x=0$ 时，这也是成立的. 若 $x+y=0$，则

$$f(x) = f(-y) = -f(y),$$
$$f(x)+f(y) = 0 = f(x+y).$$

所以令 $x+y\neq 0$ 及 $k=1/\|x+y\|$，则 kx，ky 和 $k(x+y)$ 都在 S 中. 所以

$$\frac{1}{\|x+y\|}f(x+y) = g\left(\frac{x+y}{\|x+y\|}\right) = g(kx+ky) = g(kx)+g(ky)$$
$$= f(kx)+f(ky) = kf(x)+kf(y)$$
$$= \frac{1}{\|x+y\|}(f(x)+f(y)).$$

所以 $f(x+y)=f(x)+f(y)$. 这就得到 $f:X\to\mathbb{K}$ 是线性的.

若 f_1 是 g 到 X 上的任一个线性延拓，则 $f_1(0)=0$. 因为对 $x\neq 0$，$x/\|x\|$ 在 S 中，于是

$$f_1(x) = \|x\| f_1\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \|x\| g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = f(x).$$

这证明了唯一性.

若 f 在 X 上是连续的，则它在 S 上的限制 g 是连续的. 另一方面，设 g 在 S 上是连续的，在 X 中 $x_n\to x$. 则对足够大的 n 有 $\|x_n-x\|<1$. 对这样的 n 有

$$f(x_n-x) = g(x_n-x)\to g(0) = 0,$$
$$f(x_n)-f(x)\to 0.$$

这就证明了 f 是连续的. ■

问题 1.2.10 证明：即使 $F:X\to Y$ 是线性连续双射，它的逆可能是不连续的.

解答 设 $X=l^\infty$，$y=F(x)$，其中

$$y(n) = \frac{1}{n}x(n),\quad n=1,2,\cdots,\quad x\in X,$$

则 $F:X\to X$ 是线性的. 若 $F(x)=0$，则

$$\frac{1}{n}x(n) = F(x)(n) = 0,\quad n\geqslant 1,$$

所以 $x=0$. 故 F 是单射. 设 $Y=R(F)$ 是 F 的值域. 则 $F:X\to Y$ 是双射，且对所有 $n\geqslant 1$ 有

$$|F(x)(n)| = \frac{1}{n}|x(n)| \leqslant \frac{1}{n}\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty,$$

所以 $\|F(x)\|_\infty\leqslant\|x\|_\infty$. 故 F 是连续的且 $\|F\|\leqslant 1$.

设 $G=F^{-1}$，假设 G 是连续的. 则存在 $\alpha>0$ 使得对所有 $y\in Y$ 有 $\|G(y)\|_\infty\leqslant\alpha\|y\|_\infty$. 设

$$x_n(j) = \begin{cases} j, & 1\leqslant j\leqslant n,\\ 0, & j>n. \end{cases}$$

则 $x_n\in l^\infty$，$\|x_n\|_\infty=n$. 若 $y_n=F(x_n)$，则

$$y_n(j) = F(x_n)(j) = 1, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$
$$y_n(j) = 0, \qquad\qquad j > n,$$

所以 $y_n \in Y$，$\| y_n \|_\infty = 1$ 且 $G(y_n) = x_n$. 故

$$n = \| x_n \|_\infty = \| G(y_n) \|_\infty \leqslant \alpha \| y_n \|_\infty = \alpha.$$

因 n 是任意大的，则上式就产生了矛盾. 这就证明了结论. ■

问题 1.2.11 设 $T: C[0,1] \to C[0,1]$ 定义如下：$y = T(x)$，其中

$$y(t) = \int_0^t x(u)\mathrm{d}u.$$

求 $R(T)$ 及 $T^{-1}: R(T) \to C[0,1]$. T^{-1} 是线性的吗？有界吗？

解答 设 $y = T(x)$，则 $y(0) = 0$，y 是可微的且对所有 $t \in [0,1]$ 有 $y'(t) = x(t)$. 所以

$$R(T) = \{ y \in C^1[0,1] : y(0) = 0 \},$$

其中 $C^1[0,1]$ 是 $[0,1]$ 上的所有连续可微函数组成的空间. 易见 $T^{-1}y(t) = y'(t)$. 若 $T(x_1) = y = T(x_2)$，则对 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 有 $x_1(t) = y'(t) = x_2(t)$. 这就证明了 T 是单射. 因为 T 是线性的，则 T^{-1} 也是线性的.

设 $x_n(t) = nt^{n-1}$，$y_n = T(x_n)$，则 $y_n(t) = t^n$. 因为 $C[0,1]$ 上的范数是上确界范数 $\| \cdot \|_\infty$，所以

$$\| x_n \|_\infty = n, \quad \| y_n \|_\infty = 1.$$

若 $S = T^{-1}: R(T) \to C[0,1]$ 是有界的，则存在 $\alpha > 0$ 使得

$$\| x_n \|_\infty = \| S(y_n) \|_\infty \leqslant \alpha \| y_n \|_\infty = \alpha,$$

即对所有 n 有 $n \leqslant \alpha$. 这是不可能的. 所以 T^{-1} 不是有界的. ■

问题 1.2.12 定义 $S, T: C[0,1] \to C[0,1]$ 为

$$(Sx)(s) = s\int_0^1 x(t)\mathrm{d}t, \quad (Tx)(s) = sx(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant 1.$$

问 S 和 T 可交换吗？求 $\| S \|$，$\| T \|$，$\| ST \|$ 和 $\| TS \|$.

解答 设 $x(t) = 1 (0 \leqslant t \leqslant 1)$，$y = S(x)$ 和 $z = T(x)$. 则

$$y(s) = s\int_0^1 x(t)\mathrm{d}t = s, \quad 0 \leqslant s \leqslant 1;$$
$$z(s) = sx(s) = s, \qquad 0 \leqslant s \leqslant 1.$$

所以对 $0 \leqslant s \leqslant 1$ 有

$$(TSx)(s) = (Ty)(s) = sy(s) = s^2,$$
$$(STx)(s) = (Sz)(s) = s\int_0^1 z(t)\mathrm{d}t = s\int_0^1 t\mathrm{d}t = \frac{s}{2},$$

故 $ST \neq TS$.

因为 $C[0,1]$ 上的范数是上确界范数 $\| \cdot \|_\infty$，所以对所有 t 有 $|x(t)| \leqslant \| x \|$ 且对 $x \in C[0,1]$，$0 \leqslant s \leqslant 1$ 有

$$| S(x)(s) | \leqslant s\int_0^1 | x(t) | \mathrm{d}t \leqslant s \| x \| \leqslant \| x \|,$$

$$|Tx(s)| = s|x(s)| \leqslant s\|x\| \leqslant \|x\|,$$

所以 $\|Sx\| \leqslant \|x\|$，$\|Tx\| \leqslant \|x\|$ 及

$$\|TSx\| \leqslant \|Sx\| \leqslant \|x\|.$$

这就说明 $\|S\| \leqslant 1$，$\|T\| \leqslant 1$ 及 $\|TS\| \leqslant 1$. 若 $z=T(x)$，$x \in C[0,1]$，则对 $0 \leqslant s \leqslant 1$ 有

$$|z(s)| = s|x(s)| \leqslant s\|x\|,$$

$$|STx(s)| = |Sz(s)| \leqslant s\int_0^1 |z(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t\|x\|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\|x\|,$$

$$\|STx\| \leqslant \frac{1}{2}\|x\|.$$

所以 $\|ST\| \leqslant \frac{1}{2}$. 若对所有 t，令 $x(t)=1$，则 $\|x\|=1$ 且

$$(Sx)(s) = s, \quad (Tx)(s) = s, \quad (TSx)(s) = s^2, \quad (STx)(s) = \frac{s}{2},$$

所以

$$\|Sx\| = \|Tx\| = \|TSx\| = 1 = \|x\|, \quad \|STx\| = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\|x\|.$$

这就得到

$$\|S\| \geqslant 1, \quad \|T\| \geqslant 1, \quad \|TS\| \geqslant 1, \quad \|ST\| \geqslant \frac{1}{2}.$$

所以 $\|S\|=1$，$\|T\|=1$，$\|TS\|=1$，$\|ST\|=\frac{1}{2}$. ■

问题 1.2.13 设 $X=\mathbb{R}^2$，它的范数是欧氏范数 $\|\cdot\|_2$，$A \in BL(X)$ 通过 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 来给出. 证明 $\|A\| = \frac{1}{2}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})$，其中

$$\begin{cases} \alpha = a^2+b^2+c^2+d^2+2(ad-bc), \\ \beta = a^2+b^2+c^2+d^2-2(ad-bc). \end{cases} \tag{5}$$

解答 设 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$，$\|\boldsymbol{x}\|=1$ 及 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$. 则对某个实数 θ 有 $\boldsymbol{x}=(\cos\theta,\sin\theta)$ 且

$$y(1) = a\cos\theta + b\sin\theta, \quad y(2) = c\cos\theta + d\sin\theta.$$

所以

$$\begin{aligned} \|A\boldsymbol{x}\|^2 &= (y(1))^2 + (y(2))^2 \\ &= (a^2+c^2)\cos^2\theta + (b^2+d^2)\sin^2\theta + 2(ab+cd)\cos\theta\sin\theta \\ &= \frac{a^2+c^2+b^2+d^2}{2} + \frac{a^2+c^2-b^2-d^2}{2}\cos(2\theta) + (ab+cd)\sin(2\theta) \\ &= \frac{\alpha+\beta}{4} + r\cos(2\theta-\phi), \end{aligned} \tag{6}$$

其中 α,β 都是由(5)式给出的且

$$r\cos\phi=\frac{1}{2}(a^2+c^2-b^2-d^2),\quad r\sin\phi=ab+cd.$$

所以

$$\begin{aligned}4r^2&=(a^2+c^2-b^2-d^2)^2+4(ab+cd)^2\\&=(a^2+c^2+b^2+d^2)^2-4(a^2+c^2)(b^2+d^2)+4(ab+cd)^2\\&=(a^2+c^2+b^2+d^2)^2-4(ad-bc)^2\\&=\alpha\beta.\end{aligned}$$

因此由(6)式有

$$\|Ax\|^2=\frac{\alpha+\beta}{4}+\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2}\cos(2\theta-\phi)\leqslant\left(\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{2}\right)^2,$$

其中当 $\theta=\frac{1}{2}\phi$ 时等号成立. 于是我们有

$$\|A\|=\sup_{\|x\|=1}\|Ax\|=\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{2}.$$ ■

问题 1.2.14 设 X 是由$\mathbb{R}$上所有有界实值函数组成的赋范空间,它的范数定义如下:

$$\|x\|=\sup\{|x(t)|:t\in\mathbb{R}\},\quad x\in X.$$

设 $T:X\to X$ 定义为

$$Tx(t)=x(t-\Delta)$$

其中 Δ 是一个常数. T 是线性的吗? 有界吗?

解答 由 $Tx(t)=x(s)$,其中 $s=t-\Delta$. 若 $z=kx+y$,其中 $k\in\mathbb{K}$,$x,y\in X$,则

$$z(s)=kx(s)+y(s),\quad Tz(t)=kTx(t)+Ty(t),\quad T(z)=kT(x)+T(y).$$

所以 T 是线性的. 若 $y=T(x)$,则对所有 $t\in\mathbb{R}$,

$$|y(t)|=|x(t-\Delta)|\leqslant\|x\|,\quad |x(t)|=|y(t+\Delta)|\leqslant\|y\|;$$

这就得到 $\|y\|=\|x\|$. 所以 T 是有界的且 $\|T\|=1$. ■

问题 1.2.15 设 X 和 Y 是$\mathbb{K}=\mathbb{R}$上的赋范线性空间. 设 $F:X\to Y$ 是一个映射,使得

$$F(x+y)=F(x)+F(y),\quad x,y\in X.$$

若 F 在球

$$U(a,r)=\{x\in X:\|x-a\|<r\},\quad r>0$$

上是有界的,证明 F 是连续的、线性的. 再证明当$\mathbb{K}=\mathbb{C}$时,这个结果是错的.

解答 因为

$$F((n+1)x)=F(nx+x)=F(nx)+F(x),$$

由归纳法知对所有正整数 n 和 $x\in X$,有 $F(nx)=nF(x)$. 因为 $F(0)=F(0+0)=F(0)+F(0)$,所以 $F(0)=0$. 于是

$$0=F(x+(-x))=F(x)+F(-x),$$

$$F(-x)=-F(x),$$

故对所有整数 n 和 $x\in X$, $F(nx)=nF(x)$. 若 m 和 n 都是整数, $m>0$, 则对所有 $x\in X$,

$$nF(x)=F(nx)=F\left(m\cdot\frac{n}{m}x\right)=mF\left(\frac{n}{m}x\right).$$

所以对所有有理数 p 和 $x\in X$ 有 $F(px)=pF(x)$.

因为 F 在 $U(a,r)$ 上是有界的, 所以存在 $M>0$, 使得对所有 $U(a,r)$ 中的 x, 有 $\|F(x)\|\leqslant M$. 设 $x\in X, x\neq 0$, 取有理数 p 使得

$$\frac{r}{2\|x\|}<p<\frac{r}{\|x\|},$$

则 $\|px\|<r$. 所以 $px+a$ 和 a 都在 $U(a,r)$ 中. 因此

$$\|F(px)\|=\|F(px+a)-F(a)\|\leqslant\|F(px+a)\|+\|F(a)\|,$$

故

$$\|pF(x)\|=\|F(px)\|\leqslant 2M,\quad \|F(x)\|\leqslant\frac{1}{p}2M<\frac{2\|x\|}{r}2M.$$

所以对某个常数 α 有 $\|F(x)\|\leqslant\alpha\|x\|$. 当 $x=0$ 时, 这个结论也成立. 所以对 X 中所有的 x, y

$$\|F(x)-F(y)\|=\|F(x-y)\|\leqslant\alpha\|x-y\|.$$

这就证明了 F 在 X 上是一致连续的.

对 $k\in\mathbb{R}$, 能够找到有理数列 $\{p_n\}$, 使得 $p_n\to k$, 所以 $p_nx\to kx$, 再由 F 的连续性. 有 $F(p_nx)\to F(kx)$. 但是

$$F(p_nx)=p_nF(x)\to kF(x),$$

故 $F(kx)=kF(x)$. 所以 F 是线性的.

最后, 若 $X=Y=\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $F(z)=\bar{z}$, 其中 $\bar{z}$ 是 z 的共轭复数, 则 F 不是线性的, 即使它有该问题所述的特性. 这就完成了证明. ■

问题 1.2.16 设 X 和 Y 是赋范空间, $F: X\to Y$ 是线性的. 证明下列陈述是等价的:

(a) F 是连续的.

(b) F 映 X 中的柯西列到 Y 中的柯西列.

(c) F 映 X 中的收敛列到 Y 中的收敛列.

解答 首先设 F 是连续的. 若 $\{x_n\}$ 是 X 中的柯西列, 则

$$\|F(x_n)-F(x_m)\|=\|F(x_n-x_m)\|\leqslant\|F\|\,\|x_n-x_m\|.$$

这就证明了 $\{F(x_n)\}$ 是 Y 中的柯西列.

设 $x_n\to x\in X$, 则

$$\|F(x_n)-F(x)\|=\|F(x_n-x)\|\leqslant\|F\|\,\|x_n-x\|.$$

这就证明了在 Y 中 $F(x_n)\to F(x)$. 所以我们已经证明了若(a)成立, 则(b)和(c)都成立.

下面假设 F 不是连续的, 则对 $n=1,2,\cdots$, 存在 X 中的 x_n 使得 $\|x_n\|\leqslant 1$ 且 $\|F(x_n)\|>n$. 所以 $x_n\neq 0$. 设

$$y_n = \frac{x_n}{\| x_n \|}, \quad z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} y_n,$$

则 $\| y_n \| = 1$，$\| z_n \| = 1/\sqrt{n} \to 0$. 所以在 X 中 $z_n \to 0$. 但是

$$\| F(z_n) \| = \frac{1}{\sqrt{n}} \| F(y_n) \| = \frac{1}{\sqrt{n} \| x_n \|} \| F(x_n) \| > \sqrt{n}.$$

所以$\{F(z_n)\}$不是有界的. 因而$\{F(z_n)\}$既不是收敛列也不是柯西列. 这就证明了若(a)不成立，则(b)和(c)都不成立. 这就完成了证明. ■

问题 1.2.17 设(k_{ij})是一个**列有限**的无穷矩阵，它的元素 k_{ij} 都是纯量. 对 c_{00} 中的 x，设 $F(x)=y$，其中

$$y(i) = \sum_{j=1}^{\infty} k_{ij} x(j), \quad i = 1,2,\cdots.$$

设 $X=c_{00}$，范数是 $\| \cdot \|_1$，$Y=c_{00}$，范数是 $\| \cdot \|_\infty$. 证明 $F: X \to Y$ 是线性的. 再证明若存在 $\alpha>0$ 使得任取 i,j 有 $|k_{ij}| \leqslant \alpha$，则 F 是连续的.

解答 若 $x \in c_{00}$，则对依赖于 x 的某个 n，

$$\sum_{j=1}^{\infty} k_{ij} x(j) = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} x(j).$$

所以对每个 $x \in c_{00}$，这个和都存在. 由于(k_{ij})的每一列仅包含了有限个不为 0 的元素，所以可以找到依赖于 n 的 m，使得

$$k_{ij} = 0, \quad i > m, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

因而，若 $y=F(x)$，则

$$y(i) = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} x(j) = 0, \quad i > m.$$

这就证明了 $y \in c_{00}$ 且 F 映 c_{00} 到其自身.

若 $z=kx+y$，其中 $k \in \mathbb{K}$，$x,y \in c_{00}$，则

$$k_{ij} z(j) = k_{ij}(kx(j) + y(j)),$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} k_{ij} z(j) = F \sum_{j=1}^{\infty} k_{ij} x(j) + \sum_{j=1}^{\infty} k_{ij} y(j),$$

$$F(z)(i) = kF(x)(i) + F(y)(i), \quad i = 1,2,\cdots.$$

所以 $F(z)=kF(x)+F(y)$. 故 F 是线性的.

若对所有 i,j 有 $|k_{ij}| \leqslant \alpha$，则

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} k_{ij} x(j) \right| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |k_{ij}| |x(j)| \leqslant \alpha \sum_{j=1}^{\infty} |x(j)|,$$

即 $|F(x)(i)| \leqslant \alpha \| x \|_1$ 对 $i=1,2,\cdots$ 成立. 所以

$$\| F(x) \|_\infty = \sup\{|F(x)(i)| : i \geqslant 1\} \leqslant \alpha \| x \|_1.$$

这就证明了 F 是连续的且 $\| F \| \leqslant \alpha$. ■

问题 1.2.18 设 E 是$\mathbb{R}$ 的可测子集，

$$X = \{x \in L^2(E): tx(t) \in L^2(E)\}.$$

定义 $F: X \to L^2(E)$为

$$F(x)(t) = tx(t), \quad t \in E, \quad x \in X.$$

证明若 $E=[a,b]$,则 F 是连续的；若 $E=\mathbb{R}$,则 F 是不连续的.

解答 若 $x,y\in X$ 及 $k\in\mathbb{K}$,设 $z=kx+y$ 则 $F(x),F(y)$都在 $L^2(E)$中且

$$tz(t)= t(kx(t) + y(t)) = ktx(t) + ty(t),$$

$$F(z)(t)= kF(x)(t) + F(y)(t), \quad t \in E.$$

所以 $z\in X$ 且

$$F(z) = kF(x) + F(y) \in L^2(E).$$

这就证明了 X 是 $L^2(E)$的子空间且 F 是线性的.

设 $E=[a,b]$,α 使得对 $t\in E,|t|\leqslant\alpha$. 若 $x\in X,y=F(x)$,则

$$| y(t) |=| tx(t) |\leqslant \alpha | x(t) |,$$

$$\| y \|_2^2 = \int_a^b | y(t) |^2 \mathrm{d}t \leqslant \alpha^2 \int_a^b | x(t) |^2 \mathrm{d}t = \alpha^2 \| x \|_2^2,$$

$$\| F(x) \|_2 = \| y \|_2 \leqslant \alpha \| x \|_2.$$

这就证明了 F 是连续的.

下面设 $E=\mathbb{R}$. 对 $n=1,2,\cdots$,定义$\mathbb{R}$ 上的 x_n,

$$x_n(t) = \begin{cases} t^{n-1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}, & t > 0, \\ 0, & t \leqslant 0, \end{cases}$$

则

$$\int_{\mathbb{R}} | x_n(t) |^2 \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{2n-2}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \Gamma(2n-1) < \infty,$$

$$\int_{\mathbb{R}} | tx_n(t) |^2 \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{2n}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \Gamma(2n+1) < \infty,$$

所以 $x_n\in L^2(E),tx_n(t)\in L^2(E)$. 因而对 $n=1,2,\cdots$有 $x_n\in X$. 我们有

$$\| F(x_n) \|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} | F(x_n)(t) |^2 \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} | tx_n(t) |^2 \mathrm{d}t = \Gamma(2n+1),$$

$\| F(x_n) \|_2 = (2n(2n-1)\Gamma(2n-1))^{1/2} = (2n(2n-1))^{1/2} \| x_n \|$ 对所有的 n 都成立. 所以 F 不可能有界. ■

问题 1.2.19 给定 $m\times n$ 矩阵(k_{ij}),定义 $F:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^m$ 为

$$F(x)(i) = \sum_{j=1}^{n} k_{ij}x(j), \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

设

$$\beta = \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{j=1}^{n} | k_{ij} |, \quad \gamma = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{m} | k_{ij} |,$$

若$\mathbb{K}^n$和$\mathbb{K}^m$均赋予范数$\|\cdot\|_p$,$1<p<\infty$.证明

$$\|F\| \leqslant \gamma^{1/p}\beta^{1/q},$$

其中$1/p+1/q=1$.进一步推出若$n=m$且(k_{ij})是对角矩阵,则

$$\|F\| = \max_{1\leqslant i\leqslant m} |k_{ii}|.$$

解答 若$x\in\mathbb{K}^n$,则对$1\leqslant i\leqslant m$,由 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}|F(x)(i)| &\leqslant \sum_{j=1}^{n} |k_{ij}||x(j)| = \sum_{j=1}^{n} |k_{ij}|^{1/p}|x(j)||k_{ij}|^{1/q}\\ &\leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |k_{ij}||x(j)|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^{n}|k_{ij}|\right)^{1/q}\\ &\leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |k_{ij}||x(j)|^p\right)^{1/p}\beta^{1/q}.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\|F(x)\|_p^p &= \sum_{i=1}^{m} |F(x)(i)|^p \leqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |k_{ij}||x(j)|^p\beta^{p/q}\\ &= \beta^{p/q}\sum_{j=1}^{n}|x(j)|^p\sum_{i=1}^{m}|k_{ij}| \leqslant \beta^{p/q}\sum_{j=1}^{n}|x(j)|^p\gamma;\\ \|F(x)\|_p &\leqslant \beta^{1/q}\gamma^{1/p}\|x\|_p.\end{aligned}$$

这就证明$\|F\|\leqslant\beta^{1/q}\gamma^{1/p}$.

若$n=m$且对$i\neq j$有$k_{ij}=0$,则

$$\beta = \max_{1\leqslant i\leqslant m}|k_{ii}| = \gamma.$$

由已经证明的结论知$\|F\|\leqslant\beta$.进一步,对某个r有$\beta=|k_{rr}|$.设$\beta\neq0$,若对$j\neq r$令$x(j)=0$及$x(r)=\beta/k_{rr}$,则$|x(r)|=1$,$\|x\|_p=1$且

$$F(x)(i) = k_{ir}x(r) = 0, \quad i\neq r, \quad F(x)(r) = k_{rr}x(r) = \beta.$$

所以$\|F(x)\|_p=\beta$且

$$\beta \leqslant \|F\|\,\|x\|_p = \|F\|.$$

因为当$\beta=0$时,上式也成立;所以有$\|F\|=\beta$.这就完成了证明. ■

问题 1.2.20 设$1\leqslant p<\infty$,$F:l^p\to l^p$是有界线性映射.证明F可以由一个**无穷矩阵**(k_{ij})用以下形式来表示:

$$F(x)(i) = \sum_{j=1}^{\infty}k_{ij}x(j), \quad i=1,2,\cdots, \quad x\in l^p.$$

解答 设e_j表示l^p的第j个单位向量,即$e_j=(0,\cdots,1,0,\cdots)$,其中第$j$个位置是1,其他位置都是0.设$F(e_j)(i)=k_{ij}$.对$x\in l^p$,设

$$x_n = \sum_{j=1}^{n}x(j)e_j = (x(1),\cdots,x(n),0,0,\cdots),$$

则对$j\leqslant n$有$x(j)-x_n(j)=0$;对$j>n$有$x(j)-x_n(j)=x(j)$.因为$x\in l^p$,所以当$n\to$

∞ 时有 $\| x-x_n \|_p^p = \sum_{j=n+1}^{\infty} | x(j) |^p \to 0$. 所以在 l^p 中 $x_n \to x$. 故在 l^p 中有 $F(x_n) \to F(x)$. 因为当 $n \to \infty$ 时有

$$| F(x_n)(i) - F(x)(i) |^p \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} | F(x_n)(j) - F(x)(j) |^p = \| F(x_n) - F(x) \|_p^p \to 0.$$

我们看到对 $i=1,2,\cdots$, 当 $n \to \infty$ 时有 $F(x_n)(i) \to F(x)(i)$. 而

$$F(x_n) = \sum_{j=1}^{n} x(j) F(e_j), \quad F(x_n)(i) = \sum_{j=1}^{n} x(j) k_{ij},$$

所以

$$F(x)(i) = \lim_{n \to \infty} F(x_n)(i) = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} k_{ij} x(j).$$

这就完成了证明. ■

问题 1.2.21 设 $F: c_0 \to c_0$ 是有界线性映射. 证明 F 可以由无穷矩阵 (k_{ij}) 用以下形式来表示:

$$F(x)(i) = \sum_{j=1}^{\infty} k_{ij} x(j), \quad i = 1,2,\cdots, \quad x \in c_0.$$

解答 类似问题 1.2.20 的证明, 对 $i \geqslant 1, j \geqslant 1$, 设 $k_{ij} = F(e_j)(i)$. 对 $x \in c_0$, 设

$$x_n = \sum_{j=1}^{n} x(j) e_j.$$

因为当 $j \leqslant n$ 时有 $x(j) - x_n(j) = 0$; 当 $j > n$ 时有 $x(j) - x_n(j) = x(j)$. 故有

$$\| x - x_n \|_\infty = \sup_{j>n} | x(j) |.$$

因为 $x \in c_0$, 所以当 $n \to \infty$ 时, 上式趋于 0, 所以在 c_0 中 $x_n \to x$, 因此有 $F(x_n) \to F(x)$. 所以当 $n \to \infty$ 时有

$$| F(x_n)(i) - F(x)(i) | \leqslant \| F(x_n) - F(x) \|_\infty \to 0.$$

因为

$$F(x_n)(i) = \sum_{j=1}^{n} x(j) k_{ij},$$

所以

$$F(x)(i) = \sum_{j=1}^{\infty} k_{ij} x(j).$$

这就完成了证明. ■

问题 1.2.22 证明存在有界线性映射 $F: c \to c$, 它不能由无穷矩阵 (k_{ij}) 用下面形式来表示, 对每个 $x \in c$,

$$F(x)(i) = \sum_{j=1}^{\infty} k_{ij} x(j), \quad i = 1,2,\cdots,$$

这个级数对所有 i 及 x 都收敛.

解答 对 $x\in c$,设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}x(n)$,

$$F(x)=(f(x),f(x),\cdots),$$

即对所有 $i\geqslant 1$ 有 $F(x)(i)=f(x)$. 则由问题 1.2.6 知 f 是 c 上的有界线性泛函. 所以 F 是线性的. 它也是连续的,这是由于

$$\|F(x)\|_\infty=\sup_{i\geqslant 1}|F(x)(i)|=|f(x)|\leqslant\|f\|\,\|x\|_\infty.$$

假设对 $x\in c$ 及 $i=1,2,\cdots$ 有

$$F(x)(i)=\sum_{j=1}^{\infty}k_{ij}x(j).$$

若取 $x=e_m$,则有

$$F(x)(i)=k_{im}.$$

但是 $F(x)(i)=f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}e_m(n)=0$. 所以对所有 i 及 $m\geqslant 1$ 有 $k_{im}=0$. 所以对所有 i 及 x 有 $F(x)(i)=0$. 而且若 $x=(1,1,1,\cdots)$,则 $x\in c$ 且

$$F(x)(i)=f(x)=\lim_{n\to\infty}x(n)=1.$$

这就产生了矛盾. 于是也就证明了没有矩阵 (k_{ij}) 来表示 F. ■

1.3 等价范数,Riesz 引理,有限维空间

称线性空间 X 上的两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是等价的,若存在常数 $\alpha>0,\beta>0$ 使得

$$\alpha\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant\beta\|x\|_1,\quad x\in X.$$

在这种情况下,

(i) 相对于 $\|\cdot\|_1$ 有 $x_n\to x$ 当且仅当相对于 $\|\cdot\|_2$ 有 $x_n\to x$.

(ii) $\{x_n\}$ 相对于 $\|\cdot\|_1$ 是柯西列当且仅当 $\{x_n\}$ 相对于 $\|\cdot\|_2$ 是柯西列.

(iii) $E\subset X$ 相对于 $\|\cdot\|_1$ 是开的当且仅当 E 相对于 $\|\cdot\|_2$ 是开的.

Heine-Borel 定理是说若 $Y=\mathbb{K}^n$ 且赋予欧氏范数 $\|\cdot\|_2$,则 Y 的有界闭子集均是紧的. 有限维空间有许多重要性质. 赋范空间的有限维子空间一定是闭的(见问题 1.3.6). 有限维线性空间上任两个范数都是等价的(见问题 1.3.9).

Riesz 引理指出若 Y 是赋范空间 X 的真闭子空间且 $0<r<1$,则存在 $x_r\in X$ 使得 $\|x_r\|=1$,且 $r\leqslant d(x_r,Y)\leqslant 1$.

练习

1. 设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是线性空间 X 上的两个等价范数. 证明:

(a) 相对于 $\|\cdot\|_1$ 有 $x_n\to x$ 当且仅当相对于 $\|\cdot\|_2$ 有 $x_n\to x$.

(b) X 的子集 E 相对于 $\|\cdot\|_1$ 是开的当且仅当它相对于 $\|\cdot\|_2$ 是开的.

2. 设 $X=\mathbb{R}^2$ 且赋予范数 $\|\cdot\|_\infty$, Y 是 X 的子空间且是由下列所有 y 组成: $\boldsymbol{y}=(y(1),y(2))\in\mathbb{R}^2$ 且 $y(1)+y(2)=0$. 证明若 $\boldsymbol{x}_1=(1,1)$, 则

$$d(\boldsymbol{x}_1,Y)=1,\quad \|\boldsymbol{x}_1\|=1.$$

问题

问题 1.3.1 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是赋范空间. 证明下面给出了 $X_1\times\cdots\times X_n$ 上的等价范数:

$$\|(x_1,x_2,\cdots,x_n)\|_1=\sum_{i=1}^n\|x_i\|,\quad x_i\in X_i;$$

$$\|(x_1,x_2,\cdots,x_n)\|_2=\left(\sum_{i=1}^n\|x_i\|^2\right)^{1/2},\quad x_i\in X_i;$$

$$\|(x_1,x_2,\cdots,x_n)\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|x_i\|,\quad x_i\in X_i.$$

解答 设 y 表示 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 且 $x_i\in X_i$. 我们有

$$\left(\sum_{i=1}^n\|x_i\|\right)^2\geqslant\sum_{i=1}^n\|x_i\|^2;$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\|x_i\|^2\geqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\|x_i\|\right)^2.$$

所以

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n\|x_i\|\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^n\|x_i\|^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^n\|x_i\|\right)^2,$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|y\|_1\leqslant\|y\|_2\leqslant\|y\|_1,\quad \|y\|_2\leqslant\|y\|_1\leqslant\sqrt{n}\|y\|_2.$$

所以 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是等价的.

由于对某个 j 有 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\|x_i\|=\|x_j\|$, 所以有

$$\|x_j\|\leqslant\sum_{i=1}^n\|x_i\|\leqslant n\|x_j\|,\quad \text{即}\quad \|y\|_\infty\leqslant\|y\|_1\leqslant n\|y\|_\infty.$$

这就证明了 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_\infty$ 是等价的. ■

问题 1.3.2 若 $1\leqslant p<\infty$, $\boldsymbol{x}\in\mathbb{K}^n$, 令

$$\|\boldsymbol{x}\|_p=\left(\sum_{j=1}^n|x(j)|^p\right)^{1/p}.$$

证明对所有 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{K}^n$,

$$n^{-1/2}\|\boldsymbol{x}\|_2\leqslant\|\boldsymbol{x}\|_p\leqslant\|\boldsymbol{x}\|_2,\quad p>2,\tag{1}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_2\leqslant\|\boldsymbol{x}\|_p\leqslant n^{1/2}\|\boldsymbol{x}\|_2,\quad 1\leqslant p\leqslant 2.\tag{2}$$

解答 若 $p>r$, $r/p+1/q=1$, 则由 Hölder 不等式有

$$\sum_{j=1}^{n} | a_j b_j | \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} | a_j |^{p/r} \right)^{r/p} \left(\sum_{j=1}^{n} | b_j |^{q} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

若取 $a_j = |x(j)|^r$ 且 $b_j = 1$，则有

$$\sum_{j=1}^{n} | x(j) |^r \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} | x(j) |^p \right)^{r/p} n^{1/q}.$$

所以

$$\| \boldsymbol{x} \|_r \leqslant \| \boldsymbol{x} \|_p n^{1/qr} = \| \boldsymbol{x} \|_p n^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}},$$

$$n^{-1/r} \| \boldsymbol{x} \|_r \leqslant n^{-1/p} \| \boldsymbol{x} \|_p.$$

若 $p>r$，这些结论都成立. 所以，若 $p>2$，

$$n^{-1/2} \| \boldsymbol{x} \|_2 \leqslant n^{-1/p} \| \boldsymbol{x} \|_p \leqslant \| \boldsymbol{x} \|_p;$$

若 $1 \leqslant p < 2$，因为 $1/p \leqslant 1$，所以有

$$n^{-1/p} \| \boldsymbol{x} \|_p \leqslant n^{-1/2} \| \boldsymbol{x} \|_2,$$

$$\| \boldsymbol{x} \|_p \leqslant n^{1/p-1/2} \| \boldsymbol{x} \|_2 \leqslant n^{1/2} \| \boldsymbol{x} \|_2.$$

所以我们得到(1)式中第一个不等式和(2)式中第二个不等式.

若 $p>1, a>0$，取 $\phi(t) = (t+a)^p - t^p$，则

$$\phi'(t) = p(t+a)^{p-1} - pt^{p-1} > 0;$$

所以对 $t \geqslant 0$ 有 $\phi(t) \geqslant \phi(0) = a^p$. 于是有

$$(t+a)^p \geqslant t^p + a^p, \quad a \geqslant 0, \quad t \geqslant 0, \quad p > 1.$$

利用这个不等式，对 n 应用归纳法，若 $p>1$，则有

$$\left(\sum_{j=1}^{n} | a_j | \right)^p \geqslant \sum_{j=1}^{n} | a_j |^p.$$

若 $a_j = |x(j)|^r$，把 p 改为 p/r，则证明了若 $p>r$ 有

$$\left(\sum_{j=1}^{n} | x(j) |^r \right)^{p/r} \geqslant \sum_{j=1}^{n} | x(j) |^p = (\| \boldsymbol{x} \|_p)^p.$$

所以若 $p>r$，则 $\| \boldsymbol{x} \|_r \geqslant \| \boldsymbol{x} \|_p$. 这就是(1)式中第二个不等式和(2)式中第一个不等式. 这就完成了证明. ■

问题 1.3.3 设 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$，令

$$\| \boldsymbol{x} \|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} | x(j) |^2 \right)^{1/2},$$

且 $\| \cdot \|$ 是 $\mathbb{K}^n$ 上的任一范数. 求常数 $\alpha>0, \beta>0$ 使得对所有 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ 有

$$\alpha \| \boldsymbol{x} \|_2 \leqslant \| \boldsymbol{x} \| \leqslant \beta \| \boldsymbol{x} \|_2.$$

能够找到不依赖于一般范数 $\| \cdot \|$ 的 α 和 β 吗?

解答 设 $S = \{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n : \| \boldsymbol{x} \|_2 = 1 \}$. 则由 Heine-Borel 定理知 S 是 $\mathbb{K}^n$ 的紧子集. 由范数的三角不等式知由 $\phi(\boldsymbol{x}) = \| \boldsymbol{x} \|$ 给出的实函数 ϕ 是连续的. 所以存在 S 中的 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 使得对所有 $\boldsymbol{x} \in S'$，

$$\phi(x_1) \leqslant \phi(x) \leqslant \phi(x_2)$$

设 $\alpha=\phi(x_1)=\|x_1\|$, $\beta=\phi(x_2)=\|x_2\|$. 因为 $\|x_1\|_2=\|x_2\|_2=1$, 所以 $x_1\neq\mathbf{0}$, $x_2\neq\mathbf{0}$. 因此 $\alpha>0$ 且 $\beta>0$. 设 $x\in\mathbb{K}^n$, $x\neq\mathbf{0}$, 则 $(1/\|x\|_2)x\in S$ 且

$$\alpha \leqslant \phi\left(\frac{1}{\|x\|_2}x\right)\leqslant\beta,$$

$$\alpha \leqslant \frac{\|x\|}{\|x\|_2} \leqslant \beta,$$

$$\alpha\|x\|_2 \leqslant \|x\| \leqslant \beta\|x\|_2.$$

当 $x=\mathbf{0}$ 时, 这些不等式也成立. 这就证明了第一部分.

为证第二部分, 对任意 $\lambda>0$, 令

$$\|x\| = \lambda\|x\|_2, \quad x\in\mathbb{K}^n$$

则 $\|\cdot\|$ 定义了 $\mathbb{K}^n$ 上的范数. 所以若 α 和 β 像上面一样存在, 则对所有 x 有

$$\alpha\|x\|_2 \leqslant \lambda\|x\|_2 \leqslant \beta\|x\|_2,$$

$$\alpha \leqslant \lambda \leqslant \beta.$$

所以 α, β 依赖于 λ. 这就证明了不能找到独立于 $\|\cdot\|$ 的常数 α, β. ■

问题 1.3.4 设 $1\leqslant r<p\leqslant\infty$, 证明 $\|\cdot\|_p$ 和 $\|\cdot\|_r$ 不是 c_{00} 上的等价范数.

解答 对 $n=1,2,\cdots$, 令

$$x_n(j) = \begin{cases} j^{-1/r}, & 1\leqslant j\leqslant n, \\ 0, & j>n, \end{cases}$$

则 $x_n\in c_{00}$,

$$(\|x_n\|_r)^r = \sum_{j=1}^{n} j^{-1},$$

$$(\|x_n\|_p)^p = \sum_{j=1}^{n} j^{-p/r}, \quad p<\infty,$$

且 $\|x_n\|_\infty=1$. 所以对所有 n 有 $\|x_n\|_p\leqslant\lambda$, 其中

$$\lambda = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-p/r}, \quad p<\infty.$$

若 $p=\infty$, 则 $\lambda=1$. 如果 $\|\cdot\|_p$ 和 $\|\cdot\|_r$ 是 c_{00} 上的等价范数, 则存在 $\alpha>0$ 及 $\beta>0$ 使得对所有 n 有

$$\alpha\|x_n\|_p \leqslant \|x_n\|_r \leqslant \beta\|x_n\|_p$$

所以对所有 n

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\right)^{1/r} = \|x_n\|_r \leqslant \beta\lambda.$$

因为左边项当 $n\to\infty$ 时趋于 ∞, 而 λ 是有限的, 所以上式不可能成立. 这就完成了证明. ■

问题 1.3.5 证明线性空间上的两个范数是等价的当且仅当相对于其中一个范数是柯

西列的序列相对于另一个范数也是柯西列.

解答 设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是线性空间 X 上的两个等价范数. 则存在 $\alpha>0$ 和 $\beta>0$ 使得对所有 $x\in X$,

$$\alpha\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta\|x\|_1.$$

对 X 中序列 $\{x_n\}$ 和所有 $n,m\geqslant 1$,都有

$$\alpha\|x_n-x_m\|_1 \leqslant \|x_n-x_m\|_2 \leqslant \beta\|x_n-x_m\|_1. \tag{3}$$

(3)式中第二个不等式证明了若 $\{x_n\}$ 相对于 $\|\cdot\|_1$ 是柯西列,则它相对于 $\|\cdot\|_2$ 也是柯西列. (3)式中第一个不等式证明了若 $\{x_n\}$ 相对于 $\|\cdot\|_2$ 是柯西列,则它相对于 $\|\cdot\|_1$ 也是柯西列.

为了证明另一面,假设这两个范数不等价. 则或者(i)我们找不到 α 对所有 x 使得 $\alpha\|x\|_1\leqslant\|x\|_2$,或者(ii)找不到 β 使对所有 x 有 $\|x\|_2\leqslant\beta\|x\|_1$. 若情形(i)成立,对 $n=1,2,\cdots$,则存在 X 中的 x_n 使得

$$\frac{1}{n}\|x_n\|_1 > \|x_n\|_2.$$

令 $y_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\dfrac{1}{\|x_n\|_2}x_n$,则

$$\|y_n\|_2=\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0,$$

$$\|y_n\|_1=\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\|x_n\|_2}\|x_n\|_1>\sqrt{n}\to\infty.$$

所以 $\{y_n\}$ 相对于 $\|\cdot\|_2$ 是柯西列但是对 $\|\cdot\|_1$ 不是柯西列. 类似地,若情形(ii)成立,则存在序列 $\{z_n\}$ 相对于 $\|\cdot\|_1$ 是柯西列但相对 $\|\cdot\|_2$ 不是柯西列,这就完成了证明. ■

问题 1.3.6 设 X_1 和 X_2 是赋范空间 X 的子空间,X_1 是闭的,X_2 是有限维的. 证明 X_1+X_2 在 X 中是闭的. 再推出 X 的有限维子空间都是闭的.

解答 设 Y 在 X 中是闭的且

$$Z=Y+\{kx_0:k\in\mathbb{K}\}=\operatorname{span}\{Y,x_0\}.$$

下面我们将证 Z 在 X 中是闭的. 若 $x_0\in Y$,则 $Z=Y$ 为闭的. 设 $x_0\notin Y$,$c=d(x_0,Y)$,则因 Y 是闭的知 $c>0$. 若 $k\neq 0$,则对 $y\in Y$ 有

$$\|y+kx_0\| = \|k(x_0+\frac{1}{k}y)\| \geqslant |k|c.$$

当 $k=0$ 时,上式也成立. 设 $\{z_n\}$ 是 Z 中的序列且 $z_n\to z$,则 $z_n=y_n+k_nx_0$,$y_n\in Y$. 所以

$$\|z_n-z_m\| = \|(y_n-y_m)+(k_n-k_m)x_0\| \geqslant |k_n-k_m|c.$$

因为 $\{z_n\}$ 收敛,所以它是一个柯西列. 又因为 $c>0$,这就证明了 $\{k_n\}$ 是 $\mathbb{K}$ 中的柯西列. 所以 $\{k_n\}$ 收敛. 若 $k_n\to k$,则 $y_n=z_n-k_nx_0\to z-kx_0$. 因为 $y_n\in Y$ 及 Y 是闭的,所以 $z-kx_0\in Y$. 于是 $z=y+kx_0$,其中 $y=z-kx_0\in Y$. 故 $z\in Z$. 这就证明了 Z 是闭的.

若 $X_2=\operatorname{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,重复利用上面的结果只是把 Y 换为

$$X_1, X_1 + \mathrm{span}\{X_1\}, X_1 + \mathrm{span}\{x_1, x_2\}, \cdots.$$

这就证明了

$$X_1 + \mathrm{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} = X_1 + X_2$$

是闭的. 这就完成了第一部分的证明.

若 $X_1 = \{0\}$, 则 X_1 是闭的且 $X_1 + X_2 = X_2$. 所以若 X_2 是有限维的, 则它就是闭的. 这就完成了证明. ■

问题 1.3.7 设 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 是赋范空间 X 中的线性无关向量. 证明存在 $c>0$ 使得对所有常数 k_i 有

$$\| \sum_{i=1}^{n} k_i u_i \| \geqslant c \mid k_j \mid, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

解答 若 $n=1$, 取 $c = \| u_1 \|$ 即可. 若 $n>1$, 令

$$Y_i = \mathrm{span}\{u_1, \cdots, u_{i-1}, u_{i+1}, \cdots, u_n\},$$

$$c_i = d(u_i, Y_i), \quad c = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} c_i.$$

则 Y_i 是有限维的、闭的且 $u_i \notin Y_i$. 所以 $c_i>0$, 因此 $c>0$. 若 $k_j \neq 0$, 令

$$y_j = -\sum_{i \neq j} \left(\frac{k_i}{k_j}\right) u_i,$$

则 $y_j \in Y_j$, 所以

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} k_i u_i \right\| = \| k_j u_j - k_j y_j \| \geqslant | k_j | | c_j | \geqslant | k_j | c.$$

当 $k_j = 0$ 时, 上式也成立. 这就证明了结论. ■

问题 1.3.8 设 X 和 Y 都是赋范空间, X 是有限维空间, 证明从 X 到 Y 的线性映射都是连续的.

解答 首先证明若 f 是赋范空间 X 上的线性泛函且它的零空间 $Z(f)$ 在 X 中是闭的, 则 f 是连续的. 若 f 是不连续的, 则对 $n=1,2,\cdots$, 存在 X 中的 x_n 使得对所有 n 有 $\| x_n \| \leqslant 1$ 且 $| f(x_n) | > n$. 因此对任意 n 有 $f(x_n) \neq 0$. 令

$$z_n = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_n)} x_n.$$

则

$$f(z_n) = f(x_1) - \frac{f(x_1)}{f(x_n)} f(x_n) = 0,$$

$$\| z_n - x_1 \| = \left| \frac{f(x_1)}{f(x_n)} \right| \| x_n \| < \frac{| f(x_1) |}{n} \to 0.$$

所以 $z_n \in Z(f)$ 且 $z_n \to x_1$. 所以 $x_1 \in \overline{Z(f)}$. 但是因为 $f(x_1) \neq 0$, 所以 $x_1 \notin Z(f)$, 故若 f 是不连续的, 则 $Z(f)$ 不是闭的.

假设 X 是 n 维赋范空间, $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 是 X 的基. 对 $i=1,2,\cdots,n$, 令 $f_i : X \to \mathbb{K}$ 定义如下:

$$f_i\left(\sum_{j=1}^{n}k_jv_j\right)=k_i.$$

则每个 f_i 都是 X 上的线性泛函. 因为 $Z(f_i)\subset X$,所以 $Z(f_i)$是有限维的且是闭的. 所以每个 f_i 都连续.

设 $F:X\to Y$ 是线性的. 若

$$x=\sum_{j=1}^{n}k_jv_j,$$

则

$$|k_i|=|f_i(x)|\leqslant\|f_i\|\,\|x\|,$$

$$\|F(x)\|=\|\sum_{i=1}^{n}k_iF(v_i)\|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|k_i|\,\|F(v_i)\|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\|f_i\|\,\|x\|\,\|F(v_i)\|=\alpha\|x\|,$$

其中

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}\|f_i\|\,\|F(v_i)\|.$$

这就证明了 F 是连续的. ■

问题 1.3.9 证明有限维线性空间上的任意两个范数都是等价的.

解答 设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是有限维线性空间 X 上的两个范数. 设 X_1 表示 X 赋有范数 $\|\cdot\|_1$,X_2 表示 X 赋有范数 $\|\cdot\|_2$. 考虑 X 上的恒等映射 $I(x)=x$,它是线性的. 因为 X_1 是有限维的,所以由问题 1.3.8 知 $I:X_1\to X_2$ 是连续的. 所以存在 $\alpha>0$ 使得对所有 $x\in X_1$ 有 $\|Ix\|_2\leqslant\alpha\|x\|_1$,即

$$\|x\|_2\leqslant\alpha\|x\|_1,\quad x\in X. \tag{4}$$

类似地,因为 $I^{-1}=I$ 是从 X_2 到 X_1 的线性映射且是连续的,所以存在 $\beta>0$ 使得对所有 $x\in X_2$ 有 $\|Ix\|_1\leqslant\beta\|x\|_2$,即

$$\|x\|_1\leqslant\beta\|x\|_2,\quad x\in X.$$

联合(4)式,对所有 $x\in X$ 有

$$\frac{1}{\beta}\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant\alpha\|x\|_1.$$

这就证明了结论. ■

问题 1.3.10 若 X 是**无穷维**赋范空间,证明以下结论:

(a) 存在单的不连续的线性映射 $F:X\to X$.

(b) 存在 X 上不连续的线性泛函.

(c) 存在 X 的子空间,它不是闭的.

(d) 对任意的赋范空间 $Y\neq\{0\}$,存在不连续的线性映射 $F:X\to Y$.

解答 设 B 是 X 的基. 因为 B 是无穷集,所以能够从 B 中找到由不同元素组成的无穷

序列$\{u_n\}$.

(a) 设 $F(u_n)=nu_n$ 且对所有在 B 中但不属于$\{u_n\}$的 u, 令 $F(u)=u$. 通过

$$F(x)=\sum_i k_iF(v_i),\quad x=\sum_i k_iv_i, v_i\in B$$

延拓 F 到 X 上, 这就给出了线性映射 $F:X\to X$. 若它是连续的, 则对 X 中的 x 和某个常数 α 有 $\|F(x)\|\leqslant\alpha\|x\|$. 所以对所有 n 有

$$n\|u_n\|=\|F(u_n)\|\leqslant\alpha\|u_n\|.$$

而这对足够大的 n 是不可能的, 这就证明了 F 是不连续的.

为了证明 F 是单的, 令

$$F(x)=0,\quad x=\sum k_iv_i,\quad v_i\in B,\quad k_i\in\mathbb{K}.$$

则

$$\sum_i k_iF(v_i)=F(x)=0.$$

但是 $F(v_i)=\alpha_iv_i$, 其中若 $v_i=u_n$, $\alpha_i=n$; 其他 $\alpha_i=1$. 所以

$$\sum k_i\alpha_iv_i=0.$$

这就说明对所有 i 有 $k_i\alpha_i=0$; 因为任取 i 有 $\alpha_i\neq0$, 则 $k_i=0$. 所以若 $F(x)=0$, 则 $x=0$. 故 F 是单的.

(b) 定义 B 上的 f 如下:

$$f(u_n)=n\|u_n\|,$$
$$f(u)=1,\quad u\in B,\quad u\neq u_n;$$

通过

$$f(x)=\sum_i k_if(v_i),\quad x=\sum_i k_iv_i,\quad v_i\in B$$

延拓 f 到 X, 这就给出了 X 上的线性泛函 f. 因为对所有 n 有 $|f(u_n)|=n\|u_n\|$, 所以如上面一样, 易知它是不连续的.

(c) 从问题 1.3.8 的证明中得到: 若线性泛函 f 的零空间 $Z(f)$ 是闭的, 则 f 是连续的. 所以找到 X 上的线性泛函 f, 它是不连续的, 设 Z 是它的零空间, 则 Z 是不闭的. 由(b)知这样的 f 是存在的.

(d) 设 $y_0\in Y$, $y_0\neq0$. 定义 B 上的 F 如下:

$$F(u_n)=n\|u_n\|y_0,\quad F(u)=y_0,\quad u\in B,\quad u\neq u_n.$$

像(a)中一样延拓 F 到 X. 则 $F:X\to Y$ 是线性的但不连续, 原因与(a)中相同, 即对所有 n, 有

$$\|F(u_n)\|=n\|u_n\|\|y_0\|.$$

这就完成了证明. ■

问题 1.3.11 求 l^∞ 和 l^2 的不闭的子空间.

解答 易知 c_{00} 是 l^2 和 l^∞ 的子空间. 下面证明它在 l^2 和 l^∞ 中不闭. 令

$$x_n(j)=\begin{cases}\dfrac{1}{j}, & 1\leqslant j\leqslant n,\\ 0, & j>n,\end{cases}$$

$$x(j)=\frac{1}{j},\quad j\geqslant 1.$$

则对所有 n 有 $x_n\in c_{00}$ 且 $x\in l^2\subset l^\infty$. 因为

$$x-x_n=\left(0,\cdots,0,\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+2},\cdots\right),$$

所以当 $n\to\infty$ 时有

$$\|x-x_n\|_\infty=\frac{1}{n+1}\to 0,$$

$$\|x-x_n\|_2^2=\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j^2}\to 0.$$

所以在 l^2 和 l^∞ 中 $x_n\to x$. 故 x 属于 c_{00} 在 l^∞ 和 l^2 的闭包中. 但是 $x\notin c_{00}$, 因此 c_{00} 在 l^∞ 和 l^2 中不是闭的. ■

问题 1.3.12 设 X 和 Y 是赋范空间, Y 是有限维的, $F:X\to Y$ 是线性到上的. 证明 F 是开映射, 即 F 映 X 中的开子集为 Y 中的开子集, 再证明 F 是连续的当且仅当它的零空间 $Z(f)$ 在 X 中是闭的.

解答 设 Y 是 n 维的且 $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 是 Y 的基. 设 $v_i=F(u_i)$, $i=1,2,\cdots,n$. 定义 $G:Y\to X$ 如下:

$$G(y)=\sum_{i=1}^{n}k_iu_i,\quad y=\sum_{i=1}^{n}k_iv_i.$$

易知 G 是有定义的且为线性的. 由问题 1.3.8 知它是连续的. 易见 $G\neq 0$.

设 V 是 X 的开子集, $y_0\in F(V)$. 则 $y_0=F(x_0)$, 其中 $x_0\in V$. 因为 V 是开的, 所以存在 $r>0$ 使得

$$U(x_0,r)=\{x\in X:\|x-x_0\|<r\}\subset V.$$

设 $\delta=r/\|G\|$, $\|y-y_0\|<\delta$, 令

$$y=\sum_{i=1}^{n}k_iv_i,\quad y_0=\sum_{i=1}^{n}\alpha_iv_i;$$

$$x=G(y),\quad x_1=G(y_0);$$

则

$$x=\sum_{i=1}^{n}k_iu_i,\quad x_1=\sum_{i=1}^{n}\alpha_iu_i;\quad F(x)=y,\quad F(x_1)=y_0.$$

则 $x-x_1=G(y-y_0)$ 且

$$\|x-x_1\|=\|G(y-y_0)\|\leqslant\|G\|\,\|y-y_0\|<\|G\|\delta=r.$$

这就证明了 $x-x_1+x_0\in U(x_0,r)\subset V$. 由于

$$F(x-x_1+x_0)=F(x)-F(x_1)+F(x_0)=y,$$

所以只要 $\|y-y_0\|<\delta$,就有 $y\in F(V)$. 这就证明了 y_0 是 $F(V)$的内点. 所以只要 V 在 X 中是开的,则 $F(V)$就是开的.

若 F 是连续的,则由于$\{0\}$在 Y 中是闭的,知 $Z(F)=F^{-1}\{0\}$是闭的. 反过来,设 $Z=Z(F)$在 X 中是闭的. 令

$$\widetilde{F}(x+Z)=F(x),\quad x\in X.$$

因 F 是到上的,则上面就定义了线性的双射$\widetilde{F}:X/Z\to Y$. 因此 X/Z 是 n 维的. 又因为 Z 是闭的,所以 X/Z 在商范数下是赋范空间. 因为 X/Z 是有限维的,所以由问题 1.3.8 知$\widetilde{F}$是连续的. 因为 $\|x+Z\|\leqslant\|x\|$,所以

$$\|F(x)\|=\|\widetilde{F}(x+Z)\|\leqslant\|\widetilde{F}\|\,\|x+Z\|\leqslant\|\widetilde{F}\|\,\|x\|.$$

这就证明了 F 是连续的. ■

问题 1.3.13 设 E 是赋范空间 X 的子集,证明若 $\mathrm{span}E\neq X$,则 E 的内部 E^0 是空的. 再证明若 X 是$\mathbb{R}$ 上的有限维赋范空间,E 是 X 的凸子集且 $0\in E$,则 $\mathrm{span}E=X$ 当且仅当 E^0 是非空的.

解答 设 $\mathrm{span}E=Y$ 且 a 是 E 的内点,则存在 $r>0$ 使得

$$\{x\in X:\|x-a\|<r\}\subset E\subset Y.$$

设 $x\in X$ 且 $x\neq 0$. 如在问题 1.1.2 的解答中那样,我们有

$$y=a+\frac{r}{2\|x\|}x\in Y,$$

所以 $x\in Y$. 故若 E^0 是非空的,则有 $Y=X$. 这就证明了第一部分.

为了证明第二部分,设 X 是实的 n 维赋范空间,E 是 X 的凸子集且 $0\in E$. 若 $E^0\neq\varnothing$,则由已证的第一部分有 $\mathrm{span}E=X$. 反过来,设 $\mathrm{span}E=X$. 则 E 包含 n 个线性无关元素 u_1,$u_2,\cdots,u_n$.

若 $t_i\geqslant 0$ 且 $t_1+t_2+\cdots+t_n\leqslant 1$,则因 E 是凸的且 $0\in E$,则有

$$\sum_{i=1}^{n}t_iu_i=t_1u_1+\cdots+t_nu_n+\Big(1-\sum t_i\Big)\cdot 0\in E.$$

因此,若

$$a=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}u_i,$$

则 $a\in E$. 由问题 1.3.7 知,存在 $c>0$ 使得

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n}k_iu_i\Big\|\geqslant c\,|k_j|,\quad 1\leqslant j\leqslant n,\quad k_i\in\mathbb{R}.$$

令 $\delta=c/2n$ 且 $\|x-a\|<\delta$. 若 $x=\sum k_iu_i$,则对 $1\leqslant j\leqslant n$ 有

$$\| x-a \| = \| \sum_{i=1}^{n}(k_i-\frac{1}{2n})u_i \| \geqslant c \mid k_j-\frac{1}{2n} \mid .$$

所以对 $1\leqslant j\leqslant n$ 有

$$c \mid k_j-\frac{1}{2n} \mid \leqslant \| x-a \| < \frac{c}{2n},$$

$$\mid k_j-\frac{1}{2n} \mid < \frac{1}{2n}.$$

因为 $k_j\in\mathbb{R}$，所以对 $1\leqslant j\leqslant n$ 有 $0<k_j<\frac{1}{n}$. 所以 $\sum k_i<1$ 且 $x\in E$. 我们证明了只要 $\| x-a \|<\delta$，这就是对的，即 $a\in E^0$. 所以若 $\mathrm{span}E=X$，则 E^0 是非空的. 这就证明了结论. ■

问题 1.3.14 设 $\{Y_n\}$ 是 X 的闭子空间组成的序列使得对 $n=1,2,\cdots,Y_n\subset Y_{n+1}$ 且 $Y_n\neq Y_{n+1}$. 证明存在 X 中序列 $\{y_n\}$，使得对所有 n 有 $y_n\in Y_n$，$\| y_n \|=1$ 且 $d(y_{n+1},Y_n)\geqslant\frac{1}{2}$.

解答 对闭子空间 Y_{n+1} 的子空间 Y_n 运用 Riesz 引理且取 $r=\frac{1}{2}$，则存在 $y_{n+1}\in Y_{n+1}$ 使得 $\| y_{n+1} \|=1$ 且 $d(y_{n+1},Y_n)\geqslant\frac{1}{2}$. 这就证明了结论. ■

问题 1.3.15 若赋范空间 X 中的球

$$U(0,r)=\{x\in X:\| x \|<r\},\quad r>0$$

是完全有界的，证明 X 是有限维的.

解答 若 $U(0,r)$ 是完全有界的，$r>0$，则存在有限个开球 $U\left(x_i,\frac{r}{4}\right)$，$i=1,2,\cdots,n$，它们的并包含 $U(0,r)$. 设 $Y=\mathrm{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，则 Y 是有限维的，因此 Y 为闭的. 若 $Y\neq X$，则由 Riesz 引理，存在 X 中 x_0 使得 $\| x_0 \|=1$ 且 $d(x_0,Y)\geqslant\frac{3}{4}$. 因 $rx_0/2\in U(0,r)$，故存在某个 i，使得 $rx_0/2\in U(x_i,r/4)$. 因此有

$$\| \frac{r}{2}x_0-x_i \| < \frac{r}{4},$$

即 $\| x_0-2x_i/r \|<\frac{1}{2}$. 因为 $d(x_0,Y)\geqslant\frac{3}{4}$，$2x_i/r\in Y$，所以这是不可能的. 这就证明了 $Y=X$，也就证明了结论. ■

问题 1.3.16 证明任意两个有相同维数的有限维赋范空间是线性同胚. 再此推出下述结论：

(a) 有限维空间的闭有界子集是紧的.

(b) 赋范空间是有限维的当且仅当它是局部紧的.

解答 设 X 和 Y 是 n 维赋范空间，分别有基 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 和 $\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$. 令

$$F(x_i) = y_i, \quad i = 1,2,\cdots,n;$$

则可以得到线性映射 $F:X\to Y$. 事实上,F 由下式给出:

$$F\Big(\sum_{i=1}^{n} k_i x_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} k_i y_i, \quad k_i \in \mathbb{K}.$$

这个映射当然是双射,由问题 1.3.8 知它是连续的. 所以 $F:X\to Y$ 是满的线性同胚. 这就证明了第一部分.

(a) 设 X 是 n 维赋范空间,S 是 X 的有界闭子集. 设 $Y=\mathbb{K}^n$ 赋有欧氏范数 $\|\cdot\|_2$. 则存在线性同胚 $F:X\to Y$. 设 $F(S)=T$. 因为 F^{-1} 是连续的且 S 是闭的,所以 T 是闭的. 因为 S 是有界的,F 是有界线性映射,则 T 是有界的. 由 Heine-Borel 定理知 T 是紧的. 因为 F^{-1} 是连续的,所以 $S=F^{-1}(T)$ 是紧的.

(b) 设 X 是有限维赋范空间,$x_0\in X$. 由(a)知

$$S = \{x \in X: \|x - x_0\| \leqslant 1\}$$

是 x_0 的紧邻域. 这就证明了 X 是局部紧的.

反过来,设 X 是局部紧赋范空间,则 X 有一个紧集 E 使得 0 为 E 的内点. 此时,E 是完全有界的. 进而存在 $r>0$ 使得若

$$U(0,r) = \{x \in X: \|x\| < r\},$$

则 $U(0,r)\subset E$. 所以 $U(0,r)$ 是完全有界的,由问题 1.3.15 知 X 是有限维的,这就完成了证明. ■

问题 1.3.17 设 Y 是赋范空间 X 的有限维真子空间. 证明在 X 中存在 x_1 使得 $\|x_1\| = 1$ 且 $d(x_1,Y)=1$,即 Riesz 引理在 $r=1$ 时成立.

解答 设 $x\in X$ 且 $x\notin Y$. 令

$$d = d(x,Y) = \inf\{\|x - y\|: y \in Y\}.$$

设 $r=\|x\|+d+1$,

$$S = \{y \in Y: \|y\| \leqslant r\},$$

则 S 是有限维空间 Y 的有界闭子集. 所以 S 是紧的. 由下式定义的函数 ϕ

$$\phi(y) = \|y - x\|, \quad y \in Y$$

在 Y 上是实值连续的,所以存在 $y_0\in S$ 使得对所有 S 中的 y 有 $\phi(y_0)\leqslant\phi(y)$. 由 d 的定义知存在 $y_1\in Y$ 使得 $\|x-y_1\|<d+1$,则

$$\|y_1\| \leqslant \|y_1 - x\| + \|x\| < d + 1 + \|x\| = r.$$

所以 $y_1\in S$,因此

$$\phi(y_0) \leqslant \phi(y_1) = \|y_1 - x\| < d + 1. \tag{5}$$

设 $y\in Y$. 若 $y\notin S$,则

$$\|x\| + d + 1 = r < \|y\| \leqslant \|y - x\| + \|x\|.$$

联合(5)式得到

$$\phi(y_0) < d + 1 < \|y - x\|.$$

另一方面，若 $y\in S$，则

$$\phi(y_0)\leqslant\phi(y)=\|y-x\|.$$

所以对所有 $y\in Y$ 有

$$\|y_0-x\|=\phi(y_0)\leqslant\|y-x\|.$$

因此

$$\|x-y_0\|=\inf\{\|x-y\|:y\in Y\}=d.$$

若 $d=0$，则 $x=y_0\in Y$. 这是不成立的，所以必有 $d>0$. 令

$$x_1=\frac{1}{d}(x-y_0),$$

则 $\|x_1\|=1$，且对所有 $y\in Y$，因为 $z=y_0+dy\in Y$，所以有

$$\|x_1-y\|=\left\|\frac{1}{d}(x-z)\right\|\geqslant 1.$$

又因为 $\|x_1-0\|=1$ 及 $0\in Y$，所以上式说明 $d(x_1,Y)=1$. 这就完成了证明. ■

问题 1.3.18 设 $1\leqslant p<\infty$ 且

$$E=\{x\in l^p:|x(n)|\leqslant n^{-2/p},n\geqslant 1\}.$$

证明：

(a) E 是 l^p 的紧凸子集.

(b) E 不包含在 l^p 的某个有限维子空间中.

(c) E 的内部 E^0 是空的.

[若 $p=2$，E 叫做 Hilbert 立方体.]

解答 (a) 若 $x,y\in E$，$0<t<1$，令 $z=tx+(1-t)y$，则

$$z(n)=tx(n)+(1-t)y(n),$$

$$|z(n)|\leqslant t|x(n)|+(1-t)|y(n)|\leqslant tn^{-2/p}+(1-t)n^{-2/p}=n^{-2/p}.$$

这就证明了 $z\in E$. 所以 E 是凸的.

为了证明 E 是紧的，只要证明 E 是完备距离空间且 E 是完全有界的.

首先令 $x_n\in E$ 且在 l^p 中 $x_n\to x$. 则

$$|x_n(j)-x(j)|^p\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}|x_n(j)-x(j)|^p=\|x_n-x\|_p^p,$$

$$|x(j)|\leqslant|x(j)-x_n(j)|+|x_n(j)|\leqslant\|x_n-x\|_p+j^{-2/p}.$$

令 $n\to\infty$，对所有 $j\geqslant 1$ 有 $|x(j)|\leqslant j^{-2/p}$. 所以 $x\in E$. 就证明了 E 在 l^p 中是闭的，但是 l^p 是完备的(见后面问题 2.1.7). 所以 E 是完备的.

为了证明 E 是完全有界的，给定 $\varepsilon>0$，取 N 使得

$$\sum_{j=N+1}^{\infty}\frac{1}{j^2}<\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p.$$

固定这个 N，令

$$Y = \operatorname{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_N\} = \{x \in l^p : x(j) = 0, j > N\},$$

则 Y 是 l^p 的有限维子空间. 所以 Y 在 l^p 中是闭的. 若 $x \in E$，则

$$\| x \|_p^p = \sum_{j=1}^{\infty} | x(j) |^p \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2},$$

所以 E 是有界的. 故 $E \cap Y$ 既是闭的又是有界的，则是紧的. 所以存在 $E \cap Y$ 中的有限个点 y_1，$y_2, \cdots, y_m$ 使得开球 $U\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right), 1 \leqslant i \leqslant m$，可以覆盖 $E \cap Y$. 设 x 是 E 的任一个元素. 当 $1 \leqslant j \leqslant N$ 时，令 $y(j) = x(j)$；当 $j > N$ 时，令 $y(j) = 0$. 则 $y \in E \cap Y$，所以存在某个 i 使得 $y \in U\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. 由于

$$\| x - y \|_p^p = \sum_{j=N+1}^{\infty} | x(j) |^p < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p,$$

所以

$$\| x - y_i \|_p \leqslant \| x - y \|_p + \| y - y_i \|_p < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

所以开球 $U(y_i, \varepsilon)(1 \leqslant i \leqslant m)$ 覆盖了 E. 这就证明了 E 是完全有界的.

(b) 设 $x_n = n^{-2/p} e_n$，其中 e_n 是 l^p 的第 n 个单位向量. 则 $x_n \in E$. 设 $k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_n x_n = 0$，则

$$\sum_{j=1}^{n} k_j j^{-2/p} e_j = 0,$$

故 $k_j j^{-2/p} = 0$，从而 $k_j = 0$. 这就证明了 E 包含了无穷多个线性无关的元素 $x_1, x_2, \cdots$. 所以没有有限维空间能包含 E.

(c) 假设 E 有内点 a，则 E 包含某个开球 $U(a, \varepsilon)$，其中 $\varepsilon > 0$. 取 N 使得

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} j^{-3/2} < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p.$$

当 $1 \leqslant j \leqslant N$ 时，令 $x(j) = a(j)$；当 $j > N$ 时，令 $x(j) = j^{-3/2p}$. 因为若 $j > 1$，则有 $j^{-3/2p} > j^{-2/p}$，所以有 $x \notin E$. 对 $j > N$ 有

$$| x(j) - a(j) | \leqslant | x(j) | + | a(j) | \leqslant j^{-3/2p} + j^{-2/p} < 2j^{-3/2p}.$$

所以

$$\| x - a \|_p^p = \sum_{j=N+1}^{\infty} | x(j) - a(j) |^p < \sum_{j=N+1}^{\infty} 2^p j^{-3/2} < \varepsilon^p.$$

于是 $\| x - a \|_p < \varepsilon$；故 $x \in U(a, \varepsilon) \subset E$. 这就产生了矛盾. 所以 E^0 是空集. 这就完成了证明. ■

问题 1.3.19 设 $X = \{x \in C[0,1] : x(0) = 0\}$，$Y = \left\{x \in X : \int_0^1 x(t)\, dt = 0\right\}$. 证明 Y 是 X 的真闭子空间，且在 X 中没有 x_1 使得 $\| x_1 \| = 1$，$d(x_1, Y) = 1$，即在这种情形下，$r = 1$ 时的

Riesz 引理不成立.

解答 设

$$f(x)=\int_0^1 x(t)\mathrm{d}t,\quad x\in X,$$

则 f 是 X 上的线性泛函,且

$$|f(x)|\leqslant\int_0^1|x(t)|\mathrm{d}t\leqslant\|x\|_\infty.$$

所以 f 是连续的且 $\|f\|\leqslant 1$. 因此 $Y=\{x\in X:f(x)=0\}$ 是 X 的闭子空间. 因为由 $x(t)=t$, $0\leqslant t\leqslant 1$,定义的 x 在 X 中但不在 Y 中,所以它是真子空间.

为了证明第二部分. 考虑 X 中任一个点 x_1, $\|x_1\|=1$. 下面将证明 $d(x_1,Y)<1$. 因为 $x_1(0)=0$,所以由 x_1 的连续性,则存在 $\delta>0$ 使得

$$|x_1(t)|<\frac{1}{2},\quad 0\leqslant t<\delta.$$

因为 X 上的范数是上确界范数 $\|\cdot\|_\infty$,所以对所有 t 有 $|x_1(t)|\leqslant\|x_1\|_\infty=1$. 因此

$$|f(x_1)|\leqslant\int_0^1|x_1(t)|\mathrm{d}t=\int_0^\delta|x_1(t)|\mathrm{d}t+\int_\delta^1|x_1(t)|\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{2}\delta+1-\delta.$$

因而 $|f(x_1)|<1$. 下面首先在 X 中找 x_2 使得 $f(x_2)=|f(x_1)|$ 且 $\|x_2\|_\infty<1$. 令 $c=|f(x_1)|$,则有 $c<1$. 若 $c<\frac{1}{2}$,对 $0\leqslant t\leqslant 1$,取 $x_2(t)=2ct$,则

$$f(x_2)=\int_0^1 x_2(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 2ct\,\mathrm{d}t=c,$$

且 $\|x_2\|_\infty=2c<1$. 下面设 $\frac{1}{2}\leqslant c<1$. 若 $r=2(1-c)/(1+c)$,则 $0<r<1$. 令

$$x_2(t)=\begin{cases}(c+1)/(2r)t, & 0\leqslant t\leqslant r,\\ (c+1)/2, & r<t\leqslant 1,\end{cases}$$

则 x_2 是连续的且 $x_2(0)=0$,故有 $x_2\in X$. 我们有,

$$f(x_2)=\int_0^1 x_2(t)\mathrm{d}t=\int_0^r\frac{c+1}{2r}t\,\mathrm{d}t+\int_r^1\frac{c+1}{2}\mathrm{d}t=c.$$

对 $0\leqslant t\leqslant 1$ 有 $|x_2(t)|\leqslant(c+1)/2$,因此 $\|x_2\|_\infty\leqslant(c+1)/2<1$.

由找到的 x_2,令 $y_1=x_1-kx_2$,其中 $k=f(x_1)/c$. 则 $y_1\in X$ 且

$$f(y_1)=f(x_1)-kf(x_2)=f(x_1)-kc=0.$$

所以 $y_1\in Y$ 且

$$d(x_1,Y)\leqslant d(x_1,y_1)=\|x_1-y_1\|_\infty=\|kx_2\|_\infty.$$

因为 $|k|=|f(x_1)|/c=1$,所以有 $d(x_1,Y)\leqslant\|x_2\|_\infty<1$. 这就完成了证明. ■

1.4 Hahn-Banach 定理

Hahn-Banach 定理是关于具有预先设定性质的有界线性泛函存在性的结论.

Hahn-Banach 分离定理给出：若 E_1 和 E_2 是赋范线性空间 X 的两个不交的非空凸子集且 E_1 是开的，则存在 X 上的有界线性泛函 f 和实数 α 使得对所有 E_1 中的 x_1 和 E_2 中的 x_2 有

$$\mathrm{Re}f(x_1) < \alpha \leqslant \mathrm{Re}f(x_2).$$

Hahn-Banach 延拓定理：设 Y 是赋范线性空间 X 的子空间，$g \in Y'$，其中 Y' 是 Y 的对偶空间，则存在 $f \in X'$（X' 是 X 的对偶空间），使得 f 是 g 的延拓且 $\| f \| = \| g \|$.

上面所说的延拓不是唯一的. Taylor-Foguel 定理指出保范延拓 $g \in Y'$ 到 $f \in X'$ 是唯一的当且仅当 X' 是严格凸的. 称赋范空间 X 是严格凸的，若当 $x, y \in X$，$\| x \| = \| y \| = 1$ 且 $x \neq y$ 时，有 $\| (x+y)/2 \| < 1$.

设 X 是数域 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 上的赋范空间，$f \in X'$，$u = \mathrm{Re}f$，$v = \mathrm{Im}f$. 则 u 和 v 是相应实线性空间 $(X, \mathbb{R})$ 上的实线性泛函且有

$$v(x) = -u(\mathrm{i}x), \quad \| u \| = \| f \| = \| v \|.$$

设 E 是赋范空间 X 的子集，b 是 E 的边界点. 若 f 是非零泛函使得对所有 $x \in E$ 有

$$\mathrm{Re}f(x) \leqslant \mathrm{Re}f(b),$$

则称 f 为 E 在 b 点的支撑泛函. 实超平面

$$H = \{x : \mathrm{Re}f(x) = \mathrm{Re}f(b)\} = \{b + x : \mathrm{Re}f(x) = 0\},$$

称为 b 点 E 的支撑超平面.

练习

1. 设 X 是复的赋范空间，$f \in X'$，$u = \mathrm{Re}f$，$v = \mathrm{Im}f$. 证明：

(a) u 和 v 是相应的实线性空间上的实线性泛函.

(b) 对所有 $x \in X$ 有 $v(x) = -u(\mathrm{i}x)$.

(c) $\| u \| = \| f \| = \| v \|$.

2. 证明赋有范数 $\| \cdot \|_1$ 的 $\mathbb{R}^2$ 不是严格凸的.

3. 证明赋有范数 $\| \cdot \|_\infty$ 的 $\mathbb{R}^2$ 不是严格凸的.

4. 设 ϕ 和 α 都是实数，证明对所有 $\theta \in \mathbb{R}$

$$\cos(\theta - \phi) \leqslant \cos(\alpha - \phi)$$

当且仅当存在某个整数 n 使得 $\phi - \alpha = 2n\pi$. [提示：利用 $\theta = \phi$ 时的不等式.]

5. 设 $X = \mathbb{R}^2$ 且赋有范数 $\| \cdot \|_2$，$E = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : \| \boldsymbol{x} \| = 1\}$ 是单位圆周，$\boldsymbol{b} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$.

若 X' 中的非零泛函 f 是 $\boldsymbol{b}$ 处 E 的支撑泛函，证明 $f(1,0)=r\cos\alpha, f(0,1)=r\sin\alpha, r>0$. 再证明 $\boldsymbol{b}$ 处 E 的支撑超平面是

$$H=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2: x(1)\cos\alpha+x(2)\sin\alpha=1\},$$

且它和 E 在 $\boldsymbol{b}$ 点相切.

[提示：设 $f(1,0)=r\cos\phi, f(0,1)=r\sin\phi$，其中 $r>0$. 若对所有 $\boldsymbol{x}\in E, f(\boldsymbol{x})\leqslant f(\boldsymbol{b})$，则对所有 $\theta\in\mathbb{R}$，

$$r\cos\theta\cos\phi+r\sin\theta\sin\phi\leqslant r\cos\alpha\cos\phi+r\sin\alpha\sin\phi.$$

利用上面问题的结论.]

问题

问题 1.4.1 设 Y 是赋范空间 X 的子空间. 证明：若 $a\in X, a\notin\overline{Y}$，则存在 $f\in X'$ 使得 f 在 Y 上恒为 0，$f(a)=d(a,Y)$ 且 $\|f\|=1$.

解答 设 $\lambda=d(a,Y)$，则因 $a\notin\overline{Y}$ 有 $\lambda>0$. 令

$$Z=\operatorname{span}\{Y,a\}=\{y+ka: y\in Y, k\in\mathbb{K}\}.$$

若 $y+ka=y_1+k_1a$，其中 $y,y_1\in Y, k,k_1\in\mathbb{K}$，则 $(k-k_1)a=y_1-y\in Y$. 因为 $a\notin Y$，所以有 $k_1=k$. 定义 $g: Z\to\mathbb{K}$ 如下：

$$g(y+ka)=k\lambda,\quad y\in Y,\quad k\in\mathbb{K}.$$

则 g 是线性的，$g(a)=\lambda$ 且对所有 $y\in Y$ 有 $g(y)=0$. 若 $k\neq0$，则

$$\|y+ka\|=|k|\left\|a+\frac{1}{k}y\right\|\geqslant|k|\lambda,$$

$$|g(y+ka)|=|k|\lambda\leqslant\|y+ka\|.$$

当 $k=0$ 时，上面的结论也成立. 这就得到 $g\in Z'$ 且 $\|g\|\leqslant1$.

另一方面，存在 Y 中的序列 $\{y_n\}$ 使得 $\|a-y_n\|\to\lambda$. 因为 $g(a-y_n)=g(a)=\lambda$，所以有

$$\lambda=|g(a-y_n)|\leqslant\|g\|\,\|a-y_n\|\to\|g\|\lambda,$$

因此得证 $1\leqslant\|g\|$，故 $\|g\|=1$. 由 Hahn-Banach 延拓定理，存在 $f\in X'$ 使得 $\|f\|=\|g\|=1, f|_Z=g$. 所以

$$f(a)=g(a)=\lambda=d(a,Y),$$

$$f(y)=g(y)=0,\quad y\in Y.$$

这就完成了证明. ■

问题 1.4.2 证明若 a 是赋范空间 X 的非零元，则存在 X 的有界线性泛函 f 使得

$$f(a)=\|a\|,\quad \|f\|=1.$$

解答 设 $a\in X, a\neq0, Y=\{0\}$，则 Y 是 X 的子空间，$\overline{Y}=Y, a\notin\overline{Y}$ 且 $d(a,Y)=\|a\|$. 由问题 1.4.1 知，存在 $f\in X'$，使得

$$f(a)=d(a,Y)=\|a\|,\quad \|f\|=1.$$ ■

问题 1.4.3 设 E 是赋范空间 X 的子集，$Y=\operatorname{span}E$，$a\in X$. 证明 $a\in\overline{Y}$ 当且仅当对所有在 E 上恒为 0 的 $f\in X'$ 有 $f(a)=0$.

解答 设 $a\in\overline{Y}$，$f\in X'$ 且 f 在 E 上为 0，则 f 的零空间 $Z(f)$ 包含 E. 但是 $Z(f)$ 是 X 的闭子空间，所以 $\overline{Y}\subset Z(f)$. 故 f 在 $\overline{Y}$ 是 0，从而 $f(a)=0$.

为了证明另一面，设 $a\notin\overline{Y}$. 则由问题 1.4.1 知存在 $f\in X'$ 使得

$$Y\subset Z(f),\quad f(a)=d(a,Y),\quad \|f\|=1.$$

但因 $a\notin\overline{Y}$，故有 $d(a,Y)\neq 0$. 所以存在 $f\in X'$ 使得

$$E\subset Y\subset Z(f),\quad f(a)\neq 0.$$

这就完成了证明. ■

问题 1.4.4 设 x 是赋范空间 $X\neq\{0\}$ 的任一个元，证明

$$\|x\|=\sup\{|f(x)|:f\in X',\|f\|=1\}.$$

由此推出若对所有 X' 中的 f 有 $f(x)=0$，则 $x=0$.

解答 设 $a\in X$，$a\neq 0$. 由问题 1.4.2 知，存在 X' 中的 f 使得 $f(a)=\|a\|$ 且 $\|f\|=1$. 所以 X' 包含元素 f 且 $\|f\|=1$，集合

$$S=\{|f(x)|:f\in X',\|f\|=1\}$$

是非空的. 若 $x=0$，则 S 仅包含 0，且 $\sup S=0=\|x\|$.

设 $x\neq 0$，则存在 $f\in X'$ 使得 $f(x)=\|x\|$ 且 $\|f\|=1$. 这就证明了 S 包含 $\|x\|$. 另一方面，若 $f\in X'$ 且 $\|f\|=1$，则

$$|f(x)|\leqslant\|f\|\,\|x\|=\|x\|.$$

这就证明了 $\|x\|$ 是 S 的上界. 所以 $\sup S=\|x\|$.

若对所有 X' 中的 f 都有 $f(x)=0$，则 S 仅包含 0. 这种情形，$\|x\|=\sup S=0$，所以 $x=0$. ■

问题 1.4.5 设 Y 是赋范空间 X 的子空间，$g\in Y'$ 且 $f\in X'$ 是 g 的 Hahn-Banach 延拓. 证明：

(a) 对每个 $a\notin\overline{Y}$，存在 $h_a\in X'$ 使得 h_a 在 Y 上是 0 且 $h_a(a)\neq 0$.

(b) $f+h_a$ 是 g 到 X 上的连续线性延拓，即使它可能没有和 g 相同的范数.

解答 (a) 若 $a\notin\overline{Y}$，则由问题 1.4.1 知，存在 $h_a\in X'$ 使得对所有 Y 中的 y 有 $h_a(y)=0$，且 $h_a(a)=d(a,Y)\neq 0$.

(b) 因为对 $y\in Y$ 有

$$(f+h_a)(y)=f(y)+0=g(y),$$

所以 $f+h_a$ 是 g 的延拓. 它当然是线性连续的. (a)中所述的 h_a 的特性被 $h=kh_a$ 保持，其中 $k\in\mathbb{K}$ 任意非零. 若在这种情形，$\|f+h\|=\|g\|$，就必须有

$$\|kh_a\|=\|h\|\leqslant\|h+f\|+\|-f\|=\|g\|+\|g\|.$$

所以 $|k|\,\|h_a\|\leqslant 2\|g\|$. 但对足够大的 k 这是不成立的，所以可以挑选 h_a，使得 $\|f+h_a\|\neq\|g\|$. 这就完成了证明. ■

问题 1.4.6 若 T 是非空集合，X 是由 T 上所有有界复值函数 x 且赋有上确界范数 $\|\cdot\|_\infty$ 组成的复赋范线性空间. 设 $t\in T$，

$$H=\{x\in X: x(t)\in\mathbb{R}\}.$$

证明：

(a) H 在相应的实线性空间$(X,\mathbb{R})$上是一个实超平面.

(b) $H\cap \mathrm{i}H=\{x\in X: x(t)=0\}$.

解答 (a) 若 $x,y\in H,\alpha\in\mathbb{R}$，则

$$(x+y)(t)=x(t)+y(t),$$
$$(\alpha x)(t)=\alpha x(t),$$

都是实的. 所以 $x+y\in H,\alpha x\in H$. 若对所有 $s\in T, x_0(s)=\mathrm{i}$，则 $x_0\in X$，但 $x_0\notin H$. 这就证明了 H 是相应实线性空间$(X,\mathbb{R})$的真子空间.

为了证明 H 是极大的，设 H_1 是$(X,\mathbb{R})$的子空间且 $H\subset H_1\subset X, H\neq H_1$. 设 $x_1\in H_1$，$x_1\notin H$，则

$$x_1(t)=\alpha_1+\mathrm{i}\beta_1,\quad \beta_1\neq 0.$$

设 x 是 X 的任一个元素，$x(t)=\alpha+\mathrm{i}\beta$，则

$$(\beta_1 x-\beta x_1)(t)=\beta_1(\alpha+\mathrm{i}\beta)-\beta(\alpha_1+\mathrm{i}\beta_1)\in\mathbb{R}.$$

这就证明了 $y=\beta_1 x-\beta x_1\in H\subset H_1$，所以

$$x=\beta_1^{-1}(y+\beta x_1)\in H_1.$$

因为以上结论对任意 $x\in X$ 都成立，所以有 $H_1=X$. 因此 H 是一个超平面.

(b) 设 $x\in H\cap \mathrm{i}H$，则 $x\in H, x=\mathrm{i}y, y\in H$. 所以 $x(t),y(t)\in\mathbb{R}$，且

$$(1+\mathrm{i})x(t)=x(t)-y(t)\in\mathbb{R}.$$

这就说明 $x(t)=0$. 另一方面，若 $x(t)=0$，则 $x\in H$，

$$-\mathrm{i}x(t)=0\in\mathbb{R},\quad -\mathrm{i}x\in H,\quad x\in \mathrm{i}H,$$

所以 $x\in H\cap \mathrm{i}H$. 这就完成了证明. ■

问题 1.4.7 设 E_1 和 E_2 是赋范空间 X 的不交非空凸子集，其中 E_1 是紧的，E_2 是闭的. 证明：存在 X' 中的 f 和实数 α_1,α_2，使得对所有 E_1 中的 x_1 和 E_2 中的 x_2 有

$$\mathrm{Re}f(x_1)<\alpha_1<\alpha_2<\mathrm{Re}f(x_2).$$

解答 由问题 1.1.5 知，存在 $r>0$ 使得

$$(E_1+U(0,r))\cap E_2=\varnothing.$$

设 $E_3=E_1+U(0,r)$，则由问题 1.1.4(a)知 E_3 是开的. 设 $z_1,z_2\in E_3, 0\leqslant t\leqslant 1$，则

$$z_i=x_i+y_i,\quad x_i\in E_i,\quad y_i\in U(0,r),\quad i=1,2,$$

所以 $tz_1+(1-t)z_2=x+y$，其中

$$x=tx_1+(1-t)x_2,\quad y=ty_1+(1-t)y_2.$$

因为 E_1 是凸的，且

$$\|y\|\leqslant t\|y_1\|+(1-t)\|y_2\|<tr+(1-t)r=r,$$

我们得到 $x\in E_1, y\in U(0,r)$，所以 $x+y\in E_3$. 这就证明了 E_3 是凸的.

所以 E_3, E_2 是 X 的不交非空凸子集，且 E_3 是开的. 由 Hahn-Banach 分离定理，存在 X' 中的 f 和 $\mathbb{R}$ 中的 α，使得对 E_3 中所有 x_3，E_2 中的 x_2 有

$$\mathrm{Re}f(x_3) < \alpha \leqslant \mathrm{Re}f(x_2).$$

设 $u=\mathrm{Re}f, x_2\in E_2, x_3\in E_3$，则 $u(x_3)<u(x_2)$，

$$y_1 = \varepsilon(x_2 - x_3) \in U(0,r), \quad \varepsilon > 0,$$

其中 ε 非常小. 故 $u(y_1)>0$. 设

$$\alpha_1 = \alpha - u(y_1), \quad \alpha_2 = \alpha - \frac{1}{2}u(y_1).$$

若 $x_1\in E_1, x_2\in E_2$，则 $x_1+y_1\in E_3$，

$$u(x_1 + y_1) < \alpha \leqslant u(x_2),$$

$$u(x_1) + u(y_1) < \alpha = \alpha_1 + u(y_1).$$

且 $u(x_2)\geqslant\alpha>\alpha_2$. 所以对所有 $x_1\in E_1, x_2\in E_2$ 有 $u(x_1)<\alpha_1<\alpha_2<u(x_2)$. ■

问题 1.4.8 设 X 是实线性空间. 对 X 中所有 x, y 和 $r\geqslant 0$，$p: X\to\mathbb{R}$ 满足

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y), \quad p(rx) = rp(x).$$

设 Y 是 X 的子空间，$g: Y\to\mathbb{R}$ 是线性映射使得对所有 $y\in Y$ 有

$$g(y) \leqslant p(y).$$

设

$$a \in X, \quad a \notin Y, \quad Z = \mathrm{span}\{Y, a\},$$

$$\alpha = \sup\{g(y) - p(y-a) : y \in Y\},$$

$$h(y+ta) = g(y) + t\alpha, \quad y \in Y, \quad t \in \mathbb{R}.$$

证明这就定义了线性映射 $h: Z\to\mathbb{R}$ 使得

$$h|_Y = g \text{ 且对所有 } z \in Z \text{ 有 } h(z) \leqslant p(z).$$

解答 对 Y 中所有 x, y，

$$\begin{aligned} g(x) + g(y) &= g(x+y) \leqslant p(x+y) \\ &= p(x+a+y-a) \leqslant p(x+a) + p(y-a); \end{aligned}$$

$$g(y) - p(y-a) \leqslant p(x+a) - g(x).$$

对固定的 a 这就证明了对任意 $x\in Y$，

$$\alpha \leqslant p(x+a) - g(x). \tag{1}$$

因为 $a\notin Y$，类似问题 1.4.1 的解答，Z 中的每个 z 都可以唯一地表示为

$$z = y + ta, \quad y \in Y, \quad t \in \mathbb{R}.$$

所以 h 在 Z 上定义为

$$h(y+ta) = g(y) + t\alpha, \quad y \in Y, \quad t \in \mathbb{R}.$$

很显然 h 是线性的且 $h|_Y=g$.

设 $z=y+ta, y\in Y, t\in\mathbb{R}$. 若 $t=0$，则因 $z=y$，有

$$h(z) = g(y) \leqslant p(y) = p(z).$$

若 $t>0$，在(1)式中取 $x=(1/t)y$ 给出

$$\alpha \leqslant p\left(\frac{1}{t}y+a\right)-g\left(\frac{1}{t}y\right)=p\left(\frac{1}{t}z\right)-g\left(\frac{1}{t}y\right)=\frac{1}{t}p(z)-\frac{1}{t}g(y),$$

所以 $t\alpha+g(y)\leqslant p(z)$，即 $h(z)\leqslant p(z)$. 若 $t<0$，则因 $\left(-\frac{1}{t}\right)y\in Y$，由 α 的定义知

$$\alpha \geqslant g\left(-\frac{1}{t}y\right)-p\left(-\frac{1}{t}y-\alpha\right)=g\left(-\frac{1}{t}y\right)-p\left(-\frac{1}{t}z\right)=-\frac{1}{t}g(y)+\frac{1}{t}p(z).$$

因为 $-t>0$，所以 $-t\alpha\geqslant g(y)-p(z)$. 所以 $h(z)=g(y)+t\alpha\leqslant p(z)$. 这就完成了证明. ■

问题 1.4.9 证明在问题 1.4.8 的条件下，存在线性映射 $f:X\to\mathbb{R}$ 使得 $f|_Y=g$ 且对所有 $x\in X$，

$$-p(-x)\leqslant f(x)\leqslant p(x).$$

解答 考虑所有序对 (Z,h) 的集合 $\mathcal{E}$，其中 Z 是 X 中包含 Y 的子空间，$h:Z\to\mathbb{R}$ 是 g 的线性延拓使得对 Z 中所有 z 有 $h(z)\leqslant p(z)$. 因 $\mathcal{E}$ 包含 (Y,g)，所以它是非空的.

对 $\mathcal{E}$ 中的 (Z_1,h_1) 和 (Z_2,h_2)，若

$$Z_1\subset Z_2,\quad h_1=h_2|_{Z_1},$$

就写为 $(Z_1,h_1)\leqslant(Z_2,h_2)$，则“$\leqslant$”是 $\mathcal{E}$ 上的一个**偏序**. 考虑 $\mathcal{E}$ 中的非空链

$$\mathcal{F}=\{(Z_i,h_i):i\in I\}.$$

设 $Z=\bigcup\{Z_i:i\in I\}$，令

$$h(z)=h_i(z),\quad z\in Z_i. \tag{2}$$

设 $z\in Z_i\cap Z_j$. 因为 $\mathcal{F}$ 是一个链，所以或者有

$$Z_i\subset Z_j,\quad h_i=h_j|_{Z_i}; \tag{3}$$

或者有

$$Z_j\subset Z_i,\quad h_j=h_i|_{Z_j}. \tag{4}$$

在任一种情形均有 $h_i(z)=h_j(z)$. 所以(2)式定义了映射 $h:Z\to\mathbb{R}$. 令 $x,y\in Z,k\in\mathbb{R}$，则有 I 中的 i,j，使得 $x\in Z_i,y\in Z_j$，且(3)式或(4)式必须成立. 若(3)式成立，则

$$x,y,kx+y\in Z_j\subset Z,$$

$$h(kx+y)=h_j(kx+y)=kh_j(x)+h_j(y)=kh(x)+h(y).$$

类似地，若(4)式成立，则上述结论中用 Z_i,h_i 来代替 Z_j,h_j 后是成立的. 所以 Z 是 X 的一个子空间，$h:Z\to\mathbb{R}$ 是线性的. 显然，

$$Y\subset Z,\quad h|_Y=g,\quad h(z)\leqslant p(z),\quad z\in Z;$$

所以 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{E}$ 中有上界 (Z,h). 由 Zorn 引理，$\mathcal{E}$ 有极大元 (Z_0,h_0).

假设 $Z_0\neq X$. 则存在 $a\in X$ 且 $a\notin Z_0$. 应用问题 1.4.8 用 (Z_0,h_0) 代替 (Y,g). 若 $Z_1=\operatorname{span}\{Z_0,a\}$，则存在线性映射 $h_1:Z_1\to\mathbb{R}$ 使得

$$h_1|_{Z_0}=h_0,h_1(z)\leqslant p(z),\quad z\in Z_1.$$

所以 $(Z_0,h_0)\leqslant(Z_1,h_1)$ 且 $(Z_0,h_0)\neq(Z_1,h_1)$. 这与 (Z_0,h_0) 的极大性矛盾. 所以必有 $Z_0=X$. 用 f 来表示 h_0，则 $f:X\to\mathbb{R}$ 是线性的，$f|_Y=g$ 且对 X 中所有 x 有 $f(x)\leqslant p(x)$. 所以

$$-f(x)=f(-x)\leqslant p(-x),$$

$$-p(-x)\leqslant f(x)\leqslant p(x),\quad x\in X.$$

这就完成了证明. ■

问题 1.4.10 设 Y 是线性空间 X 的子空间，p 是 X 上的半范数，即 p 是从 X 到 $\mathbb{R}$ 的一个映射，使得对 X 中所有 $x,y,k\in\mathbb{K}$，有

$$p(x)\geqslant 0,\quad p(kx)=|k|p(x),\quad p(x+y)\leqslant p(x)+p(y).$$

若 $g:Y\to\mathbb{K}$ 是线性的，对 Y 中所有 y 有 $|g(y)|\leqslant p(y)$，证明：存在线性映射 $f:X\to\mathbb{K}$ 使得 $f|_Y=g$，且对 X 中所有 x 有 $|f(x)|\leqslant p(x)$.

解答 首先假设数域 $\mathbb{K}$ 是 $\mathbb{R}$. 由问题 1.4.9 知，存在线性映射 $f:X\to\mathbb{R}$ 使得 $f|_Y=g$ 且对所有 $x\in X$ 有

$$-p(x)\leqslant f(x)\leqslant p(x).$$

因为 $p(-x)=p(x)$，所以得到对所有 $x\in X$ 有

$$|f(x)|\leqslant p(x).$$

下面设 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. 设 $X_1=(X,\mathbb{R})$ 且 $Y_1=(Y,\mathbb{R})$ 是相对于 X 和 Y 的相应实线性空间. 显然 Y_1 是 X_1 的子空间. 设 $v=\mathrm{Re}\,g$，则 v 在 Y_1 上是线性的，对 Y 中所有的 y 有

$$|v(y)|\leqslant|g(y)|\leqslant p(y),$$
$$g(y)=v(y)-\mathrm{i}v(\mathrm{i}y).$$

所以，由 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 情形已证结论知，存在线性映射 $u:X\to\mathbb{R}$ 使得 $u|_Y=v$ 且对 X 中所有 x 有 $|u(x)|\leqslant p(x)$. 设

$$f(x)=u(x)-\mathrm{i}u(\mathrm{i}x),$$

则 $f:X\to\mathbb{C}$ 是线性的. 若 $y\in Y$，则 $\mathrm{i}y\in Y$，

$$f(y)=u(y)-\mathrm{i}u(\mathrm{i}y)=v(y)-\mathrm{i}v(\mathrm{i}y)=g(y).$$

所以 $f|_Y=g$. 设 $x\in X$，

$$k=\begin{cases}\dfrac{|f(x)|}{f(x)}, & f(x)\neq 0,\\ 1, & f(x)=0,\end{cases}$$

则 $|k|=1$ 且 $kf(x)=|f(x)|$. 所以

$$f(kx)=kf(x)=|f(x)|,$$
$$|f(x)|=\mathrm{Re}\,f(kx)=u(kx)\leqslant p(kx)=|k|p(x),$$
$$|f(x)|\leqslant p(x).$$

这就证明了结论. ■

问题 1.4.11 Banach 极限指的是具有下列三条性质的 l^∞ 上的线性泛函：

(i) 若 $a=(1,1,\cdots)$，则 $f(a)=1$.

(ii) 若 $x\in l^\infty$ 且对所有 j，$x(j)\geqslant 0$，则 $f(x)\geqslant 0$.

(iii) 若 $T:l^\infty\to l^\infty$ 定义如下：

$$T(x)=(x(2),x(3),\cdots),\quad x\in l^\infty,$$

则对所有 $x\in l^\infty$ 有 $f(Tx)=f(x)$.

证明每个 Banach 极限在$(1,0,1,0,\cdots)$处的值都为 1/2.

解答 设$b=(1,0,1,0,\cdots)$,则

$$T(b)=(0,1,0,1,\cdots),\quad b+T(b)=(1,1,1,1,\cdots)=a.$$

所以,对任意的 Banach 极限 f 有

$$1=f(a)=f(b)+f(Tb)=f(b)+f(b)=2f(b).$$

这就证明了结论. ■

问题 1.4.12(参考问题 1.2.20,1.2.21,1.2.22) 证明存在有界线性映射$F:l^\infty\to l^\infty$,它不能用无穷矩阵(k_{ij})以下列形式来表示:对每个$x\in l^\infty$,

$$F(x)(i)=\sum_{j=1}^{\infty}k_{ij}x(j),\quad i=1,2,\cdots,$$

且这个级数对所有 i 及 x 都收敛.

解答 对$x\in c$,令$g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}x(n)$,则 g 是 c 上的有界线性泛函(见问题 1.2.6). 设 f 是 g 到l^∞的 Hahn-Banach 延拓. 对$x\in l^\infty$,设

$$F(x)=(f(x),f(x),\cdots),$$

即对所有$i\geqslant 1$有$F(x)(i)=f(x)$且$F:l^\infty\to l^\infty$是线性的. 因为

$$\|F(x)\|_\infty=|f(x)|\leqslant\|f\|\,\|x\|_\infty,$$

所以它是有界的.

假设对所有$x\in l^\infty$,有

$$F(x)(i)=\sum_{j=1}^{\infty}k_{ij}x(j),\quad i=1,2,\cdots,$$

则

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}k_{ij}x(j),\quad i=1,2,\cdots.$$

若$x=e_m$为第m个单位向量,则

$$f(x)=g(x)=\lim_{n\to\infty}x(n)=0.$$

所以$0=k_{im}$对所有i和m都成立. 所以对所有$x\in l^\infty$有$f(x)=0$. 但是若$x=(1,1,1,\cdots)$,则$f(x)=g(x)=1$. 矛盾. 于是没有矩阵(k_{ij})来表示 F. ■

问题 1.4.13 设 X 是赋范空间,$x_\alpha\in X$,$k_\alpha\in\mathbb{K}$,其中 α 属于某个指标集 A. 证明在 X' 中存在 f 使得 $f(x_\alpha)=k_\alpha$ 当且仅当存在 $M>0$ 使得

$$\left|\sum_\alpha a_\alpha k_\alpha\right|\leqslant M\left\|\sum_\alpha a_\alpha x_\alpha\right\|,$$

其中这些和是有限的,且是对所有可能的$a_\alpha\in\mathbb{K}$来取的.

解答 首先设存在 X' 中的 f 使得对所有 α,$f(x_\alpha)=k_\alpha$. 若下列和是有限的,则

$$\sum a_\alpha k_\alpha=\sum a_\alpha f(x_\alpha)=f\Big(\sum a_\alpha x_\alpha\Big).$$

所以

$$\left|\sum a_\alpha k_\alpha\right| = |f(\sum a_\alpha k_\alpha)| \leqslant M\left\|\sum a_\alpha k_\alpha\right\|,$$

其中 $M = \|f\|$.

为了证明另一面，设这样的常数 M 存在. 设 $Y = \mathrm{span}\{x_\alpha : \alpha \in A\}$，则 $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ 包含了 Y 的一个基 $E = \{x_\alpha : \alpha \in B\}$，其中 $B \subset A$. 定义 $f : E \to \mathbb{K}$ 为对 $\alpha \in B$，$f(x_\alpha) = k_\alpha$. 由

$$f(\sum a_\alpha x_\alpha) = \sum a_\alpha f(x_\alpha), \quad x_\alpha \in E,$$

线性延拓 f 到 Y 上，这就给出了 Y 上的线性泛函. 若

$$y = \sum a_\alpha x_\alpha, \quad x_\alpha \in E, \quad \alpha \in B$$

是 Y 的任一个元素，则

$$f(y) = \sum a_\alpha f(x_\alpha) = \sum a_\alpha k_\alpha,$$

且

$$|f(y)| = |\sum a_\alpha k_\alpha| \leqslant M\|\sum a_\alpha x_\alpha\| = M\|y\|,$$

所以 $f \in Y'$ 且 $\|f\| \leqslant M$. 故 f 可以延拓成 X 上的有界线性泛函.

最后，若 $\alpha \in A$，$\alpha \notin B$，则 $x_\alpha \in Y$，

$$x_\alpha = \sum a_i x_i, \quad x_i \in E, \quad i \in B.$$

则有

$$f(x_\alpha) = \sum a_i f(x_i) = \sum a_i k_i.$$

由假设知

$$\left|(-1)k_\alpha + \sum a_i k_i\right| \leqslant M\left\|(-1)x_\alpha + \sum a_i x_i\right\| = 0,$$

所以

$$k_\alpha = \sum a_i k_i = f(x_\alpha).$$

这就完成了证明. ■

问题 1.4.14 设 X 是赋范空间，$x, y \in X$，$\|x\| = \|y\| = 1$，$x \neq y$. 证明：若 X 是严格凸的，则对 $0 < t < 1$，

$$\|tx + (1-t)y\| < 1. \tag{5}$$

再证明若任取 $x, y \in X$，$\|x\| = \|y\| = 1$，且 $x \neq y$ 时，都存在 $0 < t < 1$，使得(5)式成立，则 X 是严格凸的.

解答 设 $0 < t_0 < 1$ 且

$$\|t_0 x + (1-t_0)y\| < 1. \tag{6}$$

设 $z = t_0 x + (1-t_0)y$. 若 $0 < t < t_0$，设 $s = t/t_0$，则 $0 < s < 1$. 因为 $\|z\| < 1$，$\|y\| = 1$，所以有

$$sz + (1-s)y = st_0 x + [s(1-t_0) + 1 - s]y = tx + (1-t)y,$$

$$\|tx + (1-t)y\| \leqslant \|sz\| + \|(1-s)y\| < 1.$$

若 $t_0 < t < 1$，设 $s = (1-t)/(1-t_0)$，则 $0 < s < 1$ 且

$$sz+(1-s)x=(st_0+1-s)x+s(1-t_0)y=tx+(1-t)y,$$

$$\|tx+(1-t)y\|\leqslant\|sz\|+\|(1-s)x\|<1.$$

所以若(6)式对某个 t_0 成立,则(5)式对 $0<t<1$ 是成立的.若 X 是严格凸的,则(6)式成立,其中 $t_0=1/2$. 这就证明了问题的两部分. ■

问题 1.4.15 证明赋范空间 X 是严格凸的当且仅当它有下列特性:若 x 和 y 是 X 的非零元使得 $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$,则存在某个实数 $c>0$ 使得 $x=cy$.

解答 设条件是满足的.为了证明 X 是严格凸的,设 $x,y\in X$ 且 $\|x\|=\|y\|=\|(x+y)/2\|=1$,则

$$\|x+y\|=2=\|x\|+\|y\|,$$

所以存在某个 $c>0$ 使得 $x=cy$. 于是

$$1=\|x\|=c\|y\|=c,\quad x=y,$$

所以 X 是严格凸的.

反过来,设 X 是严格凸的,x,y 是 X 中非零元使得 $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$. 再设

$$a=\|x\|,\quad b=\|y\|,\quad x_1=\frac{x}{a},\quad y_1=\frac{y}{b},$$

则 $a>0,b>0$,且 $\|x_1\|=\|y_1\|=1$,

$$\|ax_1+by_1\|=\|x+y\|=\|x\|+\|y\|=a+b,$$

$$\left\|\frac{a}{a+b}x_1+\frac{b}{a+b}y_1\right\|=1,\quad \|tx_1+(1-t)y_1\|=1,$$

其中 $t=a/(a+b)$. 因 $0<t<1$,由问题 1.4.14 知这只有当 $x_1=y_1$ 时才成立;即 $x=cy$,其中 $c=a/b$. 这就完成了证明. ■

问题 1.4.16 证明 l^p 是严格凸的当且仅当 $1<p<\infty$.

解答 若 $x=(1,0,0,\cdots),y=(0,1,0,\cdots)$,则 $x,y\in l^1$ 且 $(x+y)/2=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,\cdots\right)$,

$$\|x\|_1=\|y\|_1=\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_1=1.$$

所以 l^1 不是严格凸的. 设 $z=(1,1,0,\cdots)$,则 $x,z\in l^\infty$,$(x+z)/2=\left(1,\frac{1}{2},0,\cdots\right)$,且

$$\|x\|_\infty=\|z\|_\infty=\left\|\frac{x+z}{2}\right\|_\infty=1.$$

所以 l^∞ 不是严格凸的.

若 $1<p<\infty$. 下面证明 l^p 是严格凸的. 设 $x,y\in l^p$,$\|x\|_p=\|y\|_p=\|(x+y)/2\|_p=1$. 下面将证明 $x=y$. 设 $1/p+1/q=1$,

$$z(n)=(|x(n)|+|y(n)|)^{p-1},\quad n\geqslant 1.$$

则 $z\neq 0$. 因为 $(p-1)q=p$,所以

$$\| z \|_q^q = \sum_{n=1}^{\infty} (| x(n) |+| y(n) |)^p = \| \, | x |+| y | \, \|_p^p < \infty. \tag{7}$$

下面首先证对 $a \geqslant 0, b \geqslant 0$ 有

$$ab \leqslant \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q, \tag{8}$$

且只有当 $a^p = b^q$ 时，(8)式中等号才成立. 设 $a>0, b>0$，函数 $\phi(t) = t^p - pt, 0<t<\infty$，在 $t=1$ 处有唯一最小值. 所以对 $0<t<1$ 和 $1<t<\infty$，$\phi(t)>\phi(1)$. 当 $t = ab^{-q/p}$ 时就得到了所要的结论.

在(8)式中取 $a = |x(n)|, b = z(n)/\| z \|_q$ 则

$$| x(n) | \frac{z(n)}{\| z \|_q} \leqslant \frac{1}{p} | x(n) |^p + \frac{1}{q} \left(\frac{z(n)}{\| z \|_q} \right)^q, \tag{9}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} | x(n) | \frac{z(n)}{\| z \|_q} \leqslant \frac{1}{p} \sum_{1}^{\infty} | x(n) |^p + \frac{1}{q} \left(\frac{1}{\| z \|_q} \right)^q \sum_{1}^{\infty} (z(n))^q$$

$$= \frac{1}{p} (\| x \|_p)^p + \frac{1}{q} = 1. \tag{10}$$

若(10)式中等号成立，则(9)式中对所有 n 等号成立. 所以对所有 $n \geqslant 1$，有

$$| x(n) |^p = \left(\frac{z(n)}{\| z \|_q} \right)^q. \tag{11}$$

类似地，

$$\sum_{n=1}^{\infty} | y(n) | \frac{z(n)}{\| z \|_q} \leqslant 1, \tag{12}$$

等号成立只有对所有 $n \geqslant 1$ 有

$$| y(n) |^p = \left(\frac{z(n)}{\| z \|_q} \right)^q. \tag{13}$$

因为 $(|x(n)|+|y(n)|)z(n) = (|x(n)|+|y(n)|)^p$，所以

$$(\| z \|_q)^q = \sum_{n=1}^{\infty} (| x(n) |+| y(n) |)z(n) \leqslant \| z \|_q + \| z \|_q,$$

其中我们利用了(7)式，(10)式和(12)式. 所以 $(\| z \|_q)^{q-1} \leqslant 2$. 因为 $(q-1)p = q$，所以

$$\| z \|_q^q \leqslant 2^p. \tag{14}$$

若(14)式中等号成立，则(10)式和(12)式中等号也必须成立，且(11)式和(13)式也成立. 但是由(7)式知

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x(n)+y(n)}{2} \right|^p \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{| x(n) |+| y(n) |}{2} \right)^p = 2^{-p} \| z \|_q^q.$$

于是(14)式中等号成立. 所以(11)式和(13)式也必须是正确的. 进而，在上述步骤中涉及的两个和式必须相等，所以它们中相对应的项是相等的. 因此，对所有 $n \geqslant 1$，有

$$| x(n) |^p = \left(\frac{z(n)}{\| z \|_q} \right)^q = | y(n) |^p,$$

$$|x(n)+y(n)|=|x(n)|+|y(n)|.$$

若 u 和 v 是实数或复数，则

$$|u+v|^2+|u-v|^2=2|u|^2+2|v|^2.$$

因此对所有 $n\geqslant 1$ 都有

$$\begin{aligned}2|x(n)|^2+2|y(n)|^2&=|x(n)+y(n)|^2+|x(n)-y(n)|^2\\&=(|x(n)|+|y(n)|)^2+|x(n)-y(n)|^2,\\2|x(n)|^2+2|x(n)|^2&=(2|x(n)|)^2+|x(n)-y(n)|^2;\\|x(n)-y(n)|^2&=0.\end{aligned}$$

所以 $x=y$. 这就完成了证明. ■

问题 1.4.17 若对赋范空间 X 中每个非零 x，存在 X' 中唯一的 f 使得

$$f(x)=\|x\|,\quad \|f\|=1, \tag{15}$$

则称 X 是光滑的. 证明：

(a) 若 X 是光滑的，Y 是 X 的子空间，则 Y 是光滑的.

(b) 若 X' 是严格凸的，则 X 是光滑的.

解答 由问题 1.4.2 知，对每个 $x\in X$，满足(15)式的 $f\in X'$ 是存在的. 若对每个 $x\neq 0$，f 是唯一的，则 X 是光滑的.

设 X 是光滑的且 $a\in Y$，$a\neq 0$ 且 $f,g\in Y'$ 使得

$$f(a)=\|a\|=g(a),\quad \|f\|=\|g\|=1, \tag{16}$$

则存在 X' 中的 f_1,g_1 分别是 f,g 的 Hahn-Banach 延拓. 因为 X 是光滑的，所以(16)式说明 $f_1=g_1$. 因此 $f=g$. 故 Y 是光滑的. 这就证明了(a).

为了证明(b). 设 X' 是严格凸的，且 $a\in X$，$a\neq 0$，$f,g\in X'$ 使得(16)式成立. 则

$$\begin{aligned}2\|a\|&=f(a)+g(a)=(f+g)(a)\leqslant\|f+g\|\,\|a\|,\\2&\leqslant\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|=2,\end{aligned}$$

所以 $\|(f+g)/2\|=1$. 因为 X' 是严格凸的，所以只有 $f=g$ 时，上式才成立. 所以 X 是光滑的. 这就完成了证明. ■

问题 1.4.18 设 X 是可分的赋范空间，赋有范数 $\|\cdot\|$. 证明：存在 X 上的等价范数，使得 X 在此范数下为严格凸的.

解答 设 $\{x_n\}$ 是 $S=\{x\in X:\|x\|=1\}$ 的可数稠密子集. 对每个 n，由问题 1.4.2 知，存在 X' 中的 f_n 使得

$$f_n(x_n)=\|x_n\|=1,\quad \|f_n\|=1,$$

设 $x\in X$，$y(n)=2^{-n/2}f_n(x)$. 由于

$$|f_n(x)|\leqslant\|f_n\|\,\|x\|=\|x\|,$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}|y(n)|^2\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\|x\|^2=\|x\|^2.$$

这就证明了 $y=(y(n))\in l^2$ 且 $\|y\|_2\leqslant\|x\|$. 定义映射 $F:X\to l^2$ 为

$$F(x)(n)=2^{-n/2}f_n(x),\quad n=1,2,\cdots,\quad x\in X.$$

由 f_n 的线性性知 F 是线性的. 因为 $\|F(x)\|_2\leqslant\|x\|$, 所以 F 是有界的且 $\|F\|\leqslant 1$.

设 $F(x)=0, x\neq 0$ 且 $a=x/\|x\|$. 则 $F(a)=0$ 且 $\|a\|=1$. 所以对所有 $n\geqslant 1$ 有

$$f_n(a)=2^{n/2}F(a)(n)=0.$$

因为 $\{x_n\}$ 在 S 中稠密, 所以存在 x_m 使得 $\|x_m-a\|<\frac{1}{2}$. 所以

$$|f_m(x_m)|=|f_m(x_m-a)|\leqslant\|f_m\|\,\|x_m-a\|<\frac{1}{2}.$$

因为 $f_m(x_m)=1$ 所以这是不可能的. 这就证明了若 $F(x)=0$, 则 $x=0$. 即 F 是单的.

对 $x\in X$, 令

$$\|x\|_0=\|x\|+\|F(x)\|_2.$$

显然, $\|x\|_0\geqslant 0$. 若 $\|x\|_0=0$, 则 $\|x\|=0$, 故 $x=0$. 所以 $\|x\|_0=0$ 当且仅当 $x=0$. 再者

$$\|kx\|_0=\|kx\|+\|F(kx)\|_2=|k|\,\|x\|+|k|\,\|F(x)\|_2=|k|\,\|x\|_0$$

$$\begin{aligned}\|x+y\|_0&=\|x+y\|+\|F(x+y)\|_2\\&\leqslant\|x\|+\|y\|+\|F(x)\|_2+\|F(y)\|_2=\|x\|_0+\|y\|_0,\end{aligned}$$

所以 $\|\cdot\|_0$ 是 X 上的范数. 因为 $\|F(x)\|_2\leqslant\|x\|$, 所以

$$\|x\|\leqslant\|x\|_0\leqslant\|x\|+\|x\|=2\|x\|.$$

因此 $\|\cdot\|_0$ 和 $\|\cdot\|$ 等价.

为了证明 X 在 $\|\cdot\|_0$ 范数下是严格凸的, 令

$$\|x\|_0=\|y\|_0=\|(x+y)/2\|_0=1,$$

则

$$\|x+y\|+\|F(x)+F(y)\|_2=\|x+y\|_0=2,$$

$$\|x\|+\|y\|+\|F(x)\|_2+\|F(y)\|_2=\|x\|_0+\|y\|_0=2.$$

因为 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_2$ 的三角不等式, 所以有

$$\|F(x)+F(y)\|_2=\|F(x)\|_2+\|F(y)\|_2. \tag{17}$$

由于 $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$, 所以 $F(x)$ 和 $F(y)$ 是满足(17)式的 l^2 的非零元. 因为 l^2 是严格凸的, 所以由问题 1.4.15 知有某个 $c>0$ 使得 $F(x)=cF(y)=F(cy)$, 由 F 为单射知 $x=cy$. 因为 $\|x\|_0=\|y\|_0$, 所以有 $c=1$, 即 $x=y$. 这就完成了证明. ■

第2章

CHAPTER 2

Banach空间

完备性的概念在距离空间中非常重要. 这一章讲述完备的赋范线性空间,也称为 Banach 空间. Banach 空间的例子在 2.1 节中来讨论. 由完备距离空间的 Baire 纲定理,可以得到 Banach 空间的三个基本定理:一致有界性原理,开映射定理和闭图像定理. 关于这三个基本定理应用的一些问题在 2.2 节和 2.3 节中讨论.

2.1 完备赋范空间

称赋范线性空间 X 中的序列$\{x_n\}$是柯西列,若对每个 $\varepsilon>0$,存在整数 N 使得对所有 $n,m\geqslant N$ 有

$$\| x_n - x_m \| < \varepsilon$$

很显然柯西列是有界的且收敛列是柯西列. 另一方面,若 X 中的每个柯西列都收敛到 X 中的元素,则称 X 是完备的. 完备的赋范空间被称为 Banach 空间. 为了避免平凡性,我们设 $X\neq\{0\}$.

Lebesgue 空间 $L^p(1\leqslant p\leqslant\infty)$是 Banach 空间. 在 1.1 节中介绍的很多空间都是 Banach 空间. 它们将在下面的问题中被证明.

设 X 是赋范空间. 称 X 中的序列$\{x_n\}$是 X 的 Schauder 基,若对 $n=1,2,\cdots$有 $\| x_n \| =1$ 且 X 中每个 x 都能表示为

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} k_n x_n ,$$

其中这个级数在 X 的范数下是收敛的,数 k_n 由 x 唯一决定.

练习

1. 证明 Banach 空间的闭子空间是 Banach 空间.

2. 设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是线性空间 X 上的两个等价范数,证明在 $\|\cdot\|_1$ 下 X 是 Banach 空间当且仅当它在 $\|\cdot\|_2$ 下是 Banach 空间.

问题

问题 2.1.1 设 X 是赋范空间,Y 是 Banach 空间. 证明由从 X 到 Y 的有界线性映射组成的空间 $BL(X,Y)$,赋有范数

$$\|F\| = \sup\{\|F(x)\| : x \in X, \|x\| \leqslant 1\}, \quad F \in BL(X,Y)$$

是 Banach 空间. 证明赋范空间 X 的对偶空间 X' 是 Banach 空间.

解答 为了证明 $BL(X,Y)$ 是完备的,设 $\{F_n\}$ 是 $BL(X,Y)$ 中的柯西列. 则对每个 $\varepsilon>0$,存在正整数 N 使得对所有 $n,m\geqslant N$,$\|F_n-F_m\|<\varepsilon$. 对每个 $x\in X, n,m\geqslant N$,有

$$\begin{aligned}\|F_n(x)-F_m(x)\| &= \|(F_n-F_m)(x)\| \\ &\leqslant \|F_n-F_m\|\,\|x\| \\ &\leqslant \varepsilon\|x\|. \end{aligned} \tag{1}$$

这就证明了对每个 $x\in X$,$\{F_n(x)\}$ 是 Y 中的柯西列. 但是 Y 是 Banach 空间. 所以对每个 $x\in X$,有

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x) \tag{2}$$

在 Y 中存在. 映射 $F: X\to Y$ 是由(2)式定义的,它显然是线性的. 固定 $n\geqslant N$,在(1)式中令 $m\to+\infty$,则有

$$\|F_n(x)-F(x)\| \leqslant \varepsilon\|x\|, \quad x\in X.$$

这就证明 F_n-F 是有界线性映射且对 $n\geqslant N$,$\|F_n-F\|\leqslant\varepsilon$. 所以 $F=F_n-(F_n-F)\in BL(X,Y)$ 且在 $BL(X,Y)$ 范数下 $F_n\to F$. 这就证明了第一个结果.

因为 $X'=BL(X,\mathbb{K})$,$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 是 Banach 空间,所以第二部分由第一部分可以直接得到. ■

问题 2.1.2 设 X 和 Y 是赋范空间,$X\neq\{0\}$. 证明若 $BL(X,Y)$ 是 Banach 空间,则 Y 是 Banach 空间.

解答 在 X 中取非零元 a. 由问题 1.4.2 知,存在 $f\in X'$ 使得 $f(a)=\|a\|$ 且 $\|f\|=1$. 为了证明 Y 是 Banach 空间,设 $\{y_n\}$ 是 Y 中的柯西列. 定义 $F_n: X\to Y$ 为

$$F_n(x) = f(x)y_n, \quad x\in X.$$

由于 f 是线性的,所以 F_n 是线性的且

$$\|F_n(x)\| = |f(x)|\,\|y_n\| \leqslant \|f\|\,\|y_n\|\,\|x\|, \quad x\in X,$$

因此有 $F_n\in BL(X,Y)$. 进而对所有 $x\in X$ 及 $n,m\geqslant 1$ 有

$$\|F_n(x)-F_m(x)\| = \|f(x)(y_n-y_m)\| = |f(x)|\,\|y_n-y_m\| \leqslant \|f\|\,\|x\|\,\|y_n-y_m\|.$$

所以

$$\|F_n-F_m\| \leqslant \|f\|\,\|y_n-y_m\| = \|y_n-y_m\|.$$

这就证明了$\{F_n\}$是 $BL(X,Y)$中的柯西列. 因此在 $BL(X,Y)$的范数下它收敛到某个 F. 所以

$$\|F_n(a)-F(a)\| \leqslant \|F_n-F\|\,\|a\| \to 0.$$

即 $\|a\|\,y_n=f(a)y_n=F_n(a)\to F(a)$. 这就证明了$\{y_n\}$收敛到 Y 中的$(1/\|a\|)F(a)$. 这就完成了证明. ■

问题 2.1.3 若赋范空间 X 和 Y 是线性同胚的,且其中一个是 Banach 空间,证明另一个也是 Banach 空间. 因此推出所有有限维赋范空间都是 Banach 空间.

解答 设 X 是 Banach 空间. 为了证明 Y 是 Banach 空间,设$\{y_n\}$是 Y 中的柯西列. 设 $F:X\to Y$ 是线性同胚,$G=F^{-1}$. 则 $F\in BL(X,Y)$,$G\in BL(Y,X)$. 设 $x_n=G(y_n)$,则

$$\|x_n-x_m\| = \|G(y_n-y_m)\| \leqslant \|G\|\,\|y_n-y_m\|.$$

因为$\{y_n\}$是 Y 中的柯西列,这就证明了$\{x_n\}$是 X 中的柯西列. 由 X 的完备性知$\{x_n\}$收敛到 X 中的某个x. 因此在 Y 中 $F(x_n)\to F(x)$. 但是 $F(x_n)=y_n$. 所以$\{y_n\}$在 Y 中收敛. 这就证明了第一部分.

为了证明第二部分,设 X 是 n 维赋范空间. 设 $Y=\mathbb{K}^n$ 且赋有欧氏范数 $\|\cdot\|_2$,则 Y 是 Banach 空间. 由问题 1.3.16 知 X 和 Y 是线性同胚的. 利用已证的(a)就完成了证明. ■

问题 2.1.4 设 X 和 Y 都是 Banach 空间. 证明乘积空间 $X\times Y$,赋有范数

$$\|(x,y)\| = \|x\|+\|y\|, \quad (x,y)\in X\times Y,$$

是 Banach 空间.

解答 为了证明 $X\times Y$ 是完备的. 设$\{(x_n,y_n)\}$是 $X\times Y$ 上的柯西列. 由于

$$\|(x_n,y_n)-(x_m,y_m)\| = \|(x_n-x_m,y_n-y_m)\| = \|x_n-x_m\|+\|y_n-y_m\|;$$

所以对所有 $n,m\geqslant 1$,有

$$\|x_n-x_m\| \leqslant \|(x_n,y_n)-(x_m,y_m)\|,$$
$$\|y_n-y_m\| \leqslant \|(x_n,y_n)-(x_m,y_m)\|.$$

这就证明了$\{x_n\}$和$\{y_n\}$分别是 X 和 Y 中的柯西列. 因为 X 和 Y 是 Banach 空间,所以它们都收敛. 设 $x_n\to x$ 且 $y_n\to y$,则

$$\|(x_n,y_n)-(x,y)\| = \|(x_n-x,y_n-y)\| = \|x_n-x\|+\|y_n-y\|\to 0,$$

即在 $X\times Y$ 中$(x_n,y_n)\to(x,y)$. 这就证明了要证的结果. ■

问题 2.1.5 若 T 是距离空间,证明 $C(T)$和 $C_0(T)$在上确界范数 $\|\cdot\|_\infty$下是 Banach 空间. 再证明在这个范数下,$C_c(T)$不是 Banach 空间.

解答 设$\{x_n\}$是 $C(T)$中的柯西列. 则对每个 $\varepsilon>0$,存在正整数 N 使得对所有 $n,m\geqslant N$

及 $t\in T$ 有

$$|x_n(t)-x_m(t)|\leqslant \|x_n-x_m\|_\infty\leqslant\varepsilon.$$

这就证明了$\{x_n\}$满足了 T 上一致收敛的柯西条件. 所以$\{x_n\}$一致收敛到某个 x,即当 $n\to\infty$ 时,$\|x_n-x\|_\infty\to 0$. 特别地,x_n-x 在 T 上是有界的,所以 x 也是有界的. 因为连续函数序列一致收敛的极限是连续的,所以 $x\in C(T)$. 故在 $C(T)$中有 $x_n\to x$. 这就证明了 $C(T)$是完备的.

设 y 是 $C_0(T)$在 $C(T)$上闭包中的任一个元. 则存在 $C_0(T)$中的序列$\{y_n\}$使得当 $n\to\infty$时,$\|y_n-y\|\to 0$. 所以对每个 $\varepsilon>0$,存在 N 使得 $\|y_N-y\|_\infty<\frac{\varepsilon}{2}$. 因为 $y_N\in C_0(T)$,所以存在紧集 $S\subset T$ 使得对所有 $t\notin S$ 有$|y_N(t)|<\varepsilon/2$. 因此对所有 $t\notin S$,

$$|y_n(t)|\leqslant|y(t)-y_N(t)|+|y_N(t)|\leqslant\|y-y_N\|_\infty+|y_N(t)|<\varepsilon/2+\varepsilon/2.$$

这就证明了 $y\in C_0(T)$. 所以 $C_0(T)$是 $C(T)$的一个闭子空间,从而 $C_0(T)$是完备的.

假设 $C_c(T)$是完备的,则它在 $C(T)$中是闭的. 为了证明这是不对的,取 $T=\mathbb{N}$,赋有离散距离. 则 $C(T)=l^\infty$ 且 $C_c(T)=c_{00}$. 令

$$x_n(j)=\begin{cases}\dfrac{1}{j}, & 1\leqslant j\leqslant n,\\ 0, & j>n,\end{cases}$$

则 $x_n\in c_{00}=C_c(T)$. 对所有 $j\geqslant 1$ 令 $x(j)=1/j$. 则 $x\in l^\infty=C(T)$且

$$x_n-x=\left(0,\cdots,0,\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+2},\cdots\right),\quad \|x_n-x\|=\frac{1}{n+1}\to 0.$$

因为 $x\notin c_{00}$,所以 $c_{00}=C_c(T)$不是闭的. 这就证明了 $C_c(T)$不是完备的. ■

问题 2.1.6 证明 l^∞,c_0 和 c 在上确界范数 $\|\cdot\|_\infty$ 下是 Banach 空间,而 c_{00} 不是 Banach 空间.

解答 若 $T=\mathbb{N}$ 赋有离散距离,则 $C(T)=l^\infty$,$C_0(T)=c_0$. 所以 l^∞ 和 c_0 的完备性由问题 2.1.5 可以直接得到. 下面给出直接证明:

l^∞ 的完备性:设$\{x_n\}$是 l^∞ 中的柯西列. 由于

$$|x_n(j)-x_m(j)|\leqslant\|x_n-x_m\|_\infty,\quad j=1,2,\cdots$$

所以对每个固定 j,$\{x_n(j)\}$是柯西数列. 故 $x(j)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n(j)$在$\mathbb{K}$ 中存在. 设

$$\|x_n-x_m\|_\infty<\varepsilon,\quad n,m\geqslant N.$$

则对 $m,n\geqslant N$ 有$|x_n(j)-x_m(j)|<\varepsilon$. 令 $m\to\infty$有

$$|x_n(j)-x(j)|\leqslant\varepsilon,\quad n\geqslant N.$$

对所有 $j\geqslant 1$,这是成立的. 我们有 $x_n-x\in l^\infty$ 从而 $x\in l^\infty$. 这也证明了对 $n\geqslant N$ 有

$$\|x_n-x\|\leqslant\varepsilon,$$

所以在 l^∞ 中 $x_n\to x$. 因此 l^∞ 是完备的.

c_0 的完备性:设 $x\in\bar{c}_0$ 为 c_0 在 l^∞ 中的闭包. 则存在 $x_n\in c_0$ 且当 $n\to\infty$时有 $\|x_n-x\|\to$

0. 因此对每个 j,若 N 足够大则必有

$$\begin{aligned}|x(j)| &\leqslant |x(j)-x_N(j)|+|x_N(j)| \\ &\leqslant \|x-x_N\|_\infty+|x_N(j)|<\frac{\varepsilon}{2}+|x_N(j)|.\end{aligned}$$

由于 $j\to\infty$ 时有 $x_N(j)\to 0$,所以这就证明了若 $j\geqslant j_0$ 时有 $|x(j)|<\varepsilon$. 所以 $x\in c_0$. 故 c_0 是 l^∞ 中的闭子空间,从而 c_0 是完备的.

c 的完备性:设 $x\in\bar{c}$ 为 c 在 l^∞ 中的闭包. 则存在 $x_n\in x$ 使得当 $n\to\infty$ 时有 $\|x_n-x\|_\infty\to 0$. 因此若 N 足够大,对所有 i 和 j 有

$$\begin{aligned}|x(i)-x(j)| &\leqslant |x(i)-x_N(i)|+|x_N(i)-x_N(j)|+|x_N(j)-x(j)| \\ &\leqslant \|x-x_N\|_\infty+|x_N(i)-x_N(j)|+\|x_N-x\|_\infty \\ &<\frac{\varepsilon}{3}+|x_N(i)-x_N(j)|+\frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

所以 c 是 l^∞ 的闭子空间,从而 c 是完备的.

问题 2.1.5 的解答的最后一部分证明了 c_{00} 不是完备的. 这就完成了证明. ■

问题 2.1.7 证明对 $1\leqslant p\leqslant\infty$,$l^p$ 是 Banach 空间.

解答 由问题 2.1.6 知 l^∞ 是 Banach 空间,所以可以设 $1\leqslant p<\infty$. 设 $\{x_n\}$ 是 l^p 中的柯西列,$1\leqslant p<\infty$. 对每个 j 有

$$|x_n(j)-x_m(j)|^p\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|x_n(i)-x_m(i)|^p,$$

$$|x_n(j)-x_m(j)|\leqslant\|x_n-x_m\|_p,$$

因此对 $j=1,2,\cdots,\{x_n(j)\}$ 是一个柯西数列. 故 $x(j)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n(j)$ 在 $\mathbb{K}$ 中存在. 若对 $n,m\geqslant n_0$ 有

$$\|x_n-x_m\|_p<\varepsilon,$$

则对所有 $N\geqslant 1$ 及所有 $n,m\geqslant n_0$ 有

$$\sum_{j=1}^{N}|x_n(j)-x_m(j)|^p\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}|x_n(j)-x_m(j)|^p<\varepsilon^p.$$

固定 n,N,对 $n\geqslant n_0,N\geqslant 1$,令 $m\to\infty$ 有

$$\sum_{j=1}^{N}|x_n(j)-x(j)|^p\leqslant\varepsilon^p.$$

在上式中令 $N\to\infty$,则有

$$\sum_{j=1}^{\infty}|x_n(j)-x(j)|^p\leqslant\varepsilon^p,\quad n\geqslant n_0.$$

这就证明了 $x_n-x\in l^p$,所以 $x\in l^p$. 我们有

$$\|x_n-x\|_p<\varepsilon,\quad n\geqslant n_0.$$

所以在 l^p 中 $x_n\to x$. 故 l^p 是完备的. ■

问题 2.1.8 证明赋范空间 $X\neq\{0\}$ 是 Banach 空间当且仅当

$$S=\{x\in X:\|x\|=1\}$$

是完备的.

解答 若 X 是完备的,因 S 是闭的,故它也是完备的.

反过来,设 S 是完备的. 又设$\{x_n\}$是 X 中的柯西列,由三角不等式有

$$|\,\|x_n\|-\|x_m\|\,|\leqslant\|x_n-x_m\|. \tag{3}$$

所以$\{\|x_n\|\}$是柯西数列,因此必收敛. 若 $\|x_n\|\to 0$,则 $x_n\to 0$. 故不妨假设 $\|x_n\|\to\lambda>0$. 则存在 n_0 使得对 $n\geqslant n_0$ 有 $\|x_n\|>\frac{1}{2}\lambda$. 对 $n\geqslant n_0$ 令 $y_n=x_n/\|x_n\|$,则$\{y_n:n\geqslant n_0\}$是 S 中的序列,且由(3)式知

$$\|x_n\|(y_n-y_m)=(x_n-x_m)+(\|x_m\|-\|x_n\|)y_m,$$

$$\begin{aligned}\|x_n\|\,\|y_n-y_m\|&\leqslant\|x_n-x_m\|+|\,\|x_m\|-\|x_n\|\,|\cdot\|y_m\|\\&\leqslant\|x_n-x_m\|+\|x_n-x_m\|.\end{aligned}$$

所以

$$\|y_n-y_m\|\leqslant\frac{2}{\|x_n\|}\|x_n-x_m\|\leqslant\frac{4}{\lambda}\|x_n-x_m\|,$$

因此$\{y_n\}$是 S 中的柯西列. 由假设知它收敛. 若 $y_n\to y$,则 $x_n\to\lambda y$. 这就证明了 X 是完备的. ■

问题 2.1.9 证明赋范空间 $X\neq\{0\}$包含序列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$使得:

(a) $\sum\|x_n\|^2<\infty$,但$\sum x_n$ 的部分和序列不是柯西列.

(b) $\sum\|y_n\|=\infty$,但$\sum y_n$ 收敛.

解答 设 $x_0\in X$,$x_0\neq 0$,$x_n=\frac{1}{n}x_0$ 及 $y_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}x_0$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\|x_0\|^2<\infty.$$

若 $s_n=x_1+x_2,\cdots+x_n$,则

$$s_{2n}-s_n=\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)x_0,$$

$$\|s_{2n}-s_n\|=\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\|x_0\|>\frac{1}{2}\|x_0\|.$$

这就证明了$\{s_n\}$不是柯西列. 我们有

$$\sum\|y_n\|=\sum\frac{1}{n}\|x_0\|=\infty.$$

由于 $y_1+y_2+\cdots+y_n=\alpha_n x_0$,其中

$$\alpha_n=1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\to\log 2,$$

得到$\sum y_n$ 收敛到$(\log 2)x_0$. 这就完成了证明. ■

问题 2.1.10 设 X 是赋范空间. 若 $x_n \in X$ 且 $\sum \| x_n \| < \infty$, 则称级数 $\sum x_n$ 是**绝对收敛**的. 证明若 X 是 Banach 空间, 则每个绝对收敛的级数都在 X 中收敛.

解答 设 X 是 Banach 空间, $\sum x_n$ 是 X 中绝对收敛的级数. 设

$$y_n = x_1 + \cdots + x_n, \qquad t_n = \| x_1 \| + \cdots + \| x_n \|,$$

则对 $n \geqslant m \geqslant 1$ 有

$$\| y_n - y_m \| = \| x_{m+1} + \cdots + x_n \| \leqslant \| x_{m+1} \| + \cdots + \| x_n \| = t_n - t_m.$$

因为 $\{t_n\}$ 收敛, 所以它必是柯西列. 这就说明 $\{y_n\}$ 是 X 中的柯西列, 所以它在 X 中收敛. 从而级数 $\sum x_n$ 收敛. ■

问题 2.1.11 设 X 是赋范空间, 且 X 中每个绝对收敛的级数都在 X 中收敛. 证明 X 是 Banach 空间.

解答 为了证明 X 是完备的, 设 $\{x_n\}$ 是 X 中的柯西列. 设 n_1 是正整数使得对所有 $n \geqslant n_1$ 有

$$\| x_n - x_{n_1} \| < 1.$$

取 $n_2, n_3, \cdots$ 使得 $n_r > n_{r-1}$, 且对所有 $n \geqslant n_r$, $r = 2, 3, \cdots$, 有

$$\| x_n - x_{n_r} \| < \frac{1}{r^2}.$$

则对 $r = 1, 2, \cdots$ 有

$$\| x_{n_{r+1}} - x_{n_r} \| < \frac{1}{r^2}.$$

令

$$z_r = x_{n_{r+1}} - x_{n_r}, \quad r = 1, 2, \cdots,$$

则

$$\sum_{r=1}^{\infty} \| z_r \| = \sum_{r=1}^{\infty} \| x_{n_{r+1}} - x_{n_r} \| \leqslant \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} < \infty.$$

所以 $\sum z_r$ 是绝对收敛的. 由假设它收敛到 X 中的某个 x. 因此当 $r \to \infty$ 时

$$x_{n_r} = x_{n_1} + z_1 + \cdots + z_{r-1} \to x_{n_1} + x.$$

因为 $\{x_n\}$ 是柯西列, 所以给定 $\varepsilon > 0$, 可找到 N 使得对 $n \geqslant N$, $n_r \geqslant N$ 有

$$\| x_n - x_{n_r} \| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取足够大的 r, 对所有 $n \geqslant N$ 有

$$\| x_n - x_{n_1} - x \| \leqslant \| x_n - x_{n_r} \| + \| x_{n_r} - x_{n_1} - x \| < \varepsilon.$$

这就证明了 $x_n \to x_{n_1} + x$. 于是也就完成了证明. ■

问题 2.1.12 若 X 是 Banach 空间, Y 是 X 的闭子空间, 证明商空间 X/Y 在商范数

$$\| x + Y \| = \inf\{ \| x + y \| : y \in Y \}, \quad x + Y \in X/Y$$

下是 Banach 空间.

解答 我们将证明 X/Y 中的每个绝对收敛级数都收敛的. 要证的结果由问题 2.1.11 易得. 设 $\sum \| x_n + Y \| < \infty$, 由 X/Y 上范数的定义, 对每个 n, 都能找到 $y_n \in Y$ 使得

$$\| x_n + y_n \| < \| x_n + Y \| + \frac{1}{2^n}.$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n + y_n \| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \| x_n + Y \| + 1 < \infty.$$

因为 X 是 Banach 空间, 由问题 2.1.10 知 $\sum (x_n + y_n)$ 收敛到 X 中的某个 x. 令

$$z_n = (x_1 + Y) + \cdots + (x_n + Y) = \sum_{r=1}^{n} (x_r + y_r) + Y,$$

及 $z = x + Y$, 则

$$\begin{aligned} \| z_n - z \| &= \left\| \sum_{r=1}^{n} (x_r + y_r) + Y - (x + Y) \right\| \\ &= \left\| \sum_{r=1}^{n} (x_r + y_r) - x + Y \right\| \\ &\leqslant \left\| \sum_{r=1}^{n} (x_r + y_r) - x + 0 \right\|. \end{aligned}$$

当 $n \to \infty$ 时, $\| z_n - z \| \to 0$. 所以在 X/Y 中 $z_n \to z$, 即 $\sum (x_n + Y)$ 收敛到 X/Y 中的 z. 这就完成了证明. ■

问题 2.1.13 设 $X = C^1[a,b]$, 即为 $[a,b]$ 上所有连续可微函数空间. 对 $x \in X$, 令

$$\| x \| = \| x \|_\infty + \| x' \|_\infty, \qquad \| x \|_1 = | x(a) | + \| x' \|_\infty,$$

其中 x' 是 x 的导数. 证明 X 赋有上面任一个范数都是 Banach 空间. 再证明对 X 中所有 x,

$$\| x \|_1 \leqslant \| x \| \leqslant (b - a + 1) \| x \|_1,$$

且常数 $b - a + 1$ 是最佳的.

解答 因为 $|x(a)| \leqslant \| x \|_\infty$, 所以

$$\| x \|_1 \leqslant \| x \|_\infty + \| x' \|_\infty = \| x \|.$$

另一方面, 存在某个 c 使得 $a < c \leqslant t$ 且

$$x(t) - x(a) = (t - a) x'(c).$$

因此

$$| x(t) | \leqslant | x(a) | + | t - a | | x'(c) | \leqslant | x(a) | + (b - a) \| x' \|_\infty,$$

这对所有 $[a,b]$ 中的 t 都成立. 所以

$$\| x \|_\infty \leqslant | x(a) | + (b - a) \| x' \|_\infty,$$

$$\| x \|_\infty + \| x' \|_\infty \leqslant | x(a) | + (b - a + 1) \| x' \|_\infty,$$

$$\|x\| \leqslant (b-a+1)(|x(a)|+\|x'\|_\infty) = (b-a+1)\|x\|_1,$$

从而这两个范数等价.

设$\{x_n\}$相对于$\|\cdot\|$是柯西列. 因为

$$\|x_n - x_m\| = \|x_n - x_m\|_\infty + \|x_n' - x_m'\|_\infty,$$

所以$\{x_n\}$和$\{x_n'\}$是$C[a,b]$中相对于上确界范数$\|\cdot\|_\infty$的柯西列. 因为$C[a,b]$关于$\|\cdot\|_\infty$是完备的,所以在$C[a,b]$中存在x,y使得关于$\|\cdot\|_\infty$有$x_n \to x$且$x_n' \to y$. 而且关于$\|\cdot\|_\infty$的收敛是一致收敛. 所以$x_n \to x$和$x_n' \to y$在$[a,b]$上一致收敛. 从而x在$[a,b]$上可微,$x' = \lim x_n' = y$. 因此$x' = y$是连续的. 所以$x \in C^1[a,b]$且

$$\|x_n - x\|_\infty \to 0, \quad \|x_n' - x'\|_\infty \to 0,$$

$$\|x_n - x\| = \|x_n - x\|_\infty + \|x_n' - x'\|_\infty \to 0.$$

故关于$\|\cdot\|$有$x_n \to x$. 这就证明了X关于$\|\cdot\|$是完备的. 因为$\|\cdot\|_1$等价于$\|\cdot\|$,所以X关于$\|\cdot\|_1$也是完备的.

最后,为了证明$b-a+1$是最佳常数. 设c是常数使得对所有$x \in X$有

$$\|x\| \leqslant c\|x\|_1. \tag{4}$$

考虑函数$x(t) = t-a$其中$a \leqslant t \leqslant b$. 对$X$中的这个$x$我们有

$$\|x\|_\infty = b-a, \quad x'(t) = 1, \quad \|x'\|_\infty = 1.$$

所以$\|x\| = b-a+1$且$\|x\|_1 = 1$. 由(4)式知$b-a+1 \leqslant c$. 这就完成了证明. ■

问题 2.1.14 设$X = C^n[a,b]$,即为$[a,b]$上具有n阶连续导数的纯量函数的集合. 对X中的x,令

$$\|x\| = \sum_{m=0}^{n} \|x^{(m)}\|_\infty,$$

其中$x^{(0)} = x$且$x^{(m)}$是x的m阶导数$(m = 1,2,\cdots,n)$. 令Y是X中的所有无穷次可微函数的集合. 证明X是Banach空间,在诱导范数下Y不是Banach空间.

解答 设$\{x_i\}$是X的柯西列,则当$i,j \to \infty$时有

$$\sum_{m=0}^{n} \|x_i^{(m)} - x_j^{(m)}\|_\infty = \|x_i - x_j\| \to 0.$$

这就说明对$m = 0,1,\cdots,n$,当$i,j \to \infty$时有

$$\|x_i^{(m)} - x_j^{(m)}\|_\infty \to 0.$$

即$\{x_i^{(m)}; i = 1,2,\cdots\}$在范数$\|\cdot\|_\infty$下是$C[a,b]$中的柯西列.

由于$C[a,b]$关于$\|\cdot\|_\infty$是完备的,所以存在$y_m \in C[a,b]$使得当$i \to \infty$时

$$\|x_i^{(m)} - y_m\|_\infty \to 0,$$

即当$i \to \infty$时$x_i^{(m)} \to y_m$是一致收敛. 当$1 \leqslant m \leqslant n$令$z_i = x_i^{(m-1)}$,则$\{z_i\}$和$\{z_i'\}$分别一致收敛到$y_{m-1}$和$y_m$. 由此推知$y_{m-1}$是可微的且$y_{m-1}' = y_m$. 对$m = 1,2,\cdots,n$这也是成立的. 若用$x$表示$y_0$,则$y_m = x^{(m)}$在$C[a,b]$中存在,且当$i \to \infty$时有

$$\|x_i^{(m)} - x^{(m)}\|_\infty = \|x_i^{(m)} - y_m\|_\infty \to 0,$$

$$\| x_i - x \| = \sum_{m=0}^{n} \| x_i^{(m)} - x^{(m)} \|_\infty \to 0,$$

所以在 X 中 $x_i \to x$. 这就证明了 X 关于 $\| \cdot \|$ 是完备的.

为了证明 Y 不是完备的. 令

$$F(x)(t) = \int_a^t x(s)\mathrm{d}s, \quad a \leqslant t \leqslant b, \quad x \in C[a,b],$$

这定义了线性映射 $F: C[a,b] \to C[a,b]$. 若 $x \in C^{m-1}[a,b]$, 则 $F(x) \in C^m[a,b]$, 且

$$| F(x)(t) | \leqslant \int_a^t | x(s) | \mathrm{d}s \leqslant \| x \|_\infty (t-a).$$

所以 $\| F(x) \|_\infty \leqslant (b-a) \| x \|_\infty$, 故 F 关于 $\| \cdot \|_\infty$ 是有界的.

取 $y \in C[a,b]$ 使得 y 在 $[a,b]$ 上不是可微的. 例如可取 $y(t) = (t-a)^{1/2}$. 存在多项式序列 $\{p_i\}$ 使得当 $i \to \infty$ 时, $p_i \to y$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 即关于 $\| \cdot \|_\infty$ 有 $p_i \to y$. 由 F 的连续性说明在 $C[a,b]$ 关于 $\| \cdot \|_\infty$ 有

$$F(p_i) \to F(y), \quad F^2(p_i) = FF(p_i) \to F^2(y), \cdots$$

设 $F^n(p_i) = P_i$ 且 $F^n(y) = x$, 则 P_i 是多项式,

$$x' = F^{n-1}(y), \quad x'' = F^{n-2}(y), \quad \cdots, \quad x^{(n)} = y,$$

$$P_i' = F^{n-1}(p_i), \quad P_i'' = F^{n-2}(p_i), \quad \cdots, \quad P_i^{(n)} = p_i,$$

进而因为 $x(n) = y$, 所以有 $x \in C^n[a,b]$ 且 $x \notin C^{n+1}[a,b]$. 因此当 $i \to \infty$ 时

$$\| P_i - x \| = \sum_{m=0}^{n} \| P_i^{(m)} - x^{(m)} \|_\infty = \sum_{m=0}^{n} \| F^{n-m}(p_i) - F^{n-m}(y) \|_\infty \to 0.$$

所以关于范数 $\| \cdot \|$ 有 $P_i \to x$. 但 $P_i \in Y$ 且 $x \notin Y$. 这就证明了 Y 在 X 中关于 $\| \cdot \|$ 是不闭的. 所以 Y 关于 $\| \cdot \|$ 不是完备的. 这就完成了证明. ■

问题 2.1.15 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中开单位圆盘, $\overline{D}$ 是它的闭包. 设 X 是由所有 $\overline{D}$ 上连续且在 D 上解析的函数组成的集合. 对 $x \in X$, 设

$$\| x \| = \sup\{ | x(\mathrm{e}^u) | : 0 \leqslant t \leqslant 2\pi \}.$$

证明 X 是 Banach 空间.

解答 由解析函数的最大模原理知

$$\sup\{ | x(u) | : u \in \overline{D} \} = \sup\{ | x(u) | : | u | = 1 \}.$$

所以给出的范数和 $\overline{D}$ 上的上确界范数 $\| \cdot \|_\infty$ 是一样的. 设 $\{x_n\}$ 是 X 中的序列且关于 $\| \cdot \|_\infty$ 有 $x_n \to x$. 所以在 $\overline{D}$ 上 $x_n \to x$ 是一致的. 因此在 D 的每个紧子集上 $x_n \to x$ 是一致的. 由于每个 x_n 都在 D 中解析, 所以 x 在 D 中也解析, 即 $x \in X$. 这就证明了 X 是 $C(\overline{D})$ 的闭子空间. 又因为 $C(\overline{D})$ 关于 $\| \cdot \|_\infty$ 是 Banach 空间. 所以 X 也是 Banach 空间. ■

问题 2.1.16 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的开单位圆盘. 设 $x: D \to \mathbb{C}$ 是解析的且定义

$$\| x \|_p = \sup_{0<r<1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | x(r\mathrm{e}^{it}) |^p \mathrm{d}t \right\}^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\| x \|_\infty = \sup_{u \in D} | x(u) |.$$

设 $H^p(D)$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，是所有满足 $\|x\|_p<\infty$ 的解析函数 $x:D\to\mathbb{C}$ 的集合. 证明对 $1\leqslant p\leqslant\infty$，$H^p(D)$ 是 Banach 空间.

解答 设 $1\leqslant p<\infty$. 对 $0\leqslant r\leqslant 1$，记

$$M_p(x,r)=\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|x(re^{it})|^p dt\right\}^{1/p},$$

则有

$$\|x\|_p=\sup_{0<r<1}(2\pi)^{-1/p}M_p(x,r).$$

固定 $0<r<1$. 若 $x:D\to\mathbb{C}$ 是解析的，令 $x_r:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ 定义为

$$x_r(t)=x(re^{it}).$$

则 $M_p(x,r)$ 是 x_r 关于 Lebesgue 测度的 L^p 范数. 因此 $M_p(x,r)=0$ 当且仅当 x 在圆周 $|z|=r$ 上是 0. 另外

$$M_p(kx,r)=|k|M_p(x,r), \tag{5}$$

$$M_p(x+y,r)\leqslant M_p(x,r)+M_p(y,r). \tag{6}$$

由(5)式可得

$$(2\pi)^{-1/p}M_p(kx,r)=|k|(2\pi)^{-1/p}M_p(x,r)\leqslant|k|\,\|x\|,$$

从而

$$\|kx\|\leqslant|k|\,\|x\|.$$

所以若 $k\neq 0$ 有

$$\|x\|=\left\|\frac{1}{k}kx\right\|\leqslant\left|\frac{1}{k}\right|\|kx\|,$$

即 $|k|\,\|x\|\leqslant\|kx\|$. 当 $k=0$ 时，这个不等式是平凡的，所以我们有

$$\|kx\|=|k|\,\|x\|. \tag{7}$$

类似地，由(6)式得

$$(2\pi)^{1/p}M_p(x+y,r)\leqslant\|x\|+\|y\|,$$

所以

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|. \tag{8}$$

由(7)式和(8)式知 $H^p(D)$ 是线性空间且 $\|\cdot\|_p$ 是其上的范数. 若 $p=\infty$，范数 $\|\cdot\|_\infty$ 就是上确界范数. 至此我们证明了 $H^p(D)$ 是赋范空间.

为了证明 $H^p(D)$ 是完备的，设 $\{x_n\}$ 是它中的柯西列. 设 $0<r<1$，固定 r 且取 R 使得 $r<R<1$.

若 f 在 D 中解析的且 $|z|<r$，则由柯西积分公式知

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{|w|=R}\frac{f(w)}{w-z}dw;$$

$$|f(z)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|f(Re^{i\theta})|}{R-r}Rd\theta=\frac{1}{2\pi}\frac{R}{R-r}M_1(f,R).$$

若 $1<p<\infty$ 且 $1/p+1/q=1$，则由 Hölder 不等式知

$$|f(z)| \leqslant \frac{R}{2\pi(R-r)}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|f(Re^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{1/p}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}1^q d\theta\right\}^{1/q}$$
$$\leqslant \frac{R}{R-r}(2\pi)^{\frac{1}{q}-1}M_p(f,R).$$

所以对$|z|<r, 1\leqslant p<\infty$,有

$$|f(z)| \leqslant \frac{R}{R-r}(2\pi)^{-\frac{1}{p}}M_p(f,R) \leqslant \frac{R}{R-r}\|f\|_p.$$

另一方面,

$$|f(z)| \leqslant \|f\|_\infty, \quad |z| \leqslant r.$$

对 $f=x_n-x_m$ 应用这个结果:对$|z|\leqslant r$,我们有

$$|x_n(z)-x_m(z)| \leqslant \frac{R}{R-r}\|x_n-x_m\|_p, \quad 1\leqslant p<\infty,$$

$$|x_n(z)-x_m(z)| \leqslant \|x_n-x_m\|_\infty.$$

这就得到$\{x_n\}$对$|z|\leqslant r$ 关于一致收敛满足柯西准则.这对任意 $r(0<r<1)$都是成立的.所以$\{x_n\}$在紧子集 D 上一致收敛到 D 上某个解析函数 x.

设对所有 $n,m\geqslant N$, $\|x_n-x_m\|_p<\varepsilon$.若 $p=\infty$,这给出

$$|x_n(z)-x_m(z)| \leqslant \|x_n-x_m\|_\infty < \varepsilon, \quad n,m\geqslant N, z\in D.$$

固定 n 并令 $m\to+\infty$,所以就得到

$$|x_n(z)-x(z)| \leqslant \varepsilon, \quad n\geqslant N, \quad z\in D,$$
$$\|x_n-x\|_\infty \leqslant \varepsilon, \quad n\geqslant N.$$

下面设 $1\leqslant p<\infty$及 $0<r<1$.若 $n,m\geqslant N$,则

$$M_p(x_n-x_m,r) \leqslant (2\pi)^{1/p}\|x_n-x_m\|_p < (2\pi)^{1/p}\varepsilon,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}|x_n(re^{it})-x_m(re^{it})|^p dt < 2\pi\varepsilon^p.$$

固定 n,令 $m\to\infty$,对$|z|=r$ 有

$$|x_n(z)-x_m(z)| \to |x_n(z)-x(z)|,$$

为一致的,所以

$$\int_{-\pi}^{\pi}|x_n(re^{it})-x(re^{it})|^p dt \leqslant (2\pi)\varepsilon^p, \quad n\geqslant N,$$

$$M_p(x_n-x,r) \leqslant (2\pi)^{1/p}\varepsilon, \quad n\geqslant N.$$

当任取的 $0<r<1$,这都是成立的且 N 是与 r 无关的.这就说明

$$\|x_n-x\|_p \leqslant \varepsilon, \quad n\geqslant N.$$

当 $p=\infty$上式已证.这就说明 $x_n-x\in H^p(D)$,因此 $x\in H^p(D)$且在 $H^p(D)$中有 $x_n\to x$.这就完成了证明. ■

问题 2.1.17 设 X 是 Banach 空间,Y 是任一个赋范空间.若 $F:X\to Y$ 是从 X 到 $R(F)$的线性同胚,且 $R(F)$在 Y 中稠密,证明 $R(F)=Y$.

解答 设 $y\in Y$. 因为 $R(F)$ 在 Y 中稠密，所以存在 $R(F)$ 中的序列 $\{y_n\}$ 使得 $y_n\to y$. 设 $x_n=F^{-1}(y_n)$，则

$$\|x_n-x_m\| = \|F^{-1}(y_n-y_m)\| \leqslant \|F^{-1}\|\,\|y_n-y_m\|.$$

由于 $\{y_n\}$ 是柯西列，所以 $\{x_n\}$ 也是柯西列. 由 X 的完备性知 $\{x_n\}$ 收敛于 X 中的某个 x，且 $y_n=F(x_n)\to F(x)$. 所以

$$y=\lim y_n = F(x)\in R(F).$$

这就证明了 $R(F)=Y$. ■

问题 2.1.18 设 X 为 Banach 空间，$BL(X)$ 是 X 上的有界线性算子的全体. 对 $A\in BL(X)$，令

$$\exp A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}.$$

证明定义 $\exp A$ 的级数是绝对收敛的. 再证明，若 $A,B\in BL(X)$ 满足 $AB=BA$，则

$$\exp(A+B)=(\exp A)(\exp B).$$

解答 因为 X 是 Banach 空间，所以 $BL(X)=BL(X,X)$ 是 Banach 空间. 其中的乘法是映射的复合. 由于

$$\|A(Bx)\|\leqslant\|A\|\,\|Bx\|\leqslant\|A\|\|B\|\,\|x\|,$$

所以对 $BL(X)$ 中所有 A,B 有 $\|AB\|\leqslant\|A\|\,\|B\|$. 因此 $\|A^n\|\leqslant\|A\|^n$ 且

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{1}{n!}A^n\right\|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\|A\|^n<\infty.$$

从而定义 $\exp A$ 的级数在 $BL(X)$ 中是绝对收敛的. 因为 $BL(X)$ 是 Banach 空间，所以由问题 2.1.10 知它在 $BL(X)$ 中收敛. 又若 $A_n\to A,B_n\to B$，则 $A_n+B_n\to A+B$ 且

$$\begin{aligned}\|A_nB_n-AB\| &= \|A_n(B_n-B)+(A_n-A)B\|\\ &\leqslant\|A_n\|\,\|B_n-B\|+\|A_n-A\|\,\|B\|\to 0.\end{aligned}$$

所以在 $BL(X)$ 中 $A_nB_n\to AB$. 若 $A,B\in BL(X)$ 且 $AB=BA$，令

$$F_n=\sum_{i=0}^{n}\frac{A^i}{i!},\quad G_n=\sum_{j=0}^{n}\frac{B^j}{j!},\quad H_n=\sum_{r=0}^{n}\frac{(A+B)^r}{r!},$$

则

$$F_nG_n=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{A^i}{i!}\frac{B^j}{j!}.$$

若 $0\leqslant r\leqslant n$，由于 $AB=BA$，所以在上式中当 $i+j=r$ 时有

$$\sum_{i=0}^{r}\frac{A^i}{i!}\frac{B^{r-i}}{(r-i)!}=\frac{1}{r!}(A+B)^r.$$

若 $n+1\leqslant r\leqslant 2n$，相应和式为

$$\sum_{i=r-n}^{n}\frac{A^i}{i!}\frac{B^{r-i}}{(r-i)!},$$

所以有 $F_nG_n=H_n+D_n$，其中

$$D_n=\sum_{r=n+1}^{2n}\sum_{i=r-n}^{n}\frac{A^i}{i!}\frac{B^{r-i}}{(r-i)!},$$

$$\|D_n\|\leqslant\sum_{r=n+1}^{2n}\sum_{i=r-n}^{n}\frac{\|A\|^i}{i!}\frac{\|B\|^{r-i}}{(r-i)!}. \tag{9}$$

类似地，若 $\alpha=\|A\|$ 及 $\beta=\|B\|$，则

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{\alpha^i}{i!}\sum_{j=0}^{n}\frac{\beta^j}{j!}-\sum_{r=0}^{n}\frac{(\alpha+\beta)^r}{r!}=\sum_{r=n+1}^{2n}\sum_{i=r-n}^{n}\frac{\alpha i}{i!}\frac{\beta^{r-i}}{(r-i)!}, \tag{10}$$

当 $n\to\infty$ 时，(10)式的左边趋于 0. 若 $\alpha=\|A\|$，$\beta=\|B\|$，则(9)式和(10)式的左端项是一样的. 这就说明当 $n\to\infty$ 时，$\|D_n\|\to 0$. 因此在 $BL(X)$ 中 $F_nG_n-H_n\to 0$. 但是 $F_n\to\exp A$，$G_n\to\exp B$ 且 $H_n\to\exp(A+B)$. 这就证明了

$$\exp(A+B)=(\exp A)(\exp B). \qquad \blacksquare$$

问题 2.1.19 若 $e=(1,1,\cdots)$ 且 $e_1,e_2,\cdots$ 是单位向量，证明 $\{e,e_1,e_2,\cdots\}$ 是 c 的 Schauder 基.

解答 若 $x\in c$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}x(n)=\lambda$，令

$$x_n=\lambda e+\sum_{j=1}^{n}(x(j)-\lambda)e_j,$$

则对 $1\leqslant j\leqslant n$ 有 $x_n(j)=\lambda+x(j)-\lambda=x(j)$；对 $j>n$ 有 $x_n(j)=\lambda$ 因此

$$\|x-x_n\|_\infty=\sup_{j>n}|x(j)-x_n(j)|=\sup_{j>n}|x(j)-\lambda|.$$

因为 $\lambda=\lim\limits_{j\to\infty}x(j)$，所以当 $n\to\infty$ 时，上式收敛到 0. 所以有 $x_n\to x$. 故

$$x=\lim_{n\to\infty}x_n=\lambda e+\sum_{j=1}^{\infty}(x(j)-\lambda)e_j.$$

为了证明 x 的这种表示是唯一的，设

$$x=ae+\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n$$

是 x 的另一个表示. 设

$$y_n=ae+\sum_{i=1}^{n}a_ie_i,\quad n=1,2,\cdots,$$

则对 $1\leqslant j\leqslant n$ 有 $y_n(j)=a+a_j$；对 $j>n$ 有 $y_n(j)=a$. 因此对 $n\geqslant j$，当 $n\to\infty$ 时有

$$|a+a_j-x(j)|=|y_n(j)-x(j)|\leqslant\|y_n-x\|_\infty\to 0.$$

所以对每个 $j\geqslant 1$ 有 $a+a_j-x(j)=0$. 所以对 $1\leqslant j\leqslant n$ 有 $y_n(j)=x(j)$. 故如前面一样，有

$$\|x-y_n\|_\infty=\sup_{j\geqslant 1}|x(j)-y_n(j)|=\sup_{j>n}|x(j)-a|.$$

因为在 c 中 $y_n\to x$，所以

$$a=\lim_{j\to+\infty}x(j)=\lambda,$$

且对 $j\geqslant 1$，$a_j=x(j)-a=x(j)-\lambda$. 这就证明了唯一性. $\blacksquare$

问题 2.1.20 对 $t\in\mathbb{R}$，令 $x_0(t)=t, x_1(t)=1-t$，

$$x_2(t)=\begin{cases}2t, & 0\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{2},\\ 2-2t, & \dfrac{1}{2}<t\leqslant 1,\\ 0, & t<0 \text{ 或 } t>1,\end{cases}$$

对 $n\geqslant 2$，令

$$n=2^r+j,\quad 1\leqslant j\leqslant 2^r,\quad r=0,1,2,\cdots, \tag{11}$$
$$x_n(t)=x_2(2^r t-j+1),\quad t\in\mathbb{R}.$$

证明$\{x_n\}$是 $C[0,1]$的 Schauder 基.

解答 设 $t_0=1, t_1=0$，

$$t_n=2^{-r-1}(2j-1),\quad n=2,3,\cdots,$$

其中 r,j 由(11)式来决定. 则

$$x_n(t)=x_2\left(2^r(t-t_n)+\frac{1}{2}\right). \tag{12}$$

注意到当 $2u$ 是不为 1 的整数时，$x_2(u)=0$. 所以(12)式说明了若 $2^{r+1}t-2^{r+1}t_n+1$ 是不为 1 的整数，则有 $x_n(t)=0$. 若 $2\leqslant m<n$，令 $m=2^s+i$，其中 $1\leqslant i\leqslant 2^s, 0\leqslant s\leqslant r$，则 $2^{r+1}t_m$ 是整数. 对 $m=0,1$，这也是成立的. 再者，由(12)式有 $x_n(t_n)=x_2\left(\frac{1}{2}\right)=1$，所以

$$x_n(t_m)=\begin{cases}0, & 0\leqslant m<n\\ 1, & m=n.\end{cases} \tag{13}$$

显然对 $n=0,1$ 上式也成立.

设 $x\in C[0,1]$. 取 $a_0, a_1, a_2, \cdots$使得：

$$a_0=x(1)=x(t_0),\quad a_1=x(0)=x(t_1),$$
$$a_n=x(t_n)-\sum_{i=0}^{n-1}a_i x_i(t_n),\quad n=2,3,\cdots.$$

令

$$y_n(t)=\sum_{i=0}^{n}a_i x_i(t),\quad n=0,1,2,\cdots.$$

使得 $a_n=x(t_n)-y_{n-1}(t_n)$，则(13)式就证明了 $y_n(t_n)=x(t_n)$ 且对 $0\leqslant m<n$ 有 $y_n(t_m)=y_{n-1}(t_m)$，对 $n=0,1$ 这也成立. 因此

$$y_n(t_m)=x(t_m),\quad 0\leqslant m\leqslant n. \tag{14}$$

设 n 由(11)式给出且 $p=2^s(2i-1)<2^{r+1}$，则

$$\frac{p}{2^{r+1}}=\frac{2i-1}{2^{r-s+1}}=t_m,\quad \text{其中 } m=2^{r-s}+i.$$

易见

$$0,\frac{1}{2^{r+1}},\frac{2}{2^{r+1}},\cdots,\frac{2j-1}{2^{r+1}}\ \frac{2j}{2^{r+1}},\frac{2j+2}{2^{r+1}},\cdots,1 \tag{15}$$

就是 $t_0,t_1,\cdots,t_n$(按递增顺序排列).(15)式中的 $n+1$ 个数形成了$[0,1]$的一个划分,且分$[0,1]$为 n 个子区间.我们将证明 $y_n(t)$在每个子区间上是 t 的线性函数(即是 $at+b$ 的形式).若 $n=2$,则对应的数是 $0,\frac{1}{2},1$.很容易验证 $y_2(t)$在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$和$\left[\frac{1}{2},1\right]$上是线性的.

假设上面的结论对 $n-1$ 成立.从(15)式中去掉 $t_n=2^{-r-1}(2j-1)$,就得到对 $n-1$ 的对应数 $t_0,\cdots,t_{n-1}$.因为对 $t\leqslant 0$ 和 $t\geqslant 1$,$x_2(t)=0$,由(12)式得对 $t\leqslant(2j-2)2^{-r-1}$ 或 $t\geqslant 2j2^{-r-1}$有 $x_n(t)=0$.所以 $y_n(t)=y_{n-1}(t)$在由(15)式所形成的除了

$$J_1=\left[\frac{2j-2}{2^{r+1}},\frac{2j-1}{2^{r+1}}\right],\quad J_2=\left[\frac{2j-1}{2^{r+1}},\frac{2j}{2^{r+1}}\right]$$

外的 $n-2$ 个子空间上都是线性的.因为 $x_2(t)$在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$和$\left[\frac{1}{2},1\right]$上是线性的,所以由(12)式知 $x_n(t)$在 J_1 和 J_2 上是线性的.由假设,$y_{n-1}(t)$在 J_1 和 J_2 上也是线性的.所以 $y_n(t)$在 J_1 和 J_2 上是线性的.这就证明了前面的断言.

因为 x 在$[0,1]$上是一致连续的,所以对给定 $\varepsilon>0$,能够找到 $\delta>0$ 使得

$$|x(u)-x(v)|<\varepsilon,\quad |u-v|<\delta,\quad u,v\in[0,1].$$

设 $n>2/\delta$ 且考虑(15)式中对应的 $n+1$ 个数.设 $t\in[0,1]$,在(15)式中存在两个连贯项 u,v 使得 $u\leqslant t\leqslant v$.因为 $v-u\leqslant 2(2^{-r-1})$且 $2^{r+1}\geqslant n>2/\delta$,因此$|v-u|<\delta$.所以由 δ 的选取有

$$|x(t)-x(u)|<\varepsilon,\quad |x(v)-x(u)|<\varepsilon. \tag{16}$$

因为 $y_n(t)$对 $u\leqslant t\leqslant v$ 是 $at+b$ 的形式,所以有

$$\left|\frac{y_n(t)-y_n(u)}{y_n(v)-y_n(u)}\right|=\left|\frac{a(t-u)}{a(v-u)}\right|\leqslant 1,$$

$$|y_n(t)-y_n(u)|\leqslant|y_n(v)-y_n(u)|.$$

由(14)式有 $y_n(u)=x(u)$,$y_n(v)=x(v)$,由上面的最后一个式子有

$$|y_n(t)-x(u)|\leqslant|x(v)-x(u)|.$$

所以由(16)式有

$$|y_n(t)-x(t)|\leqslant|y_n(t)-x(u)|+|x(u)-x(t)|<2\varepsilon.$$

这对所有 $t\in[0,1]$都成立,即 $\|y_n-x\|_\infty\leqslant 2\varepsilon$ 对所有满足 $n>2/\delta$ 的 n 都是成立的.所以在 $C[0,1]$中有 $y_n\to x$,故在 $C[0,1]$中有

$$x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}a_ix_i=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix_i.$$

最后,设 $x=\sum_{i=0}^{\infty}b_ix_i$ 是 x 的另一个表示.令

$$z_n=\sum_{i=0}^{n}b_ix_i,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

由(13)式知对所有 $n>m\geqslant 0$ 有 $z_n(t_m)=z_m(t_m)$. 因为当 $n\to\infty$ 时有

$$|z_n(t_m)-x(t_m)|\leqslant \|z_n-x\|_\infty\to 0,$$

所以有

$$z_m(t_m)=x(t_m),\quad m=0,1,2,\cdots.$$

因此(14)式说明

$$z_m(t_m)=y_m(t_m),\quad m=0,1,2,\cdots.$$

当 $m=0$ 这意味着 $b_0=a_0$. 设对 $0\leqslant i\leqslant m-1$ 有 $b_i=a_i$,则对所有 t 有 $z_{m-1}(t)=y_{m-1}(t)$,从而

$$z_m(t_m)-z_{m-1}(t_m)=y_m(t_m)-y_{m-1}(t_m).$$

所以

$$b_m=b_m x_m(t_m)=a_m x_m(t_m)=a_m.$$

这就证明了对所有 $n\geqslant 0$ 有 $b_n=a_n$. 所以对每个 $x\in C[0,1]$ 都有唯一的表示形式

$$x=\sum_{i=0}^{\infty}a_i x_i.$$

这就完成了证明. ■

问题 2.1.21 证明若赋范空间有 Schauder 基,则它是可分的.

解答 设 $\{x_n\}$ 是赋范空间 X 的 Schauder 基. M 是数域 $\mathbb{K}$ 的可数稠密子集. 若 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$,可取 M 是有理数集. 若 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$,可取 M 是所有 $\alpha+\mathrm{i}\beta$ 组成的集合,其中 α,β 是有理数. 设 E_n 是所有 $x\in X$ 且形如下式的集合:

$$x=\sum_{i=1}^{n}m_i x_i,\quad m_i\in M,\quad n\geqslant 1$$

由于系数 m_i 由 x 唯一决定,所以存在 E_n 和 M^n 之间的一一对应. 由于 M^n 为可数的,所以 E_n 是可数的. 设

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,$$

则 E 是可数的. 我们将证明 E 在 X 中稠密.

设 $x\in X$,存在 $\mathbb{K}$ 中由 x 唯一决定的 k_n,使得

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}k_n x_n.$$

给定 $\varepsilon>0$,则存在 n 使得

$$\left\|x-\sum_{j=1}^{n}k_j x_j\right\|<\varepsilon/2.$$

因为 M 在 $\mathbb{K}$ 中稠密,所以存在 M 中的 m_j 使得

$$|k_j-m_j|<\frac{\varepsilon}{2n},\quad 1\leqslant j\leqslant n.$$

设 $y=\sum_{j=1}^{n}m_j x_j$,则 $y\in E_n\subset E$. 又对所有 j 有 $\|x_j\|=1$,故

$$x-y=x-\sum_{j=1}^{n}k_jx_j+\sum_{j=1}^{n}(k_j-m_j)x_j,$$

$$\|x-y\|\leqslant\left\|x-\sum_{j=1}^{n}k_jx_j\right\|+\sum_{j=1}^{n}|k_j-m_j|\,\|x_j\|<\frac{\varepsilon}{2}+n\frac{\varepsilon}{2n}.$$

因此 $\|x-y\|<\varepsilon$. 这就证明了 E 在 X 中稠密. ■

2.2 一致有界性原理

Baire 纲定理指出若 E 是完备的距离空间，则可数个稠密开子集的交还在 E 中稠密. Banach 空间的基本定理的证明中要用到这个结论. 一致有界性原理是：设 X 是 Banach 空间，Y 是赋范空间，$\mathcal{F}$是一族从 X 到 Y 的有界线性映射，D 是 X 中所有使得集合

$$\{\|F(x)\|:F\in\mathcal{F}\}$$

无界的 x 的集合. 若 D 在 X 中不稠密，则集合

$$\{\|F\|:F\in\mathcal{F}\}$$

有界. 特别地，若 D 是空的，则$\{\|F\|:F\in\mathcal{F}\}$有界.

事实上，特殊情形(D 为空集的情形)也说明了一般情形的结论(见问题 2.2.3).

一致有界性原理的一个有意思的应用是证明定义在$[-\pi,\pi]$上，且其 Fourier 级数在给定的$[-\pi,\pi]$中的 t_0 处不收敛的连续函数的存在性.

设 X 是复赋范线性空间，D 是复平面$\mathbb{C}$的开子集. 称函数 $F:D\to X$ 在 D 上是解析的，如果对 D 中每个 z_0，极限

$$\lim_{z\to z_0}\frac{1}{z-z_0}(F(z)-F(z_0))$$

在 X 中存在. F 在 D 上解析的充分必要条件是对 X' 中每个 x'，纯量函数 $x'\circ F$ 在 D 上解析.

称有界线性映射 $F:c\to c$ 是正则的或永久的，如果

$$\lim_{n\to\infty}F(x)(n)=\lim_{n\to\infty}x(n).$$

不是所有这样的 F 都能用矩阵来表示(见问题 1.2.22). 但是，当无穷矩阵(k_{ij})满足 Toeplitz 条件时：

(i) $\sup\limits_{i\geqslant1}\sum\limits_{j=1}^{\infty}|k_{ij}|<\infty$;

(ii) $\lim\limits_{i\to\infty}k_{ij}=0,\quad j=1,2,\cdots$;

(iii) $\lim\limits_{i\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}k_{ij}=1$;

它可以表示一个正则有界线性映射 $F:c\to c$.

练习

1. 设 $X=\mathbb{R}$，对 $n=1,2,\cdots$，令

$$f_n(t)=\begin{cases} n^2t^{2n}(1-t^2), & |t|\leqslant 1,\\ 0, & |t|>1. \end{cases}$$

证明$\{f_n:n\geqslant 1\}$是 X 上一族有界连续函数且使得对每个$t\in X$集合$\{f_n(t):n\geqslant 1\}$是有界的. 再证明$\{\|f_n\|:n\geqslant 1\}$是无界的，其中$\|f_n\|=\sup\limits_{|t|\leqslant 1}|f_n(t)|$. 这与一致有界性原理矛盾吗?

2. 设 X 是复的赋范空间，D 是复平面$\mathbb{C}$的开子集. 证明若 $F:D\to X$ 是解析的，则对每个 $x'\in X'$，纯量函数 $x'\circ F$ 在 D 上解析.

问题

问题 2.2.1 证明 Banach 空间不可能有可数的无穷基.

解答 假设 X 是无穷维的 Banach 空间且有可数基$\{x_1,x_2,\cdots\}$. 设

$$Y_n=\operatorname{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\},\quad n=1,2,\cdots,$$

V_n 是 Y_n 在 X 中的补集. 则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}Y_n=X,\qquad \bigcap_{n=1}^{\infty}V_n=\varnothing.$$

所以$\bigcap V_n$在 X 中不稠密. 由于 Y_n 是有限维的，所以它是闭的. 故每个 V_n 在 X 是开的. 因为 X 是完备的距离空间，所以由 Baire 纲定理知有某个 V_n 在 X 中不稠密，即存在某个 N 使得 $\bar{V}_N\neq X$.

设 $a\in X$ 且 $a\notin\bar{V}_N$. 则存在 $r>0$ 使得开球 $U(a,r)$和 V_N 不交，即 $U(a,r)\subset Y_N$. 设 x 是 X 中的任一个元，则存在 $\delta>0$ 使得 $\delta\|x-a\|<r$. 所以

$$y=a+\delta(x-a)\in U(a,r)\subset Y_N.$$

由于

$$x=\frac{y-a}{\delta}+a=\frac{1}{\delta}y+\left(1-\frac{1}{\delta}\right)a,$$

及 $a\in Y_N$，所以 $x\in Y_N$. 就证明了 $X=Y_N$. 所以 X 是有限维的. 这就产生了矛盾. ■

问题 2.2.2 证明 c_{00}和一元多项式组成的线性空间在任意范数下都不是 Banach 空间.

解答 若 e_n 是第 n 个单位向量，则$\{e_1,e_2,e_3,\cdots\}$是 c_{00}的基. 设 $p_n(t)=t^n$，$n=0,1,2,\cdots$，则$\{p_0,p_1,p_2,\cdots\}$是变元为 t 的多项式组成的线性空间的基. 但是由问题 2.2.1 知 Banach 空间不可能有可数的无穷基，所以 c_{00}和多项式空间在任意范数下都不是 Banach 空间. ■

问题 2.2.3 设 X 和 Y 是赋范空间，$\mathcal{F}$是一族从 X 到 Y 的有界线性映射，D 是所有

使得

$$S_x = \{\| F(x)\| : F \in \mathcal{F}\} \tag{1}$$

无界的 $x\in X$ 的集合. 证明若 D 在 X 中不稠密,则它一定是空集.

解答 设 D 在 X 中不稠密,则存在 $a\in X$ 使得 $a\notin \overline{D}$. 存在 $r>0$ 使得开球 $U(a,r)$ 和 D 不交. 特别地有 $a\notin D$. 设 x 是 X 的任一个元,设 $0<\delta<1$ 使得 $\delta\| x-a\| <r$. 令 $y=a+\delta(x-a)$,则 $\| y-a\| =\delta\| x-a\| <r$,所以 $y\notin D$. 故由(1)式知 S_a 及 S_y 是有界的. 所以存在有限常数 M_1, M_2 使得对所有 $F\in\mathcal{F}$,

$$\| F(a)\| \leqslant M_1, \quad \| F(y)\| \leqslant M_2.$$

因为

$$F(y) = F(a) + \delta F(x) - \delta F(a),$$

所以对所有 $F\in\mathcal{F}$,

$$\delta\| F(x)\| = \| F(y)\| + (\delta-1)\| F(a)\| \leqslant M_2 + (1-\delta)M_1.$$

这就说明 $x\notin D$. 由于对任意 $x\in X$,这都是成立的;所以 D 是空集. ■

问题 2.2.4 证明在对一族有界线性映射 $F: X\to Y$ 的一致有界性原理中,X 的完备性条件是必要的.

解答 设 $X=c_{00}$ 赋有上确界范数 $\| \cdot\| _\infty$,$Y=\mathbb{K}$ 且 $F_n: X\to Y$ 定义如下:

$$F_n(x) = \sum_{j=1}^{n} x(j), \quad n = 1,2,\cdots.$$

对每个 $x\in c_{00}$,存在 m 使得对所有 $j>m$ 有 $x(j)=0$. 若 $\min(m,n)=p$,则

$$F_n(x) = \sum_{j=1}^{p} x(j);$$

$$\| F_n(x)\| = |F_n(x)| \leqslant p\| x\| _\infty \leqslant m\| x\| _\infty.$$

所以对 X 中每个 x,集合 $\{\| F_n(x)\| : n=1,2,\cdots\}$ 是有界的. 故若一致有界性原理成立,则集合 $\{\| F_n\| : n=1,2,\cdots\}$ 是有界的.

对 $1\leqslant j\leqslant n$ 令 $x(j)=1$ 且对 $j>n$ 令 $x(j)=0$. 则 $x\in X$,$\| x\| _\infty=1$ 且 $F_n(x)=n$. 因此

$$n = |F_n(x)| \leqslant \| F_n\| \| x\| _\infty = \| F_n\| ,$$

这就证明了 $\{\| F_n\| : n=1,2,\cdots\}$ 是无界的. 所以若 $X=c_{00}$,则 X 不完备,一致有界性原理不成立. ■

问题 2.2.5 设 X 是 Banach 空间,Y 是赋范空间,$\{F_n\}$ 是 $BL(X,Y)$ 中的序列使得对 X 中每个 x,$\{F_n(x)\}$ 在 Y 中收敛. 证明若 $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)$,则 $F\in BL(X,Y)$.

解答 设 $x,y\in X$ 及 $k\in\mathbb{K}$,则

$$F_n(kx+y) = kF_n(x) + F_n(y), \quad n = 1,2,\cdots.$$

令 $n\to\infty$,则有

$$F(kx+y) = kF(x) + F(y).$$

这证明了 F 是线性的. 对集族 $\{F_n : n=1,2,\cdots\}$ 应用一致有界性原理. 对每个 $x\in X$,序列

$\{\|F_n(x)\|\}$收敛到$\|F(x)\|$，所以它是有界的. 故由一致有界性原理知$\{\|F_n\|:n=1,2,\cdots\}$是有界的. 若对所有 n 有 $\|F_n\|\leqslant\alpha$，则

$$\|F_n(x)\| \leqslant \|F_n\|\,\|x\| \leqslant \alpha\|x\|.$$

令 $n\to\infty$，则对每个 $x\in X$ 有

$$\|F(x)\| \leqslant \alpha\|x\|.$$

所以 F 是有界的，即 $F\in BL(X,Y)$. ■

问题 2.2.6 设 E 是赋范空间 X 的子集. 证明 E 在 X 中有界当且仅当对每个$x'\in X'$，$x'(E)$是有界数集.

解答 设 E 在 X 中有界，即对 E 中所有 x 有 $\|x\|\leqslant\alpha$. 若 $x'\in X'$，则对所有 $x\in E$ 有

$$|x'(x)| \leqslant \|x'\|\,\|x\| \leqslant \alpha\|x'\|.$$

所以对 X'中任一个 x'，$x'(E)=\{x'(x):x\in E\}$是$\mathbb{K}$ 中有界集.

反过来，设对 X'中每个 x'，集合 $x'(E)$在$\mathbb{K}$ 中有界. 对每个 $x\in X$，定义 $F:X'\to\mathbb{K}$ 为

$$F_x(x') = x'(x), \quad x'\in X'.$$

显然 F_x 是线性的. 由于

$$|F_x(x')| = |x'(x)| \leqslant \|x'\|\,\|x\|,$$

所以 F_x 是有界的且 $\|F_x\|\leqslant\|x\|$. 另一方面，由问题 1.4.2 知若 $x\neq0$，则存在 X'中的 x' 使得 $\|x'\|=1$ 且 $x'(x)=\|x\|$，也就是说

$$F_x(x') = \|x\|, \quad \|x'\| = 1.$$

这就得到 $\|F_x\| = \|x\|$. 当 $x=0$ 时，这也是成立的.

因为 X'是 Banach 空间，所以对从 X'到$\mathbb{K}$ 上的有界线性映射族$\{F_x:x\in E\}$应用一致有界性原理. 因为 $x'(E)$是有界的，所以存在 $\beta>0$ 使得对 E 中所有 x

$$\|F_x(x')\| = |F_x(x')| = |x'(x)| \leqslant \beta.$$

所以$\{F_x:x\in E\}$是逐点有界的. 故$\{\|F_x\|:x\in E\}$有界，即$\{\|x\|:x\in E\}$是有界的. 这就完成了证明. ■

问题 2.2.7 设 X 和 Y 是赋范空间，$F:X\to Y$ 是线性的，证明 F 是连续的当且仅当对每个 $y'\in Y'$有 $y'\circ F\in X'$.

解答 因为 F 是线性的，所以对每个 $y'\in Y'$，$y'\circ F$ 是线性的. 若 F 是连续的，则 $y'\circ F$ 是连续的.

反过来，设对每个 $y'\in Y'$，$y'\circ F$ 是连续的. 设 $S=\{x\in X:\|x\|\leqslant1\}$，则$(y'\circ F)(S)$在$\mathbb{K}$ 中有界. 因为这对所有 $y'\in Y'$都成立，所以由问题 2.2.6 知 $E=F(S)$在 Y 中有界，即 F 是有界的. 这就完成了证明. ■

问题 2.2.8 设 $S:l^2\to l^2$ 定义为

$$(Sx)(i) = x(i+2), \quad i=1,2,\cdots, \quad x\in l^2$$

$T_n=S^n$，计算

(a) $\{\|T_n(x)\|:n\geqslant1\}$的界；

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\| T_n(x)\|$；

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\| T_n\|$.

解答 (a) 对 n 用归纳法得

$$(S^n x)(i) = x(i+2n),\quad i=1,2,\cdots,$$

所以

$$\| T_n x\|_2^2 = \| S^n x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x(i+2n)|^2 \leqslant \| x\|_2^2.$$

所以对所有 $n\geqslant 1$，$\| T_n x\|_2 \leqslant \| x\|_2$，即 $\| x\|_2$ 是$\{\| T_n x\|_2 : n=1,2,\cdots\}$的上界.

(b) 若 $x\in l^2$，则

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x(j)|^2 < \infty,$$

且当 $n\to\infty$时，

$$\| T_n(x)\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x(i+2n)|^2 = \sum_{j=2n+1}^{\infty} |x(j)|^2 \to 0.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\| T_n x\|_2 = 0,\quad x\in l^2.$$

(c) 对 l^2 中所有 x 有 $\| T_n x\|_2 \leqslant \| x\|_2$，所以 $\| T_n\| \leqslant 1$. 另外

$$T_n(e_{2n+1}) = S^n(e_{2n+1}) = e_1,$$

其中 e_i 是第 i 个单位向量. 所以 $\| T_n(e_{2n+1})\|_2 = \| e_1\|_2 = 1$. 故对任意 n 有 $\| T_n\| = 1$. 所以$\lim\limits_{n\to\infty}\| T_n\| = 1$. ■

问题 2.2.9 设 $F_n\in BL(X,Y)$，其中 X 是 Banach 空间且 Y 是任一赋范空间. 证明下列陈述等价：

(a) $\{\| F_n\| : n=1,2,\cdots\}$有界；

(b) 对每个 $x\in X$，$\{\| F_n(x)\| : n=1,2,\cdots\}$有界；

(c) 对每个 $x\in X$ 和 $g\in Y'$，$\{|g(F_n x)| : n=1,2,\cdots\}$有界.

解答 因为 X 是 Banach 空间，所以对族$\{F_n : n=1,2,\cdots\}$应用一致有界性原理，则有(b)⇒(a).

若对所有 n 有 $\| F_n\| \leqslant \alpha$，则对 X 中的 x 和 Y'中的 g，有

$$|g(F_n x)| \leqslant \| g\|\,|F_n(x)| \leqslant \| g\|\,\| F_n\|\,\| x\| \leqslant \alpha\| g\|\,\| x\|.$$

这就证明了(a)⇒(c).

固定 X 中的 x，设

$$E = \{F_n(x) : x = 1,2,\cdots\}.$$

若(c)成立，则对每个 $g\in Y'$，$g(E)$在$\mathbb{K}$ 中有界. 由问题 2.2.6 知 E 在 Y 中有界. 这就证明了(c)⇒(b). 这样就完成了证明. ■

问题 2.2.10 设 X 和 Y 是赋范空间. E 是 X 的有界完备凸子集，$\mathcal{F}$是满足下列条件的连续映射 $F:X\to Y$ 的集合：对 $0<r<1$ 及 $x,y\in E$，

$$F(rx+(1-r)y)=rF(x)+(1-r)F(y).$$

证明$\mathcal{F}$在 E 上一致有界当且仅当它在 E 上逐点有界.

解答 若$\mathcal{F}$在 E 上一致有界，则它当然在 E 上逐点有界. 反之，设$\mathcal{F}$在 E 上逐点有界，即对每个 $x\in E$，存在常数 $M=M(x)<\infty$使得对所有 $F\in\mathcal{F}$

$$\|F(x)\|\leqslant M(x).$$

对 $F\in\mathcal{F}$，$n=1,2,\cdots$，令

$$V_n(F)=\{x\in X:\|F(x)\|>n\},$$

$$V_n=\bigcup\{V_n(F):F\in\mathcal{F}\},$$

$$E_n=E\cap V_n.$$

若 $F\in\mathcal{F}$，则 F 是连续的，所以由 $g(x)=\|F(x)\|$ 定义的函数 $g:X\to\mathbb{R}$ 是连续的. 因此对所有 n，F，集合 $V_n(F)$在 X 中是开的. 所以 V_n 是开集的并，因此 V_n 也是开的. 因此 E_n 是距离空间 E 的开子集.

设 $x\in E_n$，则 $x\in E$ 且 $x\in V_n$；所以对某个 $F\in\mathcal{F}$有 $x\in V_n(F)$，即有

$$\|F(x)\|>n.$$

但是对任意 F 均有 $\|F(x)\|\leqslant M(x)$，所以当 $x\in E_n$ 有 $M(x)>n$. 因此

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n=\varnothing.$$

特别地，$\bigcap E_n$ 在 E 中不稠密. 但是 E 是完备的距离空间，每个 E_n 都是 E 的开子集. 所以由 Baire 纲定理知存在某个 E_n 在 E 中为非稠密的，即存在 N 使得$\overline{E_N}\neq E$.

设 $a\in E$ 且 $a\notin\overline{E_N}$，则存在 $r>0$ 使得 a 的邻域 $E\cap U(a,r)$与 E_N 不交. 设 $x\in E\cap U(a,r)$，则 $x\notin E_N$，因此

$$x\notin E_N,x\notin V_N(F),\quad F\in\mathcal{F};$$

$$\|F(x)\|\leqslant N,\quad F\in\mathcal{F}.$$

由于 E 是有界的，所以存在 $R>r$ 使得 $E\subset U(a,R)$. 设 $x\in E$，$F\in\mathcal{F}$及

$$y=a+\frac{r}{R}(x-a)=\frac{r}{R}x+\left(1-\frac{r}{R}\right)a.$$

因为 E 是凸的，所以 $y\in E$. 又

$$\|y-a\|=\frac{r}{R}\|x-a\|<r,$$

$$F(y)=\frac{r}{R}F(x)+\left(1-\frac{r}{R}\right)F(a),$$

又因 y 和 a 属于 $E\cap U(a,r)$，所以

$$\left\|\frac{r}{R}F(x)\right\|\leqslant\|F(y)\|+\left\|\left(1-\frac{r}{R}\right)F(a)\right\|\leqslant N+\left(1-\frac{r}{R}\right)N.$$

故

$$\| F(x) \| \leqslant \frac{R}{r}N + \left(\frac{R}{r} - 1\right)N.$$

对所有 $x \in E$ 和 $F \in \mathcal{F}$ 成立. 所以 $\mathcal{F}$ 在 E 上一致有界. 这就完成了证明. ■

问题 2.2.11 设 X 是完备距离空间, $\mathcal{F}$ 是 X 上连续复值函数的集合. 证明或者(i)存在 X 的稠密子集 D 使得

$$\sup\{|F(x)|: F \in \mathcal{F}\} = \infty, \quad x \in D;$$

或者(ii)存在 X 中非空开球 U 使得

$$\sup\{|F(x)|: F \in \mathcal{F}, x \in U\} < \infty.$$

解答 对 $n=1,2,3,\cdots$ 及 $F \in \mathcal{F}$, 令

$$Y_n(F) = \{x \in X: |F(x)| > n\},$$

$$V_n = \bigcup \{V_n(F): F \in \mathcal{F}\},$$

$$D = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n.$$

则每个 V_n 在 X 中是开的, 这与问题 2.2.10 的证明类似. 因为 X 是完备距离空间, 所以 Baire 纲定理说明或者(a) D 在 X 中稠密, 或者(b)某个 V_n 在 X 中不稠密, 即存在 N 使得 $\overline{V}_N \neq X$.

设 D 在 X 中稠密, 令

$$s(x) = \sup\{|F(x)|: F \in \mathcal{F}\}.$$

若 $x \in V_n$, 则有某个 $F \in \mathcal{F}$ 使得 $x \in V_n(F)$ 且

$$s(x) \geqslant |F(x)| > n.$$

因此若 $x \in D$, 则对所有 n 有 $x \in V_n$, 所以对所有 n

$$s(x) > n, \quad s(x) = \infty.$$

这就证明了第一个选择.

若 $\overline{V}_N \neq X$, 则存在 $a \in X$ 使得 $a \notin \overline{V}_N$. 存在 $r>0$ 使得开球 $U(a,r)$ 和 V_N 不交. 所以若 $x \in U(a,r)$, 则必有 $x \notin V_N$, 因而

$$x \notin V_N(F), \quad F \in \mathcal{F};$$

$$|F(x)| \leqslant N, \quad F \in \mathcal{F}.$$

所以对所有 $F \in \mathcal{F}$ 及 $x \in U = U(a,r)$ 有 $|F(x)| \leqslant N$. 这就证明了第二个选择. 从而完成了证明. ■

问题 2.2.12 设 $\{f_n\}$ 是实轴上的复值连续函数序列, 它在每一点都收敛. 证明存在区间 I 和有限实数 M 使得对所有 $x \in I$ 及 $n=1,2,3,\cdots$ 有 $|f_n(x)| \leqslant M$.

解答 在问题 2.2.11 中取 $X=\mathbb{R}$, $\mathcal{F}=\{f_n: n=1,2,\cdots\}$. 则由于任取 $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 存在, 故 $\{f_n(x)\}$ 有界. 因此问题 2.2.11 结论中仅有第二种情形是成立的. ■

问题 2.2.13 设 $\{k_n\}$ 是数列. 证明:

(a) 若对每个 $x \in l^1$，$\sum k_n x(n)$ 收敛，则 $\sup_{n\geqslant 1} |k_n| < \infty$；

(b) 若对每个 $x \in c_0$，$\sum k_n x(n)$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} |k_n| < \infty$.

解答 (a) 对 $n=1,2,\cdots$，设

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{n} k_j x(j), \quad x \in l^1.$$

则 $f_n: l^1 \to \mathbb{K}$ 是线性的且

$$|f_n(x)| \leqslant \alpha_n \sum_{j=1}^{n} |x(j)| \leqslant \alpha_n \|x\|,$$

其中 $\alpha_n = \max_{1\leqslant j\leqslant n} |k_j|$. 所以 f_n 是有界的. 因为 l^1 是 Banach 空间，对 $\{f_n: n=1,2,\cdots\}$ 应用一致有界性原理：对每个 $x \in l^1$，序列 $\{f_n(x)\}$ 收敛，所以在 $\mathbb{K}$ 中有界. 因此 $\{\|f_n\|: n=1,2,\cdots\}$ 有界. 设对所有 n 有 $\|f_n\| \leqslant \alpha$. 若 $x=e_j$，其中 e_j 是第 j 个单位向量，则 $\|x\|_1 = 1$ 且对 $n \geqslant j$ 有 $f_n(x) = k_j$. 所以若 $n \geqslant j$，则

$$|k_j| = |f_n(x)| \leqslant \|f_n\| \|x\|_1 \leqslant \alpha.$$

因为对任意 j 上式均成立，所以有

$$\sup_{j\geqslant 1} |k_j| \leqslant \alpha < \infty.$$

(b) 对 $n=1,2,\cdots$，设

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{n} k_j x(j), \quad x \in c_0,$$

则 $f_n: c_0 \to \mathbb{K}$ 是有界线性映射且

$$\|f_n\| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |k_j|.$$

因 c_0 是 Banach 空间，所以可以对 $\{f_n: n\geqslant 1\}$ 应用一致有界性原理：因为任取 $x \in c_0$ $\{f_n(x)\}$ 收敛，所以它必有界，因此有 $\{\|f_n\|: n\geqslant 1\}$ 是有界的. 设对所有 n 有 $\|f_n\| \leqslant \alpha$. 对每个 j，选择 k_j' 使得

$$k_j k_j' = |k_j|, \quad |k_j'| = 1.$$

设 $x_n = (k_1', \cdots, k_n', 0, 0, \cdots)$，则 $x_n \in c_0$，$\|x_n\|_\infty = 1$ 且

$$f_n(x_n) = \sum_{j=1}^{n} k_j x_n(j) = \sum_{j=1}^{n} k_j k_j' = \sum_{j=1}^{n} |k_j|.$$

所以

$$\sum_{j=1}^{n} |k_j| = |f_n(x_n)| \leqslant \|f_n\| \|x_n\|_\infty = \|f_n\| \leqslant \alpha,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |k_j| \leqslant \alpha < \infty.$$

这就完成了证明. ■

问题 2.2.14 设 X 是 Banach 空间，Y 是赋范空间，对 $n,m=1,2,\cdots$，设 $F_{nm}\in BL(X,Y)$. 若对每个 $m\geqslant 1$，存在 X 中的 x_m 使得

$$\sup_{n\geqslant 1}\|F_{nm}(x_m)\|=\infty.$$

证明存在 X 中的 x 使得

$$\sup_{n\geqslant 1}\|F_{nm}(x)\|=\infty,\quad m=1,2,\cdots.$$

解答 对 $N,n,m\geqslant 1$，设

$$V_N(F_{nm})=\{x\in X:\|F_{nm}(x)\|>N\},$$

$$V_{N,m}=\bigcup_{n=1}^{\infty}V_N(F_{nm}),$$

$$D=\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}V_{N,m};$$

$$s_m(x)=\sup_{n\geqslant 1}\|F_{nm}(x)\|,\quad x\in X.$$

则对每个 m 有 $s_m(x_m)=\infty$. 类似问题 2.2.10 的证明知每个 $V_{N,m}$ 是 X 的开子集，因为 X 是完备的，所以 Baire 纲定理说明或者(i)D 在 X 中稠密，或者(ii)对某个 N,m 有 $\overline{V}_{N,m}\neq X$.

设 D 在 X 中稠密，则 D 是非空的. 设 $a\in D$，则对所有 $N,m\geqslant 1$ 有 $a\in V_{N,m}$. 因此对每个 N,m，存在 n 使得

$$a\in V_N(F_{nm}),$$

即 $\|F_{nm}(a)\|>N$. 所以 $s_m(a)\geqslant\|F_{nm}(a)\|>N$. 从而对每个 m 及 N 有

$$s_m(a)>N,$$

即 $s_m(a)=\infty$.

若对某个 N,m 有 $\overline{V}_{N,m}\neq X$，则存在开球 $U(a,r)$，$r>0$，它和 $V_{N,m}$ 不交. 若 $x\in U(a,r)$，则 $x\notin V_{N,m}$，所以对任意 n 有 $x\notin V_N(F_{nm})$，即

$$\|F_{nm}(x)\|\leqslant N,\quad n\geqslant 1.$$

选择 $t>0$ 使得 $t\|x_m-a\|<r$. 设

$$y=a+t(x_n-a)=(1-t)a+tx_m,$$

则对所有 $n\geqslant 1$，

$$F_{nm}(y)=(1-t)F_{nm}(a)+tF_{nm}(x_m).$$

因 y 和 a 属于 $U(a,r)$，所以

$$\|tF_{nm}(x_m)\|\leqslant\|F_{nm}(y)\|+\|(1-t)F_{nm}(a)\|\leqslant N+|1-t|N.$$

从而对所有 $n\geqslant 1$，

$$t\|F_{nm}(x_m)\|\leqslant N+(1+t)N=(2+t)N,$$

$$\|F_{nm}(x_m)\|\leqslant\frac{2+t}{t}N.$$

这就说明

$$s_m(x_m) \leqslant \frac{2+t}{t}N.$$

但是由假设知 $s_m(x_m)=\infty$. 这个矛盾说明情形(ii)是不可能出现的. 这样就完成了证明. ■

问题 2.2.15 设 X,Y,Z 是赋范空间,其中 X 或者 Y 是 Banach 空间. 对 $F:X\times Y\to Z$,定义 $F_x:Y\to Z$ 及 $F^y:X\to Z$ 为

$$F_x(y)=F(x,y)=F^y(x),\quad x\in X,y\in Y.$$

若对所有 $x\in X,F_x\in BL(Y,Z)$且对 Y 中所有 $y,F^y\in BL(X,Z)$. 证明 F 是连续的,且

$$\|F(x,y)\|\leqslant\alpha\|x\|\|y\|,\quad x\in X,y\in Y.$$

其中 α 是常数.

解答 设 X 是 Banach 空间,$E=\{y\in Y:\|y\|\leqslant 1\}$. 考虑从 X 到 Z 的有界线性映射的集合$\{F^y:y\in E\}$. 对 $x\in X,y\in E$,我们有

$$\|F^y(x)\|=\|F(x,y)\|=\|F_x(y)\|\leqslant\|F_x\|\|y\|\leqslant\|F_x\|.$$

这就证明了集族$\{F^y:y\in E\}$在 X 上逐点有界,所以由一致有界性原理知$\{\|F^y\|:y\in E\}$是有界集. 设对所有 $y\in E$ 有 $\|F^y\|\leqslant\alpha$.

对 $x\in X,y\in Y,y\neq 0$,设 $z=y/\|y\|$,则 $z\in E$,所以

$$\|F(x,z)\|=\|F^z(x)\|\leqslant\|F^z\|\|x\|\leqslant\alpha\|x\|.$$

但是

$$F(x,z)=F_x(z)=\frac{1}{\|y\|}F_x(y)=\frac{1}{\|y\|}F(x,y),$$

所以

$$\|F(x,y)\|=\|y\|\|F(x,z)\|\leqslant\alpha\|x\|\|y\|.$$

因为 $F(x,0)=F_x(0)=0$,所以当 $y=0$ 时,上式也是成立的. 因此对所有 $x\in X,y\in Y$ 有

$$\|F(x,y)\|\leqslant\alpha\|x\|\|y\|.$$

为了证明 F 是连续的. 设在 $X\times Y$ 中有$(x_n,y_n)\to(x,y)$. 则在 X 中有 $x_n\to x$ 且在 Y 中有 $y_n\to y$. 由于

$$F(x_n,y_n)-F(x,y_n)=F^{y_n}(x_n-x)=F(x_n-x,y_n),$$
$$F(x,y_n)-F(x,y)=F_x(y_n-y)=F(x,y_n-y).$$

于是当 $n\to\infty$时有

$$\begin{aligned}\|F(x_n,y_n)-F(x,y)\|&\leqslant\|F(x_n-x,y_n)\|+\|F(x,y_n-y)\|\\&\leqslant\alpha\|x_n-x\|\|y_n\|+\alpha\|x\|\|y_n-y\|\\&\to 0.\end{aligned}$$

所以 F 在(x,y)处连续.

若 Y 是 Banach 空间,考虑从 Y 到 Z 的有界线性映射的集族$\{F_x:x\in X,\|x\|\leqslant 1\}$,重复上面一样的证明就可以得到要证的结果. 这就完成了证明. ■

问题 2.2.16 设 X 是复赋范空间. 设 $F:\mathbb{C}\to X$ 使得对 X'中每个 $x',x'\circ F$ 是有界的且

在$\mathbb{C}$上是解析的，证明F是常函数.

解答 由于$x'\circ F$是有界整函数，所以它是常函数. 若存在$z_1, z_2\in\mathbb{C}$使得$F(z_1)\neq F(z_2)$. 设$a=F(z_1)-F(z_2)$，则$a\in X$且$a\neq 0$. 由问题1.4.2知存在X'中的x'使得$x'(a)=\|a\|\neq 0$. 由于$x'\circ F$是常函数，因此

$$(x'\circ F)(x_1)=(x'\circ F)(x_2),$$

即

$$x'(a)=x'(F(z_1))-x'(F(z_2))=0.$$

这个矛盾说明必有$F(z_1)=F(z_2)$. 这就证明了要证的结果. ■

问题 2.2.17 (a) 设(k_{ij})是无穷矩阵使得

$$\sup_{i\geqslant 1}\sum_{j=1}^{\infty}|k_{ij}|<\infty. \tag{2}$$

证明(k_{ij})表示一个有界线性映射$F: l^\infty\to l^\infty$，F的定义如下

$$F(x)(i)=\sum_{j=1}^{\infty}k_{ij}x(j),\quad i=1,2,\cdots, \tag{3}$$

这个级数对于所有$i\geqslant 1$和l^∞中的x都收敛.

(b) 另一方面，若无穷矩阵(k_{ij})使得(3)式定义了从c_0到l^∞的映射，证明(2)式成立.

解答 (a) 设

$$\alpha_i=\sum_{j=1}^{\infty}|k_{ij}|,\quad \alpha=\sup_{i\geqslant 1}\alpha_i.$$

若$x\in l^\infty$，则

$$\sum_{j=1}^{\infty}|k_{ij}x(j)|\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}|k_{ij}|\,\|x\|_\infty=\alpha_i\|x\|_\infty.$$

所以对每个$i\geqslant 1$，(3)式中的级数收敛且

$$|F(x)(i)|\leqslant\alpha_i\|x\|_\infty\leqslant\alpha\|x\|_\infty.$$

因此$F(x)\in l^\infty$且$\|F(x)\|_\infty\leqslant\alpha\|x\|_\infty$. 所以(3)式定义了一个映射$F: l^\infty\to l^\infty$，它是线性且为有界的.

(b) 若对某个i有$\alpha_i=\infty$. 易知若$\sum a_n$是非负项组成的发散级数，$\{s_n\}$是它的部分和序列，则

$$\sum\frac{a_n}{s_n}=\infty,\quad \frac{1}{s_n}\to 0\text{[见问题 2.3.18 的解答]}.$$

因此存在$b_j\geqslant 0$使得当$j\to\infty$时

$$\sum_{j=1}^{\infty}|k_{ij}|\,b_j=\infty,\quad b_j\to 0.$$

设

$$x(j)=\begin{cases}\dfrac{|k_{ij}|}{k_{ij}}b_j, & k_{ij}\neq 0,\\ b_j, & k_{ij}=0,\end{cases}$$

则当 $j\to\infty$ 时有 $|x(j)|=b_j\to 0$，

$$F(x)(i)=\sum_{j=1}^{\infty}k_{ij}x(j)=\sum_{j=1}^{\infty}|k_{ij}|b_j=\infty.$$

所以即使 $x\in c_0$，$F(x)$ 也不存在. 这就与题设产生了矛盾，于是对所有 $i\geqslant 1$ 有 $\alpha_i<\infty$.

对 $i=1,2,\cdots$，设 $f_i(x)=F(x)(i)$，$x\in c_0$，则 $f_i:c_0\to\mathbb{K}$ 是线性的，

$$|f_i(x)|=|F(x)(i)|\leqslant\alpha_i\|x\|_\infty.$$

所以 f_i 是有界的. 由于 c_0 是 Banach 空间，所以可以对集族 $\{f_i:i=1,2,\cdots\}$ 应用一致有界性原理：因为对 $i\geqslant 1$ 有

$$|f_i(x)|=|F(x)(i)|\leqslant\|F(x)\|_\infty,$$

这说明集族 $\{f_i:i=1,2,\cdots\}$ 在 c_0 上是逐点有界的，所以 $\{\|f_i\|:i\geqslant 1\}$ 是有界的. 设对所有 i 有 $\|f_i\|\leqslant\beta$. 固定 i，对 $n=1,2,\cdots$，令

$$x_n(j)=\begin{cases}\dfrac{|k_{ij}|}{k_{ij}}, & 1\leqslant j\leqslant n,\quad k_{ij}\neq 0,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

则 $x_n\in c_0$，$\|x_n\|_\infty\leqslant 1$ 且

$$f_i(x_n)=\sum_{j=1}^{n}k_{ij}x_n(j)=\sum_{j=1}^{n}|k_{ij}|,$$

$$\sum_{j=1}^{n}|k_{ij}|=|f_i(x_n)|\leqslant\|f_i\|\|x_n\|_\infty\leqslant\|f_i\|.$$

令 $n\to\infty$ 有

$$\alpha_i\leqslant\|f_i\|\leqslant\beta.$$

因这对所有 $i\geqslant 1$ 都成立，所以(2)式成立. 这就完成了证明. ■

问题 2.2.18(见问题 1.2.21) 证明无穷矩阵 (k_{ij}) 表示了有界线性映射 $F:c_0\to c_0$ 当且仅当

$$\sup_{i\geqslant 1}\sum_{j=1}^{\infty}|k_{ij}|<\infty, \tag{4}$$

$$\lim_{i\to\infty}k_{ij}=0,\quad j=1,2,\cdots. \tag{5}$$

解答 设

$$\alpha_i=\sum_{j=1}^{\infty}|k_{ij}|,\quad \alpha=\sup_{i\geqslant 1}\alpha_i.$$

首先设条件 (4)式和(5)式都成立. 则由问题 2.2.17(a)知 (k_{ij}) 表示了有界线性映射 $F:l^\infty\to l^\infty$. 所以只要证明对所有 $x\in c_0$ 有 $F(x)\in c_0$ 即可. 设 $x\in c_0$ 且 $\varepsilon>0$ 给定. 存在 m 使得对所有 $j\geqslant m$，$|x(j)|<\varepsilon$. 所以对 $i=1,2,\cdots$

$$\sum_{j=1}^{\infty}|k_{ij}x(j)|\leqslant\sum_{j=1}^{m-1}|k_{ij}||x(j)|+\sum_{j=m}^{\infty}|k_{ij}|\varepsilon\leqslant\|x\|_\infty\sum_{j=1}^{m-1}|k_{ij}|+\varepsilon\alpha_i.$$

由(5)式知当 $i\to\infty$ 时，上面的和式收敛到 0. 因此存在 i_0 使得

$$|F(x)(i)| \leqslant \|x\|_\infty \varepsilon + \varepsilon\alpha, \quad i \geqslant i_0.$$

这就证明了 $F(x) \in c_0$.

反过来,设(k_{ij})表示了有界线性映射 $F: c_0 \to c_0$. 因为 $c_0 \subset l^\infty$,所以 F 映 c_0 到 l^∞. 从而由问题 2.2.17(b)知(4)式成立. 若 e_n 是第 n 个单位向量,则因 $e_n \in c_0$ 有 $F(e_n) \in c_0$. 但 $F(e_n)(i) = k_{in}$. 所以当 $i \to \infty$有 $k_{in} \to 0$. 所以(5)式也成立. ■

问题 2.2.19(见问题 1.2.22) 证明无穷矩阵(k_{ij})表示了有界线性映射 $F: c \to c$ 当且仅当

$$\sup_{i \geqslant 1} \sum_{j=1}^{\infty} |k_{ij}| < \infty, \tag{6}$$

$$\lim_{i \to \infty} \sum_{j=r}^{\infty} k_{ij} \text{ 存在}, \quad r = 1, 2, \cdots. \tag{7}$$

解答 首先设(6)式和(7)式成立. 令

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{\infty} |k_{ij}|, \quad \alpha = \sup_{i \geqslant 1} \alpha_i, \quad \beta_i(r) = \sum_{j=r}^{\infty} k_{ij}, \quad \beta(r) = \lim_{i \to \infty} \beta_i(r).$$

则由问题 2.2.17(a)知(k_{ij})表示有界线性映射 $F: l^\infty \to l^\infty$. 所以只要证明对所有 $x \in c$ 有 $F(x) \in c$ 即可. 设 $x \in c$, $\lambda = \lim_{j \to \infty} x(j)$,给定 $\varepsilon > 0$,存在 m 使得对所有 $j \geqslant m$ 有

$$|x(j) - \lambda| < \varepsilon.$$

固定 m,设

$$u_i = \sum_{j=1}^{m-1} k_{ij} x(j) + \sum_{j=m}^{\infty} k_{ij} \lambda, \quad v_i = \sum_{j=m}^{\infty} k_{ij} (x(j) - \lambda),$$

则 $u_i + v_i = F(x)(i)$且对 $i \geqslant 1$ 有

$$|v_i| \leqslant \sum_{j=m}^{\infty} |k_{ij}| \varepsilon \leqslant \varepsilon\alpha_i \leqslant \varepsilon\alpha.$$

由于 $k_{ij} = \beta_i(j) - \beta_i(j+1) \to \beta(j) - \beta(j+1)$,所以有当 $i \to \infty$时有 $u_i \to u$,其中

$$u = \sum_{j=1}^{m-1} (\beta(j) - \beta(j+1)) x(j) + \lambda\beta(m).$$

因此存在 i_0 使得对所有 $i \geqslant i_0$ 及 $r \geqslant i_0$ 有

$$|u_i - u_r| < \varepsilon.$$

所以

$$|F(x)(i) - F(x)(r)| \leqslant |u_i - u_r| + |v_i - v_r| < \varepsilon + |v_i| + |v_r| < \varepsilon + \varepsilon\alpha + \varepsilon\alpha,$$

其中 $i \geqslant i_0$ 且 $r \geqslant i_0$. 这就证明了$\lim_{i \to \infty} F(x)(i)$存在,因此有 $F(x) \in c$.

反过来,若(k_{ij})表示了有界线性映射 $F: c \to c$. 因为 $c_0 \subset c \subset l^\infty$,所以 F 映 c_0 到 l^∞. 由问题 2.2.17(b)知(6)式成立. 设

$$x_r(j) = \begin{cases} 0, & 1 \leqslant j < r, \\ 1, & j \geqslant r. \end{cases}$$

则 $x_r \in c$,因此有 $F(x_r) \in c$. 但是

$$F(x_r)(i) = \sum_{j=r}^{\infty} k_{ij} = \beta_i(r).$$

所以$\lim_{i\to\infty}\beta_i(r)=\lim_{i\to\infty}F(x)(i)$存在. 从而(7)式也成立. 这就完成了证明. ■

问题 2.2.20(见问题 1.4.12,1.2.20) 证明无穷矩阵(k_{ij})表示有界线性映射 $F:l^\infty\to l^\infty$ 当且仅当

$$\sup_{i\geqslant 1}\sum_{j=1}^{\infty} |k_{ij}| < \infty; \tag{8}$$

它表示有界线性映射 $F:l^1\to l^1$ 当且仅当

$$\sup_{i\geqslant 1}\sum_{i=1}^{\infty} |k_{ij}| < \infty. \tag{9}$$

解答 第一个论断由问题 2.2.17 可以得到. 为了证第二部分,设(9)式成立. 令

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^{\infty} |k_{ij}|, \quad \lambda = \sup_{j\geqslant 1}\lambda_j.$$

若 $\lambda<\infty$且 $x\in l^1$,则

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |k_{ij}x(j)| = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} |k_{ij}||x(j)| = \sum_{j=1}^{\infty} |x(j)|\lambda_j \leqslant \lambda\sum_{j=1}^{\infty} |x(j)|.$$

因为上式为有限的,所以对 $i=1,2,\cdots$有

$$F(x)(i) = \sum_{j=1}^{\infty} k_{ij}x(j). \tag{10}$$

且

$$\sum_{i=1}^{\infty} |F(x)(i)| \leqslant \lambda\|x\|_1 < \infty. \tag{11}$$

所以 $F(x)\in l^1$. 这就证明了(k_{ij})表示映射 $F:l^1\to l^1$ 且 F 由(10)式给出. F 显然是线性的,(11)式说明 $\|F(x)\|\leqslant\lambda\|x\|_1$. 所以 F 有界.

反过来,设(k_{ij})表示有界线性映射 $F:l^1\to l^1$,且 F 由(10)式给出. 则因 $e_j\in l^1$,所以有 $F(e_j)\in l^1$. 又因为 $F(e_j)(i)=k_{ij}$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |k_{ij}| = \sum_{i=1}^{\infty} |F(e_j)(i)| = \|F(e_j)\|_1 \leqslant \|F\|,$$

所以若 $y\in l^\infty$,则

$$\sum_{i=1}^{\infty} |k_{ij}y(i)| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |k_{ij}|\,\|y\|_\infty \leqslant \|F\|\,\|y\|_\infty.$$

从而对每个 $j\geqslant 1$,

$$G(y)(j) = \sum_{i=1}^{\infty} k_{ij}y(i) \tag{12}$$

存在且$|G(y)(j)|\leqslant\|F\|\,\|y\|_\infty$. 所以对 l^∞ 中每个 y,(12)式定义了 l^∞ 中的元 $G(y)$. 所以当 $k'_{ji}=k_{ij}$时,无穷矩阵(k'_{ij})表示从 l^∞ 到 l^∞ 的映射 G. 由问题 2.2.17(b)知

$$\sup_{j\geqslant 1}\sum_{i=1}^{\infty}|k'_{ji}|<\infty.$$

由于这和(9)式一样，所以也就完成了证明. ■

2.3 开映射定理及闭图像定理

在这一节，我们将讨论关于 Banach 空间剩下的两个基本定理：开映射定理和闭图像定理.

开映射定理说若 X 和 Y 是 Banach 空间，F 是从 X 到 Y 的满射且为有界线性映射，则 F 是开映射；即 F 映 X 中的开子集为 Y 中的开子集. 注意到这是问题 2.3.1 的部分逆.

下述结果称为有界逆定理，是开映射定理的特殊情形：若 $F\in BL(X,Y)$，其中 X 和 Y 是 Banach 空间，若 F 是双射，则 $F^{-1}\in BL(Y,X)$.

若 X 和 Y 是赋范空间，则 $X\times Y$ 是赋范空间，其上的范数为

$$\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|.$$

映射 $F:X\to Y$ 的图像是集合

$$\{(x,y):x\in X, y=F(x)\}.$$

这个集合在 $X\times Y$ 中是闭的当且仅当

$$x_n\to x \text{ 且 } F(x_n)\to y \quad\Rightarrow\quad y=F(x).$$

所以若 F 连续，则它的图像是闭的. 即使不连续线性映射也能有闭的图像(见下面的问题 2.3.3). 闭图像定理是说：若 X 和 Y 是 Banach 空间，$F:X\to Y$ 是线性的且 F 的图像是 $X\times Y$ 的闭子集，则 F 是连续的.

很清楚若 F 是双射，F 的图像在 $X\times Y$ 中是闭的，则 F^{-1} 的图像在 $X\times Y$ 中也是闭的. 所以上述开映射定理的特殊情形也是闭图像定理的一个推论.

练习

1. 设 $X=[0,2\pi)$ 且 Y 是 $\mathbb{R}^2$ 中的单位圆周. 定义 $F:X\to Y$ 为 $F(t)=(\cos t,\sin t)$. 设 $E=[0,1)$. 证明虽然 E 在 X 中是开的且 F 是满射但 $F(E)$ 在 Y 中不是开的. 这与开映射定理矛盾吗？

2. 证明映射 $F:X\to Y$ 的图像是 $X\times Y$ 的闭子集当且仅当下述条件是满足的：

$$x_n\to x \quad 且 \quad F(x_n)\to y \quad\Rightarrow\quad y=F(x).$$

3. 设 X 和 Y 是赋范空间，$F:X\to Y$ 是线性的，X 是有限维的. 证明 F 的图像是 $X\times Y$ 的有限维子空间. 利用闭图像定理来推出 F 是连续的.

问题

问题 2.3.1 设 X,Y 是赋范空间，$F\in BL(X,Y)$. 证明若 F 映 X 的开子集为 Y 的开子集，则 F 是满射.

解答 设 $U=\{x\in X:\|x\|<1\}$，则 U 在 X 中是开的，所以 $F(U)$ 在 Y 中是开的. 因为 $0=F(0)\in F(U)$，所以存在 $r>0$ 使得

$$S=\{y\in Y:\|y\|<r\}\subset F(U).$$

设 $y\in Y, y\neq 0$ 且 $y_1=\dfrac{r}{2\|y\|}y$，则 $\|y_1\|=\dfrac{1}{2}r<r$，因此有 $y_1\in F(U)$. 即存在 $x_1\in U$ 使得 $y_1=F(x_1)$ 因此

$$y=\frac{2\|y\|}{r}y_1=F(x_2)\in F(X),$$

其中 $x_2=\dfrac{2\|y\|}{r}x_1$. 这就证明了 F 是满射. ■

问题 2.3.2 由开映射定理的特殊情况推出

(a) 开映射定理；

(b) 闭图像定理.

解答 (a) 设 X 和 Y 是 Banach 空间，$F\in BL(X,Y)$，F 是满射. 设 $Z=Z(F)$ 是 F 的零空间，则因 F 是连续的，知 Z 在 X 中是闭的. 所以商空间 X/Z 在商范数 $\|\cdot\|$ 下是 Banach 空间.

定义 $\tilde{F}:X/Z\to Y$ 如下：$\tilde{F}(x+Z)=F(x)$. 若 $x+Z=x_1+Z$，则

$$x-x_1\in Z,\quad F(x-x_1)=0,\quad F(x)=F(x_1).$$

所以 $\tilde{F}$ 的定义是有意义的. 因为 F 是满射，所以 $\tilde{F}$ 也是满射. 又 F 是线性的，所以 $\tilde{F}$ 是线性的. 而 $Z=Z(F)$，所以 $\tilde{F}$ 是单的.

设在 X/Z 中 $x_n+Z\to x+Z$，则利用问题 1.1.10 知存在 Z 中序列 $\{z_n\}$ 使得在 X 中 $x_n+z_n\to x$. 所以由 F 的连续性知 $F(x_n+z_n)\to F(x)$. 从而

$$\tilde{F}(x_n+Z)=F(x_n)=F(x_n+z_n)\to F(x),$$

即 $\tilde{F}(x_n+Z)\to\tilde{F}(x+Z)$. 这就证明了 $\tilde{F}$ 是连续的. 由有界逆定理，它的逆 $G:Y\to X/Z$ 是有界线性映射.

设 E 是 X 中的开集. 为了证明 $F(E)$ 在 Y 中是开的. 设 $y_0\in F(E)$，则 $y_0=F(x_0), x_0\in E$. 由于 E 是开的，所以存在 $r>0$ 使得

$$\|x-x_0\|<r\quad\Rightarrow\quad x\in E.$$

设 $\|y-y_0\|<r/\|G\|$. 因为 F 是满射，所以存在 x 使得 $y=F(x)$. 我们有

$$(x+Z)-(x_0+Z)=G(y)-G(y_0)=G(y-y_0),$$

$$\|x-x_0+Z\|=\|G(y-y_0)\|\leqslant\|G\|\,\|y-y_0\|<r.$$

所以存在 $z\in Z$ 使得

$$\| x-x_0+z \| < r,$$

其中我们利用了商范数的定义. 因此 $x+z\in E$ 且

$$y = F(x) = F(x+z) \in F(E).$$

上式对所有的 $\| y-y_0 \| < r/\| G \|$ 都是成立的. 所以 $F(E)$ 是开的. 这就证明了开映射定理.

(b) 设 X 和 Y 是 Banach 空间, $F:X\to Y$ 是线性的且其图像

$$W = \{(x,y): x \in X, y = F(x)\}$$

是 $X\times Y$ 的闭子集. F 的线性性说明 W 是 $X\times Y$ 的线性子空间. 由于 $X\times Y$ 是 Banach 空间, 所以 W 也是 Banach 空间. 定义 $T:W\to X$ 为

$$T(x,y) = x, \quad (x,y) \in W.$$

T 显然是双射且为线性的. 由于

$$\| T(x,y) \| = \| x \| \leqslant \| x \| + \| y \| = \| (x,y) \|,$$

所以 T 是连续的且 $\| T \| \leqslant 1$. 由有界逆定理知它的逆 $S': X\to W$ 是有界线性映射. 若 $x\in X$ 且 $y=F(x)$, 则

$$(x,y) \in W, \quad T(x,y) = x, \quad S'(x) = (x,y),$$

因此

$$\| x \| + \| y \| = \| (x,y) \| = \| S(x) \| \leqslant \| S \| \| x \|,$$

$$\| F(x) \| = \| y \| \leqslant \| x \| + \| y \| \leqslant \| S \| \| x \|.$$

这就证明了 F 是连续的且 $\| F \| \leqslant \| S \|$. 这就证明了闭图像定理. ■

问题 2.3.3 证明不连续的线性映射也能有闭图像. 这与闭图像定理矛盾吗?

解答 设 $X=C^1[0,1]$ 且 $Y=C[0,1]$, 其中两者都赋有上确界范数 $\| \cdot \|_\infty$. 设 $F(x)=x'$, 其中 x' 是 x 的导数. 则 $F:X\to Y$ 是线性的. 若 $x_n(t)=t^n$, 则 $x_n'(t)=nt^{n-1}$, 因此

$$\| x_n \|_\infty = 1, \quad \| F(x_n) \|_\infty = \| x_n' \|_\infty = n = n \| x_n \|_\infty.$$

这就证明了 F 不是连续的.

为了证明 F 的图像是闭的, 设在 X 中 $x_n\to x$, 在 Y 中 $F(x_n)\to y$. 我们知道关于上确界范数的收敛就是一致收敛. 所以 $x_n'=F(x_n)\to y$ 是一致收敛. 这就得到 $x'=y$, 即 $y=F(x)$. 所以 F 的图像是闭的.

这里 $X=C^1[0,1]$ 在上确界范数下不是 Banach 空间. 所以闭图像定理的假设是不满足的. 所以这个例子与闭图像定理不矛盾. ■

问题 2.3.4 设 $X=c_{00}$ 且 $F:X\to X$ 定义如下

$$F(x)(j) = \frac{1}{j}x(j), \quad j = 1,2,3,\cdots.$$

证明 F 是双射, 线性的且为有界的, 但 F^{-1} 是无界的. 这与有界逆定理矛盾吗?

解答 设 $G:c_{00}\to c_{00}$ 定义如下

$$G(x)(j)=jx(j),\quad j=1,2,3,\cdots.$$

则 F 和 G 互为逆映射. 所以 F 是双射,它当然是线性的. 因为 $X=c_{00}$ 上的范数是 $\|\cdot\|_\infty$,所以对 $j=1,2,\cdots$,有

$$|F(x)(j)|=\frac{1}{j}|x(j)|\leqslant|x(j)|\leqslant\|x\|_\infty.$$

所以 $\|F(x)\|_\infty\leqslant\|x\|_\infty$. 因此 F 是有界的且 $\|F\|\leqslant1$.

若对 $1\leqslant j\leqslant n$ 令 $x_n(j)=1$ 且对 $j>n$ 令 $x_n(j)=0$. 则 $x_n\in X$, $\|x_n\|_\infty=1$,

$$G(x_n)(j)=j,\quad 1\leqslant j\leqslant n;\quad G(x_n)(j)=0,\quad j>n.$$

所以 $\|G(x_n)\|_\infty=n=n\|x_n\|_\infty$. 这对任意 n 都成立. 所以 $G=F^{-1}$ 不是有界的.

$X=c_{00}$ 不是 Banach 空间,从而有界逆定理的条件不满足,因此这个例子与有界逆定理不矛盾. ■

问题 2.3.5 设 X 和 Y 是 Banach 空间,$F:X\to Y$ 是单的有界线性映射. 证明 F 的值域 $R(F)$ 在 Y 中是闭的当且仅当 $F^{-1}:R(F)\to X$ 是有界的.

解答 设 $Y_1=R(F)$ 在 Y 中是闭的. 因 Y 是 Banach 空间,所以 Y_1 也是 Banach 空间. 进而,$F:X\to Y_1$ 是有界线性的且为双射. 又 X 是 Banach 空间,所以由有界逆定理知 F^{-1} 是连续的.

反过来,设 $F^{-1}:Y_1\to X$ 是有界线性映射,其中 $Y_1=R(F)$. 设 $y\in\overline{Y}_1$,则存在 Y_1 中的序列 $\{y_n\}$ 使得 $y_n\to y$. 设 $F^{-1}(y_n)=x_n$,则

$$\|x_n-x_m\|=\|F^{-1}(y_n-y_m)\|\leqslant\|F^{-1}\|\,\|y_n-y_m\|.$$

由于 $\{y_n\}$ 在 Y 中收敛,所以 $\{y_n\}$ 是柯西列,从而 $\{x_n\}$ 是 X 中的柯西列. 所以 $\{x_n\}$ 在 X 中收敛. 若 $x_n\to x$,则由 F 的连续性知 $F(x_n)\to F(x)$,即 $y_n\to F(x)$. 所以 $y=F(x)\in Y_1$. 这就证明了 Y_1 在 Y 中是闭的. ■

问题 2.3.6 设 X 在两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 下均为 Banach 空间. 证明若存在 $\alpha>0$ 使得对每个 $x\in X$ 有 $\|x\|_1\leqslant\alpha\|x\|_2$,则存在 $\beta>0$ 使得对每个 $x\in X$ 有 $\|x\|_2\leqslant\beta\|x\|_1$,即 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 等价.

解答 设 X_1 表示 X 赋有范数 $\|\cdot\|_1$,X_2 表示 X 赋有范数 $\|\cdot\|_2$. 设 $I:X_2\to X_1$ 是恒等映射:$I(x)=x$. 它是线性的双射. 若 $\|x\|_1\leqslant\alpha\|x\|_2$,则 $\|Ix\|_1\leqslant\alpha\|x\|_2$,所以 I 是有界的,因为 X_2 和 X_1 都是 Banach 空间,所以利用有界逆定理知 I^{-1} 是有界的. 从而存在 $\beta>0$ 使得对所有 $x\in X$,$\|I^{-1}x\|_2\leqslant\beta\|x\|_1$. 即对所有 $x\in X$ 有 $\|x\|_2\leqslant\beta\|x\|_1$. 这就完成了证明. ■

问题 2.3.7 设 X 在范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 下均为 Banach 空间. 若当 $\|x_n\|_1\to0$ 时必有 $\|x_n\|_2\to0$ 成立,证明存在 $\alpha>0,\beta>0$ 使得

$$\alpha\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant\beta\|x\|_2,\quad x\in X,$$

即这两个范数等价.

解答 假设没有这样的 β 存在,则对 $n=1,2,\cdots$,存在非零元 $x_n\in X$ 使得 $\|x_n\|_2\geqslant$

$n\|x_n\|_1$. 令

$$y_n=\frac{1}{\|x_n\|_2}x_n,$$

则 $\|y_n\|_2=1$ 且

$$\|y_n\|_1=\frac{1}{\|x_n\|_2}\|x_n\|_1<\frac{1}{n}.$$

此时有 $\|y_n\|_1\to 0$，但 $\|y_n\|_2$ 不收敛到 0. 这个矛盾证明了 β 的存在性. α 的存在性由问题 2.3.6 可以直接得到. ■

问题 2.3.8 设 $X=C[0,1]$，考虑 X 上的两个范数：L^p 范数 $\|\cdot\|_p$ 和上确界范数 $\|\cdot\|_\infty$. 证明若 $1\leqslant p<\infty$，则对所有 x 有

$$\|x\|_p\leqslant\|x\|_\infty.$$

但不存在 $\beta>0$ 使得对所有 x 有

$$\|x\|_\infty\leqslant\beta\|x\|_p.$$

这与问题 2.3.6 矛盾吗？

解答 对 $x\in[0,1]$，我们有

$$(\|x\|_p)^p=\int_0^1|x(t)|^p\mathrm{d}t\leqslant(\|x\|_\infty)^p,$$

$$\|x\|_p\leqslant\|x\|_\infty.$$

对 $0\leqslant t\leqslant 1/n$，令 $y_n(t)=n-n^2t$，而对 $1/n<t\leqslant 1$，令 $y_n(t)=0$. 则 $y_n\in C[0,1]$ 且 $0\leqslant y_n(t)\leqslant n$. 设

$$x_n(t)=(y_n(t))^{1/p},\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

则 $x_n\in C[0,1]$，$\|x_n\|_\infty=n^{1/p}$ 且

$$(\|x_n\|_p)^p=\int_0^1 y_n(t)\mathrm{d}t=\int_0^{1/n}(n-n^2t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}.$$

对任取的 $n=1,2,\cdots$ 这都是对的. 所以不存在 β 使得对所有 n 有 $\|x_n\|_\infty\leqslant\beta\|x_n\|_p$. 因为当 $1\leqslant p<\infty$ 时，X 在 $\|\cdot\|_p$ 下不是 Banach 空间，所以这与问题 2.3.6 不矛盾. ■

问题 2.3.9 设 X 和 Y 是 Banach 空间，$F\in BL(X,Y)$. 设 $R(F)$ 和 $Z(F)$ 分别是 F 的值域空间和零空间. 证明 $R(F)$ 在 Y 中是闭的当且仅当 $R(F)$ 与 $X/Z(F)$ 线性同胚.

解答 设 $Z=Z(F)$ 且 $R(F)$ 在 Y 中是闭的. 定义 $G:X/Z\to R(F)$ 为

$$G(x+Z)=F(x),\quad x\in X.$$

G 是线性的且为满射. 若 $G(x+Z)=0$，则 $F(x)=0$，即 $x\in Z$，也就是说 $x+Z$ 是 X/Z 中的零元. 所以 G 是双射. 对 X 中任意 x，存在 Z 中序列 $\{z_n\}$ 使得 $\|x+z_n\|\to\|x+Z\|$. 任取 n 有

$$\|G(x+Z)\|=\|F(x)\|=\|F(x+z_n)\|\leqslant\|F\|\,\|x+z_n\|.$$

令 $n\to\infty$ 有

$$\|G(x+Z)\|\leqslant\|F\|\,\|x+Z\|.$$

所以 G 是连续的. 由于 X/Z 和 $R(F)$ 均是 Banach 空间，所以由开映射定理知 G 是开映射，即 G^{-1} 是连续的. 所以 G 是线性同胚.

反过来，设 $R(F)$ 与 X/Z 线性同胚. 则由于 X/Z 是 Banach 空间，所以 $R(F)$ 也是 Banach 空间. 从而 $R(F)$ 在 Y 中是闭的. 这就完成了证明. ■

问题 2.3.10 证明每个可分的 Banach 空间都线性同胚于 l^1/Z，其中 Z 是 l^1 的某个闭子空间.

解答 设 X 是可分的 Banach 空间，E 是 X 的可数稠密子集，

$$E_1 = \{x \in E: \|x\| < 1\} = E \cap U(0,1),$$

其中 $U(0,1)$ 是 X 的开单位球. 由于 E_1 是可数的，所以可设 $E_1 = \{u_n: n=1,2,\cdots\}$. 若 $y \in l^1$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|y(n)u_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} |y(n)| \|u_n\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |y(n)| < \infty.$$

所以级数 $\sum y_n u_n$ 在 X 中绝对收敛. 因为 X 是 Banach 空间，所以它在 X 中必收敛. 设

$$F(y) = \sum_{n=1}^{\infty} y(n)u_n, \quad y \in l^1.$$

这定义了一个映射 $F: l^1 \to X$. F 显然是线性的. 又

$$\|F(y)\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|y(n)u_n\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |y(n)| = \|y\|_1,$$

所以 F 是有界的.

设 $x \in X$，$\|x\| < \frac{1}{2}$，则存在 $u \in E$ 使得 $\|x-u\| < \frac{1}{4}$. 我们有

$$\|u\| \leqslant \|u-x\| + \|x\| < \frac{3}{4}.$$

所以 $u \in E_1$，故存在某个 n_1 使得 $u = u_{n_1}$. 设已经找到正整数 $n_1, \cdots, n_r$ 使得 $n_1 < n_2 < \cdots < n_r$ 且

$$\left\| x - u_{n_1} - \frac{1}{2}u_{n_2} - \cdots - \frac{1}{2^{r-1}}u_{n_r} \right\| < \frac{1}{2^{r+1}}. \tag{1}$$

设 $x_r = \sum_{i=1}^{r} z^{-i+1} u_{n_i}$，则

$$\|x - x_r\| < 2^{-r-1}, \quad \|2^r(x-x_r)\| < \frac{1}{2}.$$

若 $u \in E$ 且 $\|2^r(x-x_r)-u\| < \frac{1}{4}$，则由上面的证明知 $u \in E_1$. 又因为 $2^r(x-x_r)$ 的每个邻域都包含 E 的无穷多个元，所以存在 $n_{r+1} > n_r$ 使得

$$\|2^r(x-x_r) - u_{n_{r+1}}\| < \frac{1}{4},$$

即

$$\left\| x - x_r - \frac{1}{2r} u_{n_{r+1}} \right\| < \frac{1}{2^{r+2}}.$$

这和(1)式中用 $r+1$ 代替 r 后是一样的. 这个过程可以无穷地继续下去. 所以可以得到正整数的严格增长序列$\{n_r\}$使得对所有 r,(1)式成立.

设 $y(n_i)=2^{-i+1}(i=1,2,\cdots)$,而对余下的 j 令 $y(j)=0$. 则 $y\in l^1$,

$$F(y) = \sum_{j=1}^{\infty} y(j)u_j = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i+1} u_{n_i} = \lim_{r\to\infty} x_r.$$

但由(1)式知 $x_r\to x$,所以 $F(y)=x$. 这就证明了当 $\|x\|<1/2$ 时有 $x\in R(F)$. 任取 $x\in X$,可以找到 $k>0$ 使得 $k\|x\|<1/2$,所以 $kx\in R(F)$. 所以有 $R(F)=X$,从而 $R(F)$在 X 中是闭的. 由问题 2.3.9(用 l^1,X 来代替 X,Y)知 $X=R(F)$线性同胚于 l^1/Z,其中 $Z=Z(F)$. 这就完成了证明. ■

问题 2.3.11 设 Y 和 Z 是 Banach 空间 X 的闭子空间,使得 $X=Y+Z$. 证明存在 $\alpha>0$ 使得对 X 中每个 x 都有表示 $x=y+z$,其中 $y\in Y$,$z\in Z$ 且 $\|y\|+\|z\|\leqslant\alpha\|x\|$.

解答 因为 X 是 Banach 空间,Y,Z 是它的闭子空间,所以有 Y 和 Z 也是 Banach 空间. 因此 $W=Y\times Z$ 在下述范数下也是 Banach 空间:

$$\|(y,z)\| = \|y\| + \|z\|, \quad y\in Y, \quad z\in Z.$$

由于映射$(y,z)\to y$ 和$(y,z)\to z$ 是线性的,所以它们的和 $F:W\to X$:

$$F(y,z) = y+z, \quad y\in Y, z\in Z,$$

是线性的. 又因为

$$\|F(y,z)\| = \|y+z\| \leqslant \|y\| + \|z\| = \|(y,z)\|,$$

所以 F 是有界的. 由 $X=Y+Z$ 知 F 是满射. 所以由开映射定理知 F 映 W 的开子集到 X 的开子集. 设 U 是 W 中的开单位球,$V=F(U)$,则 V 是开的且 $0=F(0,0)\in V$. 因此存在 $r>0$ 使得

$$\{x\in X:\|x\|<r\}\subset V.$$

设 $x\in X$. 若 $x\neq 0$,取 $x_1=\dfrac{r}{2\|x\|}x$,则 $\|x_1\|=\dfrac{1}{2}r<r$,因此有 $x_1\in V=F(U)$. 所以

$$x_1 = F(y_1,z_1) = y_1+z_1, \quad (y_1,z_1)\in U.$$

从而

$$x = \frac{2}{r}\|x\|x_1 = \frac{2\|x\|}{r}y_1 + \frac{2\|x\|}{r}z_1 = y+z,$$

其中

$$y = \frac{2\|x\|}{r}y_1 \in Y, \quad z = \frac{2\|x\|}{r}z_1 \in Z.$$

因为$(y_1,z_1)\in U$,所以

$$\|y\| + \|z\| = \frac{2\|x\|}{r}(\|y_1\| + \|z_1\|) = \frac{2\|x\|}{r}\|(y_1,z_1)\| \leqslant \frac{2\|x\|}{r}.$$

这就证明了当 $\alpha=2/r$ 时结论成立. ■

问题 2.3.12 $L^1(\mathbb{R})$中的 Fourier 变换$\hat{x}$由下式给出：

$$\hat{x}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iut}x(u)du,\quad t\in\mathbb{R}.$$

设 $F(x)=\hat{x}, x\in L^1(\mathbb{R})$. 证明 F 映 $L^1(\mathbb{R})$到 $C_0(\mathbb{R})$的真子空间.

解答 在这里我们要利用 Fourier 变换的一些基本性质①. 我们知道对所有 $x\in L^1(\mathbb{R})$有$\hat{x}\in C_0(\mathbb{R})$. 显然 F 是线性的且

$$|\hat{x}(t)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|e^{-iut}x(u)|du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|x(u)|du.$$

所以

$$\|F(x)\|_\infty=\|\hat{x}\|_\infty\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|x\|_1,\quad x\in L^1(\mathbb{R}).$$

因此 $F:L^1(\mathbb{R})\to C_0(\mathbb{R})$是有界线性映射. 易知若 $x\in L^1(\mathbb{R})$,且对所有 $t\in\mathbb{R}$ 有$\hat{x}(t)=0$,则 x 是$L^1(\mathbb{R})$中的零元. 这说明 F 是单的. 现在假设 F 是满射. 由于 $L^1(\mathbb{R})$和 $C_0(\mathbb{R})$都是 Banach 空间,所以 F 的逆$G:C_0(\mathbb{R})\to L^1(\mathbb{R})$必是有界线性映射.

对 $n=1,2,3,\cdots$,设

$$y_n(t)=\begin{cases}1, & |t|\leqslant n-1,\\ \dfrac{n+1-|t|}{2}, & n-1<|t|\leqslant n+1,\\ 0, & |t|>n-1,\end{cases}$$

则 $y_n(-t)=y_n(t)$；所以

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}\,\hat{y}_n(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iut}y_n(u)du=2\int_0^{\infty}(\cos tu)y_n(u)du\\&=2\int_0^{n-1}\cos tu\,du+2\int_{n-1}^{n+1}(\cos tu)\frac{n+1-u}{2}du\\&=\frac{1}{t^2}[\cos(n-1)t-\cos(n+1)t].\end{aligned}$$

从而有$\hat{y}_n(t)=\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}x_n(t)$,其中

$$x_n(t)=\frac{\sin t\sin nt}{t^2}.$$

由于

$$|x_n(t)|\leqslant\frac{1}{t^2},\quad |x_n(t)|=\left|\frac{\sin t}{t}\right|\left|\frac{\sin nt}{nt}\right|n\leqslant n,$$

所以

---

① 见 Rudin, W., 实分析与复分析(1966), ch. 9.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_n(t)|\,dt \leqslant \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2}dt + \int_{-1}^{1} n\,dt + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{t^2}dt = 1 + 2n + 1.$$

因此$\hat{y}_n = (2/\sqrt{2\pi})x_n \in L^1(\mathbb{R})$. Fourier 逆变换公式给出

$$y_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itu}\,\hat{y}_n(u)\,du,$$

$$y_n(-t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itu}\,\frac{2}{\sqrt{2\pi}}x_n(u)\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\hat{x}_n(t).$$

所以$\hat{x}_n(t) = \sqrt{\pi/2}\,y_n(-t) = \sqrt{\pi/2}\,y_n(t)$. 由于$\|y_n\|_\infty = 1$,所以有$\|\hat{x}_n\|_\infty = \sqrt{\pi/2}$. 另一方面,当 t 从 0 增长到 $\pi/2$ 时,$\frac{\sin t}{t}$就从 1 下降到 $2/\pi$,所以

$$\|x_n\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\,\frac{\sin nt}{t}\right| dt \geqslant \int_{0}^{\pi/2} \left|\frac{\sin t}{t}\,\frac{\sin nt}{t}\right| dt$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} \left|\frac{\sin nt}{t}\right| dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{n\pi/2} |\sin u|\,\frac{du}{u}.$$

而

$$\int_{0}^{\infty} \left|\frac{\sin u}{u}\right| du = \infty,$$

所以当 $n\to\infty$时有$\|x_n\|_1 \to \infty$. 所以$\|G(\hat{x}_n)\|_1 \to \infty$. 但$\|\hat{x}_n\|_\infty = \sqrt{\pi/2}$. 这个矛盾证明了 $G = F^{-1}$不可能是有界的. 所以 F 不是满射. 这就完成了证明. ■

问题 2.3.13 设 X, Y, Z 是 Banach 空间,$G \in BL(X,Z)$和 $H \in BL(Y,Z)$. 设对 X 中的每个 x,方程 $G(x) = H(y)$在 Y 中有唯一解 y. 证明由此定义的映射 $F: X \to Y$,$F(x) = y$,在 $BL(X,Y)$中.

解答 由题设条件知 $F: X \to Y$ 的定义是有意义的. 设 $F(x_1) = y_1$,$F(x_2) = y_2$,则

$$G(kx_1 + x_2) = kG(x_1) + G(x_2) = kH(y_1) + H(y_2) = H(ky_1 + y_2).$$

所以

$$F(kx_1 + x_2) = ky_1 + y_2 = kF(x_1) + F(x_2).$$

所以 F 是线性的. 为了证明 F 是连续的. 只要证 F 的图像是闭的即可. 设在 X 中 $x_n \to x$ 且在 Y 中$F(x_n) \to y$. 若 $F(x_n) = y_n$,则 $G(x_n) = H(y_n)$. 因为 G 和 H 都是连续的,所以

$$G(x_n) \to G(x), \quad H(y_n) \to H(y).$$

因此有 $G(x) = H(y)$,即 $F(x) = y$. 所以 F 的图像是闭的. ■

问题 2.3.14 设 X, Y, Z 是 Banach 空间,$\{G_\alpha : \alpha \in A\}$是一族从 Y 到 Z 的有界线性映射. 设若对所有 A 中的α 有 $G_\alpha(y) = 0$,则必有 $y = 0$. 证明若 $F: X \to Y$ 是线性的且对 A 中每个 α,$G_\alpha \circ F \in BL(X,Z)$,则 $F \in BL(X,Y)$.

解答 只要证 F 的图像是闭的即可. 设在 X 中 $x_n \to x$ 且在 Y 中 $F(x_n) \to y$. 令 $F(x_n) = y_n$ 则 $y_n \to y$ 且对所有 α 有 $G_\alpha(y_n) \to G_\alpha(y)$. 但

$$G_\alpha(y_n) = G_\alpha(F(x_n)) = (G_\alpha \circ F)(x_n) \to (G_\alpha \circ F)(x).$$

所以

$$G_a(y) = (G_a \circ F)(x) = G_a(F(x)),$$

即 $G_a(y-F(x))=0$. 因为对所有 a 这都是对的，所以由假设必有 $y-F(x)=0$，即 $y=F(x)$. ■

问题 2.3.15 对 $x\in L^1[-\pi,\pi]$，设

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}x(t)dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

对整数集合 E，设

$$C_E = \{x \in C[-\pi,\pi]: \text{对所有 } n \notin E \text{ 有} \hat{x}(n) = 0\}.$$

证明 C_E 是 $C[-\pi,\pi]$的闭子空间. 再证明若对每个 $x\in C_E$，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{x}(n)| < \infty. \tag{2}$$

则存在 $a>0$ 使得对每个 $x\in C_E$，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{x}(n)| \leqslant a\|x\|_\infty.$$

解答 设 $x,y\in C_E, k\in\mathbb{K}$ 且 $z=kx+y$. 则对所有 $n\notin E$，

$$\hat{z}(n) = k\hat{x}(n) + \hat{y}(n) = 0,$$

所以 $z\in C_E$. 这就证明了 C_E 是 $C[-\pi,\pi]$的子空间.

设 $x\in\overline{C_E}$. 则存在 C_E 中的序列$\{x_n\}$使得在 $C[-\pi,\pi]$中 $x_n\to x$，即 $\|x_n-x\|_\infty\to 0$. 由于

$$\hat{x}(m) - \hat{y}(m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-imt}[x(t)-y(t)]dt,$$

$$|\hat{x}(m) - \hat{y}(m)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x(t)-y(t)|\,dt$$

$$\leqslant \|x-y\|_\infty, \tag{3}$$

所以当 $n\to\infty$时有$|\hat{x}_n(m)-\hat{x}(m)|\leqslant\|x_n-x\|_\infty\to 0$. 但是对 $m\notin E$ 有$\hat{x}_n(m)=0$. 因此对所有 $m\notin E$ 有$\hat{x}(m)=0$，即 $x\in C_E$. 这证明了 C_E 在$C[-\pi,\pi]$中是闭的.

为了下一部分，设$\mathbb{Z}$是所有整数的集合，$l^1(\mathbb{Z})$是所有函数 $y:\mathbb{Z}\to\mathbb{K}$ 使得

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |y(m)| < \infty$$

的集合. 类似于 l^1，空间 $l^1(\mathbb{Z})$在范数

$$\|y\|_1 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |y(m)|, \quad y \in l^1(\mathbb{Z})$$

下是 Banach 空间. 若(2)式成立，则对所有 $x\in C_E, \hat{x}\in l^1(\mathbb{Z})$. 设 $F(x)=\hat{x}$，则 $F:C_E\to l^1(\mathbb{Z})$是线性的. 下证 F 的图像是闭的. 设在 C_E 中 $x_n\to x$ 且在 $l^1(\mathbb{Z})$中 $F(x_n)\to y$. 则利用(3)式和 $\|\cdot\|_1$ 的定义，对每个 $m\in\mathbb{Z}$ 有

$$\begin{aligned}|\, y(m)-\hat{x}(m)\,| &\leqslant |\, y(m)-\hat{x}_n(m)\,|+|\,\hat{x}_n(m)-\hat{x}(m)\,| \\ &\leqslant \|\, y-\hat{x}_n\,\|_1+\|\, x_n-x\,\|_\infty \\ &= \|\, y-F(x_n)\,\|_1+\|\, x_n-x\,\|_\infty .\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$,则对所有 $m\in\mathbb{Z}$ 有 $y(m)=\hat{x}(m)$,即 $y=\hat{x}=F(x)$. 所以 F 的图像是闭的. 因为 C_E 和 $l^1(\mathbb{Z})$都是 Banach 空间,所以 F 是有界的. 对所有 $x\in C_E$,

$$\|\,\hat{x}\,\|_1 = \|\,F(x)\,\|_1 \leqslant \|\,F\,\|\;\|\,x\,\|_\infty ,$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\,\hat{x}(n)\,| = \|\,\hat{x}\,\|_1 \leqslant \|\,F\,\|\;\|\,x\,\|_\infty .$$

这就完成了证明. ■

问题 2.3.16 设 $\|\cdot\|$ 是 $C[a,b]$上的完备范数使得若 $\|\,x_n-x\,\|\to 0$,则对每个 $t\in[a,b]$,$x_n(t)\to x(t)$. 证明 $\|\cdot\|$ 等价于上确界范数 $\|\cdot\|_\infty$.

解答 设 X_1 表示 $C[a,b]$赋有给定的范数 $\|\cdot\|$,X_2 表示 $C[a,b]$赋有上确界范数 $\|\cdot\|_\infty$. 它们都是 Banach 空间. 考虑恒等映射 $I:X_2\to X_1$. 则 I 是线性的. 为了证它的图像是闭的. 设在 X_2 中 $x_n\to x$,在 X_1 中 $I(x_n)\to y$,即当 $n\to\infty$时有 $\|\,x_n-x\,\|_\infty\to 0$ 且 $\|\,I(x)-y\,\|\to 0$. 所以

$$\|\,x_n-y\,\| = \|\,I(x_n)-y\,\| \to 0.$$

由题设条件知对每个 t 有 $x_n(t)\to y(t)$. 由于

$$|\,x_n(t)-x(t)\,| \leqslant \|\,x_n-x\,\|_\infty \to 0,$$

从而对每个 $t\in[a,b]$均有 $y(t)=x(t)$. 因此 $y=x=I(x)$. 这就证明了 I 的图像是闭的. 由闭图像定理知 I 是连续的. 所以存在 $\alpha>0$ 使得对所有 x 有 $\|\,Ix\,\|\leqslant\alpha\,\|\,x\,\|_\infty$. 类似地(或者利用问题 2.3.6),知存在 $\beta>0$ 使得对所有 x 有 $\|\,x\,\|_\infty\leqslant\beta\,\|\,x\,\|$. 这就证明了要证的结果. ■

问题 2.3.17 设 $\|\cdot\|$ 是 $C^1[a,b]$上的完备范数使得若 $\|\,x_n-x\,\|\to 0$,则 $x_n(a)\to x(a)$ 且对每个$[a,b]$中的 t 有 $x_n'(t)\to x'(t)$. 证明 $\|\cdot\|$ 等价于 $\|\cdot\|_1$,其中

$$\|\,x\,\|_1 = \|\,x\,\|_\infty + \|\,x'\,\|_\infty , \quad x\in C^1[a,b].$$

由此推出由下式给出的范数 $\|\cdot\|_2$:

$$\|\,x\,\|_2 = |\,x(a)\,| + \|\,x'\,\|_\infty , \quad x\in C^1[a,b]$$

等价于 $\|\cdot\|_1$.

解答 设 X 和 X_1 分别表示 $C^1[a,b]$赋有范数 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_1$. 则它们都是 Banach 空间. 考虑恒等映射 $I:X\to X_1$. 则 I 是线性的. 为了证明它的图像是闭的,设在 X 中且 $x_n\to x$ 且在 X_1 中$I(x_n)\to y$,即 $\|\,x_n-x\,\|\to 0$ 及 $\|\,I(x_n)-y\,\|_1\to 0$. 则由假设有 $x_n(a)\to x(a)$且对每个 t 有 $x_n'(t)\to x'(t)$. 而且

$$\|\,x_n-y\,\|_\infty + \|\,x_n'-y'\,\|_\infty = \|\,x_n'-y\,\|_1 = \|\,I(x_n)-y\,\|_1 \to 0.$$

这就得到

$$\|\,x_n-y\,\|_\infty \to 0, \quad \|\,x_n'-y'\,\|_\infty \to 0.$$

所以对每个 $t\in[a,b]$,

$$x_n(t)\to y(t), \quad x_n'(t)\to y'(t).$$

从而有 $y(a)=x(a)$且 $y'(t)=x'(t)$. 所以

$$y(t)-y(a)=\int_a^t y'(s)\mathrm{d}s=\int_a^t x'(s)\mathrm{d}s=x(t)-x(a).$$

这说明 $y(t)=x(t)$, $y=x=I(x)$. 所以 I 的图像是闭的. 因为 X 和 X_1 是 Banach 空间, 所以由闭图像定理知 I 是连续的. 因此存在 $\alpha>0$ 使得 $\|Ix\|_1\leqslant\alpha\|x\|$, 即 $\|x\|_1\leqslant\alpha\|x\|$. 利用问题 2.3.6, 则可以找到 $\beta>0$ 使得 $\|x\|\leqslant\beta\|x\|_1$. 这就证明了 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_1$ 等价.

最后, 因为 $C^1[a,b]$在 $\|\cdot\|_2$ 下是 Banach 空间, 所以当用 $\|\cdot\|_2$ 代替 $\|\cdot\|$ 时, 利用已证结果, 就有 $\|\cdot\|_2$ 和 $\|\cdot\|_1$ 的等价性. ■

问题 2.3.18 设 $1<p<\infty$, $1/p+1/q=1$ 且 $\{k_n\}$是$\mathbb{K}$ 中的序列. 若对 l^p 中每个 x, $\sum k_j x(j)$ 均收敛, 证明$\{k_n\}\in l^q$.

解答 首先证明若 $a_n\geqslant 0$, $s_n=a_1+\cdots+a_n$ 且 $\sum a_n$ 为发散的, 则当 $p>1$ 时, $\sum a_n s_n^{-p}$ 必收敛且当 $p=1$ 时, $\sum a_n s_n^{-p}$ 必发散.

若 $1<p\leqslant 2$, 则

$$\begin{aligned}(s_n)^{p-1}-(s_{n-1})^{p-1}&=(s_n-s_{n-1})(p-1)t^{p-2}\quad(s_{n-1}\leqslant t\leqslant s_n)\\&\geqslant a_n(p-1)(s_n)^{p-2}.\end{aligned}$$

因此有

$$(s_{n-1})^{-p+1}-(s_n)^{-p+1}\geqslant a_n(p-1)(s_n)^{-1}(s_{n-1})^{-p+1}\geqslant(p-1)a_n(s_n)^{-p}.$$

这就证明了若 $1<p\leqslant 2$, 则 $\sum a_n s_n^{-p}$ 必收敛. 当 $p>2$ 时, 若 $s_n>1$, 则必有 $a_n s_n^{-p}\leqslant a_n s_n^{-2}$. 所以若 $p>2$, $\sum a_n s_n^{-p}$ 也收敛.

对 $p=1$, 只要 $s_n\leqslant 2s_{n-1}$, 就有

$$\log\left(\frac{s_n}{s_{n-1}}\right)=\log\left(1+\frac{a_n}{s_{n-1}}\right)\leqslant\frac{a_n}{s_{n-1}}\leqslant\frac{2a_n}{s_n}.$$

若对无穷多个 n 有 $a_n/s_n>1/2$, 则 $\sum(a_n/s_n)$发散. 因此我们可以假设存在 n_0. 使得任取 $n\geqslant n_0$ 有 $a_n/s_n\leqslant 1/2$. 对 $n\geqslant n_0$ 有

$$2a_n\leqslant s_n,\quad a_n\leqslant s_{n-1},\quad s_n\leqslant 2s_{n-1}.$$

所以

$$\frac{a_n}{s_n}\geqslant\frac{1}{2}\log(s_n/s_{n-1}),\quad n\geqslant n_0.$$

因此 $\sum(a_n/s_n)$必发散. 这就证明了所要的结论.

为了证明$\{k_n\}\in l^q$, 假设 $\sum|k_n|^q=\infty$. 取 $a_n=|k_n|^q$ 且令

$$x(n)=\begin{cases}\dfrac{a_n}{s_n k_n}, & k_n\neq 0,\\ 0, & k_n=0.\end{cases}$$

则对 $k_n \neq 0$，

$$|x(n)|^p = \left(\frac{|k_n|^{q-1}}{s_n}\right)^p = \frac{|k_n|^q}{s_n^p} = a_n s_n^{-p},$$

且 $k_n x(n) = a_n / s_n$. 若 $k_n = 0$，则 $x(n) = 0 = a_n$. 所以 $\sum |x(n)|^p = \sum a_n s_n^{-p}$ 收敛，而 $\sum k_n x(n) = \sum (a_n / s_n)$ 发散. 这就与假设条件矛盾. ■

问题 2.3.19（见问题 2.2.17） 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$ 和 $1/p + 1/q = 1$. 设无穷矩阵 (k_{ij}) 表示映射 $F: l^p \to l^q$

$$F(x)(i) = \sum_{j=1}^{\infty} k_{ij} x(j), \quad i = 1, 2, \cdots, \tag{4}$$

我们假设对所有 $i \geqslant 1$ 和 $x \in l^p$，这个级数均收敛. 证明 F 是有界线性映射.

解答 首先证明若对每个 $x \in l^p$，$\sum k_n x(n)$ 均收敛，则必有 $\{k_n\} \in l^q$. 若 $1 < p < \infty$，这已由问题 2.3.18 给出. 若 $p = \infty$，则 $q = 1$. 设

$$x(j) = \begin{cases} \dfrac{|k_j|}{k_j}, & k_j \neq 0, \\ 1, & k_j = 0, \end{cases}$$

则 $x \in l^\infty$ 且 $\|x\|_\infty = 1$. 对所有 j 有 $k_j x(j) = |k_j|$. 所以由假设知 $\sum |k_j| = \sum k_j x(j)$ 收敛. 即有 $(k_n) \in l^1$.

若 $p = 1$，则 $q = \infty$. 假设 (k_n) 是无界的. 则能找到 $n_1, n_2, \cdots$ 使得 $n_1 < n_2 < \cdots$ 且

$$k_{n_1} \neq 0, \quad |k_{n_r}| > 2^r |k_{n_1}|, \quad r = 2, 3, \cdots$$

设对 $r = 1, 2, \cdots$ 令 $x(n_r) = 2^{-r}$，而对余下的 j 令 $x(j) = 0$. 则 $x \in l^1$ 且

$$|k_{n_r} x(n_r)| > |k_{n_1}|, \quad r = 2, 3, \cdots$$

所以当 $j \to \infty$ 时，$k_j x(j)$ 不收敛到 0，所以即使 $x \in l^1$，$\sum k_j x(j)$ 也不收敛. 这个矛盾就证明了 $\{k_n\}$ 必是有界的，即 $\{k_n\} \in l^\infty$. 就证得了所要的结论.

由于(4)式中的级数对所有 $x \in l^p$ 及 $i \geqslant 1$ 都收敛. 所以若

$$z_i(j) = k_{ij}, \quad j \geqslant 1, i \geqslant 1,$$

则由上面证明的结论可知 $z_i \in l^q$. 所以对 $i \geqslant 1$ 及 $x \in l^p$ 有

$$|F(x)(i)| \leqslant \|z_i\|_q \|x\|_p. \tag{5}$$

当 $p = \infty, q = 1$ 或者 $p = 1, q = \infty$ 时，上式直接由(4)式可以得到. 若 $1 < p < \infty$，这由 Hölder 不等式给出.

显然由(4)式定义的 F 是线性的. 为了证明 F 的连续性，由于 l^p 和 l^q 都是 Banach 空间，仅需证明 F 的图像是闭的即可.

设在 l^p 中 $x_n \to x$ 且在 l^q 中 $F(x_n) \to y$. 对 $i = 1, 2, \cdots$，由(5)式得

$$|F(x_n)(i) - F(x)(i)| = |F(x_n - x)(i)| \leqslant \|z_i\|_q \|x_n - x\|_p.$$

所以当 $n\to\infty$ 时有 $F(x_n)(i)\to F(x)(i)$. 但是因为 $\|F(x_n)-y\|_q\to 0$，因此有 $F(x_n)(i)\to y(i)$. 所以对所有 i 有 $y(i)=F(x)(i)$，即 $y=F(x)$. 这就证明了 F 的图像是闭的. 从而完成了证明. ■

问题 2.3.20 设 X 和 Y 是 Banach 空间. 设 Z 是 X 的子空间，$F:Z\to Y$ 是线性映射，它的图像在 $X\times Y$ 中是闭的. 对 $z\in Z$，设

$$\|z\|_F=(\|z\|^2+\|F(z)\|^2)^{1/2}.$$

证明 Z 在这个范数下是 Banach 空间且 $F\in BL(Z,Y)$[$\|\cdot\|_F$ 称为 F 的图范数.]

解答 显然对 Z 中所有 z 有 $\|z\|\leqslant\|z\|_F$ 且 $\|F(z)\|\leqslant\|z\|_F$. 设 $\{z_n\}$ 关于范数 $\|\cdot\|_F$ 是 Z 中的柯西列. 设 $y_n=F(z_n)$，则

$$\|z_n-z_m\|\leqslant\|z_n-z_m\|_F,$$

$$\|F(z_n)-F(z_m)\|=\|F(z_n-z_m)\|\leqslant\|z_n-z_m\|_F.$$

这就证明了 $\{z_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 分别是 X 和 Y 中的柯西列. 因为 X 和 Y 是 Banach 空间，所以存在 $z\in X$ 和 $y\in Y$ 使得 $z_n\to z$ 和 $y_n\to y$. 从而在 $X\times Y$ 中 $(z_n,y_n)\to(z,y)$. 因为 (z_n,y_n) 属于 F 的图像且 F 的图像在 $X\times Y$ 中是闭的，所以 (z,y) 属于 F 的图像. 这说明 $z\in Z$ 和 $y=F(z)$. 从而

$$\|z_n-z\|_F^2=\|z_n-z\|^2+\|F(z_n-z)\|^2=\|z_n-z\|^2+\|y_n-y\|^2\to 0.$$

所以在 Z 中关于 $\|\cdot\|_F$ 有 $z_n\to z$. 所以 Z 是 Banach 空间. 因为 $\|F(z)\|\leqslant\|z\|_F$，所以 F 是连续的. 这样就完成了证明. ■

CHAPTER 3

第3章 对偶性

在本章中我们研究赋范空间与其对偶空间的关系. 在 3.1 节中,我们找出了几个典型赋范空间的对偶空间,引入了自反性. 在 3.2 节中,我们将着手处理弱收敛问题.

3.1 对偶空间

设 X 为赋范空间,我们称 $BL(X,\mathbb{K})$ 为 X 的**对偶空间或共轭空间**,记为 X'. 这个空间总为 Banach 空间. 对 $x'\in X'$,我们有

$$\|x'\| = \sup\{|x'(x)| : x\in X, \|x\|\leqslant 1\},$$

对 $x\in X$,由问题 1.4.4 知

$$\|x\| = \sup\{|x'(x)| : x'\in X', \|x'\|\leqslant 1\}.$$

进一步地

$$x_1' = x_2' \quad\Leftrightarrow\quad \text{任取 } x\in X \text{ 有} \quad x_1'(x) = x_2'(x);$$

$$x_1 = x_2 \quad\Leftrightarrow\quad \text{任取 } x'\in X' \text{ 有} \quad x'(x_1) = x'(x_2).$$

若 x' 为可分的,则 X 为可分的(见问题 3.1.5).

对 $x\in X$,定义 $f_x\in X'\to\mathbb{K}$ 为

$$f_x(x') = x'(x), \quad x'\in X',$$

则 f_x 为 X' 上的有界线性泛函且 $\|f_x\| = \|x\|$. 设 J 定义在 X 上为

$$J(x) = f_x, \quad x\in X.$$

则 $J: X\to X''$ 为线性等距,J 称为从 X 到 X'' 的**典范映射**. 这个典范映射不一定为满射. 若 J 为满射,则称 X 为**自反的**. 一般来讲,若 $\widetilde{X}$

为 J 的值域在 X'' 中的闭包，则 $\widetilde{X}$ 为 Banach 空间，X 与 $\widetilde{X}$ 的某个稠密子空间线性等距同构. $\widetilde{X}$ 为 X 的**完备化**.

若 X' 与赋范空间 Y 线性等距同构，我们称 X' 等于 Y. 在这种意义下，若在 $\mathbb{K}^n$ 上赋予范数 $\|\cdot\|_p$，则其对偶空间为上面赋予范数 $\|\cdot\|_q$ 的 $\mathbb{K}^n$，其中 $1/p+1/q=1$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，$1\leqslant q\leqslant\infty$. l^p 的对偶空间为 l^q（见问题 3.1.4），L^p 的对偶空间为 L^q，其中 $1/p+1/q=1$，$1\leqslant p<\infty$，$1<q\leqslant\infty$. 但 l^∞ 的对偶空间不是 l^1（见问题 3.1.6）.

练习

1. 设 X 为赋范空间. 对 $x\in X$，定义 $f_x:X'\to\mathbb{K}$ 为

$$f_x(x')=x'(x),\quad x'\in X'.$$

求证：$f_x\in X''$ 且 $\|f_x\|=\|x\|$.

2. 求证：从 X 到 X'' 的典范映射为线性等距.

3. 若 $X=\mathbb{K}^n$ 上面赋予范数 $\|\cdot\|_p$，求证：X' 与 $\mathbb{K}^n$ 线性等距同构，其中的 $\mathbb{K}^n$ 上赋予范数 $\|\cdot\|_q$，$1/p+1/q=1$.

问题

问题 3.1.1 求证：l^1 的对偶空间为 l^∞.

解答 若 $y\in l^\infty$ 及 $x\in l^1$，则

$$\sum_{j=1}^{\infty}|y(j)x(j)|\leqslant\|y\|_\infty\sum_{j=1}^{\infty}|x(j)|=\|y\|_\infty\|x\|_1<\infty.$$

因此对每一个 $x\in l^1$，

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}y(j)x(j)$$

在 $\mathbb{K}$ 中存在，f 将 l^1 映到 $\mathbb{K}$，它显然为线性的，

$$|f(x)|\leqslant\|y\|_\infty\|x\|_1,\quad x\in l^1,$$

从而 $\|f\|\leqslant\|y\|_\infty$. 由于 $f(e_i)=y_i$ 对 $i\geqslant1$ 成立，故

$$|y(i)|=|f(e_i)|\leqslant\|f\|\,\|e_i\|=\|f\|,\quad i=1,2,\cdots.$$

所以有 $\|y\|_\infty\leqslant\|f\|$. 这样每取 $y\in l^\infty$，我们就将 y 对应于 $f=f_y\in(l^1)'$ 使得 $\|f_y\|=\|y\|$. 设

$$F(y)=f_y,\quad y\in l^\infty,$$

其中

$$f_y(x)=\sum_{j=1}^{\infty}y(j)x(j),\quad x\in l^1.$$

这就定义了映射 $F:l^\infty\to(l^1)'$. 易证 F 为线性算子,由于 $\|F(y)\|=\|f_y\|=\|y\|$,故它为线性等距.

为证 F 为满射,设 g 为 l^1 上的有界线性泛函. 设 $y(j)=g(e_j)$,$j\geqslant 1$. 则

$$|y(j)|=|g(e_j)|\leqslant\|g\|\,\|e_j\|=\|g\|.$$

因此有 $\|y\|_\infty\leqslant\|g\|$,从而 $y\in l^\infty$.

若 $x\in l^1$,令

$$x_n=x(1)e_1+\cdots+x(n)e_n=(x(1),x(2),\cdots,x(n),0,0,\cdots).$$

则

$$x_n(j)-x(j)=\begin{cases}0, & 1\leqslant j<n,\\ -x(j), & j>n.\end{cases}$$

$$\|x_n-x\|_1=\sum_{j=n+1}^{\infty}|x(j)|.$$

由于 $x\in l^1$,故当 $n\to\infty$ 时,上式收敛到 0. 这说明在 l^1 中 $x_n\to x$,从而 $g(x_n)\to g(x)$. 因此

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}g(x_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}x(j)g(e_i)=\sum_{j=1}^{\infty}x(j)y(j)=f_y(x).$$

于是 $g=f_y=F(y)$. 这证明了 F 为满射,从而 F 是从 l^∞ 到 $(l^1)'$ 的线性等距同构. 故 l^∞ 为 $(l^1)'$. ■

问题 3.1.2 求证:c_{00} 的对偶空间为 l^1,c_0 的对偶空间也是 l^1.

解答 设 X 为 c_{00} 或 c_0,$y\in l^1$. 若 $x\in c_0$,则

$$\sum_{j=1}^{\infty}|y(j)x(j)|\leqslant\|x\|_\infty\sum_{j=1}^{\infty}|y(j)|=\|x\|_\infty\|y\|_1<\infty.$$

故任取 $x\in X=c_{00}$ 或 c_0,

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}y(j)x(j)$$

在 $\mathbb{K}$ 中存在. 显然映射 $f:X\to\mathbb{K}$ 为线性的,

$$|f(x)|\leqslant\|y\|_1\|x\|_\infty,\quad x\in X.$$

从而 $\|f\|\leqslant\|y\|_1$. 设

$$k_j=\begin{cases}|y(j)|/y(j), & y(j)\neq 0,\\ 0, & y(j)=0.\end{cases}$$

则 $k_jy(j)=|y(j)|$ 且 $|k_j|\leqslant 1$ 对 $j\geqslant 1$ 均成立.

设

$$u_n=k_1e_1+\cdots+k_ne_n=(k_1,k_2,\cdots,k_n,0,0,\cdots).$$

则 $u_n\in c_{00}\subset c_0$,$\|u_n\|_\infty\leqslant 1$,且

$$f(u_n)=\sum_{j=1}^{n}y(j)k_j=\sum_{j=1}^{n}|y(j)|,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |y(j)| = |f(u_n)| \leqslant \|f\| \|u_n\|_\infty \leqslant \|f\|.$$

上式对任取的 n 都成立. 令 $n\to\infty$ 有

$$\|y\|_\infty \leqslant \|f\|.$$

这样,每取 $y\in l^1$,与之对应 $f=f_y\in X'$ 使得 $\|f_y\| = \|y\|_1$. 设

$$F(y) = f_y, \quad y \in l^1,$$

其中

$$f_y(x) = \sum_{j=1}^{\infty} y(j)x(j), \quad x \in X.$$

这就定义了映射 $F: l^1 \to X'$. 易证 F 为线性算子,又由于 $\|F_y\| = \|f_y\| = \|y\|_1$,故它还是等距.

为证 F 为满射,设 g 为 X 上的有界线性泛函. 设 $g(e_j)=y(j)$. 如上面一样选取 k_j,令 $u_n=k_1e_1+\cdots+k_ne_n$. 则 $u_n\in X$, $\|u_n\|_\infty\leqslant 1$,且

$$g(u_n) = \sum_{j=1}^{n} k_j g(e_j) = \sum_{j=1}^{n} k_j y(j) = \sum_{j=1}^{n} |y(j)|.$$

因此

$$\sum_{j=1}^{n} |y(j)| = |g(u_n)| \leqslant \|g\|;$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |y(j)| \leqslant \|g\| < \infty.$$

所以 $y\in l^1$.

设 $x\in X$,令

$$x_n = x(1)e_1 + \cdots + x_ne_n = (x(1), x(2), \cdots, x(n), 0, 0, \cdots).$$

则 $x_n\in X$,

$$x(j) - x_n(j) = \begin{cases} 0, & 1 \leqslant j \leqslant n, \\ x(j), & j > n. \end{cases}$$

从而 $\|x-x_n\|_\infty = \sup\limits_{j>n}|x(j)|$. 由于 $x\in c_0$,故当 $n\to\infty$ 时, $\|x-x_n\|_\infty\to 0$. 因此在 X 中有 $x_n\to x$,从而 $g(x_n)\to g(x)$. 所以

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} x(j)g(e_j) = \sum_{j=1}^{\infty} x(j)y(j) = f_y(x).$$

因此有 $g=f_x=F(y)$. 这就证明了 F 为满射,因此 F 为从 l^1 到 X' 的线性等距同构. 所以无论 X 是 c_{00} 还是 c_0, X' 的对偶空间都为 l^1. ■

问题 3.1.3 求证: c 的对偶空间为 l^1.

解答 我们将用与问题 3.1.2 同样的方法. 设 $y\in l^1$. 若 $x\in c$,则当 $j\to\infty$ 时, $x(j)$ 收敛到某有限极限 λ. 由于 $|\lambda|\leqslant\|x\|_\infty$,我们有

$$|y(1)\lambda|+\sum_{j=1}^{\infty}|y(j+1)x(j)|\leqslant\|x\|_\infty\left\{|y(1)|+\sum_{j=1}^{\infty}|y(j+1)|\right\}$$
$$=\|x\|_\infty\|y\|_1<\infty.$$

故任取 $x\in c$，

$$f(x)=y(1)\lambda+\sum_{j=1}^{\infty}y(j+1)x(j)$$

在$\mathbb{K}$中存在.映射 $f:c\to\mathbb{K}$ 显然为线性的，且任取 $x\in c$ 有 $|f(x)|\leqslant\|y\|_1\|x\|_\infty$. 因此 $f\in c'$ 且 $\|f\|\leqslant\|y\|_1$. 正如在问题 3.1.2 解答中一样，我们可以选取 k_j 使得对 $j\geqslant1$ 有

$$k_jy(j)=|y(j)|,\quad |k_j|\leqslant1. \tag{1}$$

设 $e=(1,1,1,\cdots)$且

$$u_n=k_1e_1+\sum_{j=1}^{n}(k_{j+1}-k_1)e_j=(k_2,\cdots,k_{n+2},k_1,k_1,\cdots).$$

则 $\|u_n\|_\infty\leqslant1$ 且$\lim\limits_{j\to\infty}u_n(j)=k_1$. 因此

$$f(u_n)=y(1)k_1+\sum_{j=1}^{n}y(j+1)k_{j+1}+\sum_{j=n+1}^{\infty}y(j+1)k_1$$
$$=\sum_{j=1}^{n+1}|y(j)|+k_1\sum_{j=n+2}^{\infty}y(j).$$

因此

$$\sum_{j=1}^{n+1}|y(j)|=\left|f(u_n)-k_1\sum_{j=n+2}^{\infty}y(j)\right|$$
$$\leqslant|f(u_n)|+|k_1|\sum_{j=n+2}^{\infty}|y(j)|$$
$$\leqslant\|f\|\|u_n\|+|k_1|\sum_{j=n+2}^{\infty}|y(j)|.$$

当 $n\to\infty$时，由于 $\|u_n\|_\infty\leqslant1$ 且上式最后一项收敛到 0，故有 $\|y\|_1\leqslant\|f\|$. 这样对 l^1 中任意元 y，我们与之对应 $f=f_y\in c'$ 使得 $\|f_y\|=\|y\|_1$. 设

$$F(y)=f_y,\quad y\in l^1,$$

其中

$$f_y(x)=y(1)\lim_{j\to\infty}x(j)+\sum_{j=1}^{\infty}y(j+1)x(j),\quad x\in c.$$

这就定义了线性等距 $F:l^1\to c'$.

为了证明 F 为满射，设 $g\in c'$，且 $y(j)=g(e_{j-1})$，$j=2,3,\cdots$. 如(1)式中选取 k_j，且

$$v_n=k_2e_1+\cdots+k_{n+1}e_n=(k_2,\cdots,k_{n+1},0,0,\cdots).$$

则 $v_n\in c$，$\|v_n\|_\infty\leqslant1$，且

$$g(v_n)=\sum_{j=2}^{n+1}k_jg(e_{j-1})=\sum_{j=2}^{n+1}k_jy(j)=\sum_{j=2}^{n+1}|y(j)|.$$

因此

$$\sum_{j=2}^{n+1} |y(j)| = |g(v_n)| \leqslant \|g\| \|v_n\|_\infty \leqslant \|g\|;$$

$$\sum_{j=2}^{\infty} |y(j)| \leqslant \|g\| < \infty.$$

从而无论 $y(1)$ 如何选取总有 $y \in l^1$.

若 $x \in c$ 且 $\lim\limits_{j\to\infty} x(j) = \lambda$，令

$$x_n = \lambda e + \sum_{j=1}^{n} (x(j) - \lambda) e_j = (x(1), x(2), \cdots, x(n), \lambda, \lambda, \cdots).$$

则 $x_n \in c$ 且

$$x(j) - x_n(j) = \begin{cases} 0, & 1 \leqslant j \leqslant n, \\ x(j) - \lambda, & j > n. \end{cases}$$

因此

$$\|x - x_n\|_\infty = \sup_{j>n} |x(j) - \lambda|.$$

当 $n \to \infty$ 时上式收敛到 0，所以在 c 中有 $x_n \to x$. 从而 $g(x_n) \to g(x)$. 故有

$$\begin{aligned} g(x) &= \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \lambda g(e) + \sum_{j=1}^{n} (x(j) - \lambda) g(e_j) \right\} \\ &= \lambda g(e) + \sum_{j=1}^{\infty} (x(j) - \lambda) y(j+1) \\ &= \lambda y(1) + \sum_{j=1}^{\infty} x(j) y(j+1), \end{aligned}$$

其中

$$y(1) = g(e) - \sum_{j=1}^{\infty} y(j+1).$$

因此 $g = f_y = F(y)$ 对某一 $y \in l^1$ 成立. 从而 F 为满射，c 的对偶空间为 l^1. ■

问题 3.1.4 求证：若 $1 < p < \infty$，$1/p + 1/q = 1$，则 l^p 的对偶空间为 l^q.

解答 我们将用与问题 3.1.2 类似的方法. 设 $X = l^p$，$y \in l^q$. 若 $x \in l^p$，则由 Hölder 不等式有

$$\sum_{j=1}^{\infty} |y(j)x(j)| \leqslant \|y\|_q \|x\|_p < \infty.$$

因此，若

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} y(j)x(j), \quad x \in X,$$

则 f 将 X 映到数域 $\mathbb{K}$ 且 f 显然是线性的. 又

$$|f(x)| \leqslant \|y\|_q \|x\|_p, \quad x \in X,$$

因此 $\| f \| \leqslant \| y \|_q$. 设 $y \neq 0$,

$$k_j = \begin{cases} | y(j) |^q / y(j), & y(j) \neq 0, \\ 0, & y(j) = 0. \end{cases}$$

则若 $y(j) \neq 0$,由于 $pq = p + q$,有

$$| k_j |^p = | y(j) |^{pq} | y(j) |^{-p} = | y(j) |^q.$$

又由于当 $y(j) = 0$ 时上式显然成立,故对任意的 $j \geqslant 1$ 有 $|k_j|^p = |y(j)|^q$. 设

$$u_n = k_1 e_1 + \cdots + k_n e_n = (k_1, k_2, \cdots, k_n, 0, 0, \cdots).$$

则 $u_n \in l^p$ 且

$$\| u_n \|_p^p = \sum_{j=1}^{n} | k_j |^p = \sum_{j=1}^{n} | y(j) |^q \leqslant \| y \|_q^q,$$

$$f(u_n) = \sum_{j=1}^{n} y(j) k_j = \sum_{j=1}^{n} | y(j) |^q.$$

因此

$$\sum_{j=1}^{n} | y(j) |^q = | f(u_n) | \leqslant \| f \| \| u_n \| \leqslant \| f \| \| y \|_q^{q/p}.$$

上式对任意的 n 都成立,若令 $n \to \infty$ 则有

$$\| y \|_q^q \leqslant \| f \| \| y \|_q^{q/p} = \| f \| \| y \|_q^{q-1},$$

$$\| y \|_q \leqslant \| f \|.$$

上式当 $y = 0$ 时也是成立的. 因此任取 $y \in l^q$,将之与 X' 中的 $f = f_y$ 相对应,则有 $\| f_y \| = \| y \|$. 设

$$F(y) = f_y, \quad y \in l^q,$$

其中

$$f_y(x) = \sum_{j=1}^{\infty} y(j) x(j), \quad x \in X.$$

这就定义了映射 $F: l^q \to X'$. 易见 F 为线性算子,又由于 $\| F(y) \| = \| f_y \| = \| y \|_q$,故 F 为线性等距.

为证 F 为满射,设 g 为 X 上的有界线性泛函. 对 $j \geqslant 1$ 定义 $y(j) = g(e_j)$. 若对某一 j 有 $y(j) \neq 0$,则如上面那样选取 k_j,且 $u_n = k_1 e_1 + \cdots + k_n e_n$. 则 $u_n \in l^p$,

$$\| u_n \|_p^p = \sum_{j=1}^{n} | y(j) |^q.$$

因此

$$g(u_n) = \sum_{j=1}^{n} k_j g(e_j) = \sum_{j=1}^{n} k_j y(j) = \sum_{j=1}^{n} | y(j) |^q = \| u_n \|_p^p,$$

$$\| u_n \|_p^p = | g(u_n) | \leqslant \| g \| \| u_n \|_p,$$

$$\| u_n \|_p^{p-1} \leqslant \| g \|,$$

$$\sum_{j=1}^{n} |y(j)|^q = \|u_n\|_p^{(p-1)q} \leqslant \|g\|^q.$$

(在最后一行中用到了 $p=(p-1)q$ 这个事实.)上式对任取的 n 成立. 令 $n\to\infty$,则有 $y\in l^q$.

若 $x\in X=l^p$,设

$$x_n = x(1)e_1 + \cdots + x(n)e_n = (x(1),\cdots,x(n),0,0,\cdots).$$

则 $x_n\in l^p$,

$$x(j)-x_n(j) = \begin{cases} 0, & 1\leqslant j\leqslant n, \\ x(j), & j>n. \end{cases}$$

从而

$$\|x-x_n\|_p^p = \sum_{j=n+1}^{\infty} |x(j)|^p.$$

由于 $x\in l^p$,故当 $n\to\infty$时上式收敛到 0,即在 l^p 中有 $x_n\to x$,从而有 $g(x_n)\to g(x)$. 我们有

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} x(j)g(e_j) = \sum_{j=1}^{\infty} x(j)y(j) = f_y(x).$$

这就证明了 $g=f_y=F(y)$对 l^q 中的某个 y 成立. 故 X'为 l^q. ■

问题 3.1.5 求证:若赋范空间 X 的对偶空间 X'为可分的,则 X 也必可分.

解答 设 $S=\{x_n': n\geqslant 1\}$为 X'的可数稠密子集. 存在 $x_n\in X$ 使得

$$|x_n'(x_n)| \geqslant \frac{1}{2}\|x_n'\|, \quad \|x_n\|\leqslant 1, \quad n\geqslant 1. \tag{2}$$

设 $Y=\mathrm{span}\{x_n\}$.

首先证明 $\overline{Y}=X$. 假设存在 $a\in X$ 但 $a\notin Y$. 则由问题 1.4.1 知存在 $x'\in X'$使得

$$x'(a)\neq 0, \quad \|x'\|=1, \quad x'(y)=0$$

对 $y\in Y$ 成立. 由假设 S 在 X'中稠密,从而存在 $x_n'\in S$ 使得 $\|x'-x_n'\|<1/4$. 由于 $x_n\in Y$,故 $x'(x_n)=0$,因此由 $\|x_n\|\leqslant 1$ 知

$$|x_n'(x_n)| = |(x_n'-x')(x_n)| \leqslant \|x_n'-x'\|\|x_n\| < 1/4.$$

所以由(2)式有 $\|x_n'\|<1/2$. 由此可以推出

$$\|x'\| \leqslant \|x'-x_n'\| + \|x_n'\| < 1/4+1/2.$$

这与 $\|x'\|=1$ 矛盾. 因此有 $\overline{Y}=X$.

下面的证明与问题 2.1.21 的解答类似. 设 M 为数域 $\mathbb{K}$ 的可数稠密子集. 设 E_n 为 X 中所有元 x 满足

$$x = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \quad m_i\in M,$$

且

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

由于存在从 M^n 到 E_n 的满射且 M^n 为可数的，故每一个 E_n 为可数的. 从而 E 为可数的.

设 $x\in X,\varepsilon>0$ 固定，存在 $y\in Y$ 使得 $\|x-y\|<\varepsilon/2$. 由于 $Y=\operatorname{span}\{x_n\}$，故

$$y=\sum_{i=1}^{n}k_ix_i,\quad k_i\in\mathbb{K}.$$

由于 M 在 $\mathbb{K}$ 中为稠密的，故存在 $m_i\in M$ 使得

$$|k_i-m_i|<\varepsilon/2n,\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

令

$$z=m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n.$$

则 $z\in E_n\subset E$，且

$$\|y-z\|=\Big\|\sum_{i=1}^{n}(k_i-m_i)x_i\Big\|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|k_i-m_i|\,\|x_i\|<n\frac{\varepsilon}{2n},$$

这是由于 $\|x_i\|\leqslant 1$. 故

$$\|x-z\|\leqslant\|x-y\|+\|y-z\|<\varepsilon.$$

我们证明了 $\overline{E}=X$，由于 E 为可数的，故 X 为可分的. ■

问题 3.1.6 求证：l^∞ 的对偶空间含有与 l^1 线性等距同构的真子空间.

解答 若 $y\in l^1,x\in l^\infty$，则

$$\sum_{j=1}^{\infty}|y(j)x(j)|\leqslant\|x\|_\infty\sum_{j=1}^{\infty}|y(j)|=\|x\|_\infty\|y\|_1.$$

因此若令

$$f_y(x)=\sum_{j=1}^{\infty}y(j)x(j),\quad x\in l^\infty,\tag{3}$$

则 f_y 将 l^∞ 映到数域 $\mathbb{K}$，它为线性的，

$$|f_y(x)|\leqslant\|y\|_1\|x\|_\infty,\quad x\in l^\infty,$$

从而 $\|f_y\|\leqslant\|y\|_1$. 利用问题 3.1.2 解答第一部分的方法可证 $\|y\|_1\leqslant\|f_y\|$. 因此，对每一个 $y\in l^1$，我们将 $f_y\in(l^\infty)'$ 与之对应使得 $\|f_y\|=\|y\|$. 设

$$F(y)=f_y,\quad y\in l^1,$$

其中 f_y 由(3)式定义，这样就定义了映射 $F:l^1\to(l^\infty)'$. 易证 F 为线性等距. 若 F 为满射，则 $(l^\infty)'$ 为 l^1. 但 l^∞ 不为可分的，l^1 为可分的(见问题 1.1.12). 若 X' 为可分的，则由问题 3.1.5 知 X 也必为可分的，矛盾. 从而 F 不为满射. ■

问题 3.1.7 设 X,Y 为赋范空间，$F\in BL(X,Y)$. 求证：

$$\|F\|=\sup\{|y'(F(x))|:x\in X,\|x\|\leqslant 1,y'\in Y',\|y'\|\leqslant 1\}.$$

解答 设

$$S=\{|y'(F(x))|:x\in X,\|x\|\leqslant 1,\quad y'\in Y',\|y'\|\leqslant 1\}.$$

对 $\alpha\in S$，

$$\alpha=|y'(F(x))|\leqslant\|y'\|\,\|F(x)\|\leqslant\|y'\|\,\|F\|\,\|x\|\leqslant\|F\|.$$

这就证明了 $\|F\|$ 为 S 的上界. 若 $\|F\|=0$,则

$$\sup S = 0 = \|F\|.$$

故不妨设 $\|F\|\neq 0$. 由 $\|F\|$ 的定义,存在 $x_n\in X$, $\|x_n\|\leqslant 1$,

$$\|F(x_n)\| \to \|F\|, \quad n\to\infty.$$

所以对足够大的 n 有 $y_n=F(x_n)\neq 0$. 对这样的 n,由问题 1.4.2 知存在 $y_n'\in Y'$ 使得

$$y_n'(y_n) = \|y_n\|, \quad \|y_n'\| = 1.$$

因此

$$\|y_n\| = y_n'(y_n) = y_n(F(x_n)) = |y_n(F(x_n))| \in S.$$

由于 $\|y_n\| = \|F(x_n)\| \to \|F\|$,故有 $\|F\| = \sup S$. ■

问题 3.1.8 设 X 为 Banach 空间,Y 为赋范空间,$F:X\to Y$ 为线性算子. 假设任取 $\{x_n\}$ 为 X 中序列使得 $x_n\to 0$ 且 $\{F(x_n)\}$ 为柯西列,则在 Y 中必有 $F(x_n)\to 0$. 求证: $F\in BL(X,Y)$.

解答 设 $J:Y\to Y''$ 为典范映射,$G=J\circ F$. 则 $G:X\to Y''$ 为线性算子. 为了证明 G 的图像为闭集,我们设在 X 中有 $x_n\to x$,在 Y'' 中有 $G(x_n)\to y''$. 设 $u_n=x_n-x$,则 $u_n\to 0$ 且

$$G(u_n) = G(x_n) - G(x) \to y'' - G(x),$$

因此 $\{G(u_n)\}$ 为柯西列. 由于 J 为等距,故

$$\|G(u_n-u_m)\| = \|J\circ F(u_n-u_m)\| = \|F(u_n-u_m)\|,$$

$$\|G(u_n)-G(u_m)\| = \|F(u_n)-F(u_m)\|.$$

所以 $\{F(u_n)\}$ 为 Y 中的柯西列. 由题设知必有 $F(u_n)\to 0$. 因此

$$G(u_n) = J\circ F(u_n) \to 0,$$

$$G(x_n) = G(u_n) + G(x) \to G(x).$$

所以有 $y''=G(x)$. 这就证明了 G 的图像为闭的. 由于 X 和 Y'' 为 Banach 空间,故由闭图像定理知 G 为连续的. 因此

$$\|F(x)\| = \|J\circ F(x)\| = \|G(x)\| \leqslant \|G\|\,\|x\|.$$

这就证明了 F 为有界的. ■

问题 3.1.9 设 X 为赋范空间,$E\subset X$,$M\subset X'$. E 的**零化子**定义为

$$E^a = \{x'\in X' : \text{任取 } x\in E \text{ 有 } x'(x)=0\};$$

M 的**零化子**定义为

$${}^aM = \{x\in X : \text{任取 } x'\in M \text{ 有 } x'(x)=0\}.$$

求证: E^a 为 X' 的闭子空间,${}^aM$ 为 X 的闭子空间.

解答 设 $x',y'\in E^a$,$k\in\mathbb{K}$ 及 $z'=kx'+y'$. 则若 $x\in E$,有

$$z'(x) = kx'(x) + y'(x) = k\cdot 0 + 0 = 0.$$

因此 $z'\in E^a$,这就证明了 E^a 为 X' 的子空间.

设 $x_n\in E^a$ 且在 X' 中有 $x_n'\to x'$. 则当 $n\to\infty$ 时

$$|x_n'(x) - x'(x)| = |(x_n'-x')(x)| \leqslant \|x_n'-x'\|\,\|x\| \to 0.$$

从而 $x_n'(x)\to x'(x)$. 若 $x\in E$,则任取 n 有 $x_n'(x)=0$,所以 $x'(x)=0$,故有 $x'\in E^a$,这就证明

了 E^a 在 X' 中为闭子集.

类似地,若 $x,y\in{}^aM,k\in\mathbb{K}$,则对 $x'\in M$ 有

$$x'(kx+y)=kx'(x)+x'(y)=0,$$

因此 $kx+y\in{}^aE$,从而 ${}^aE$ 为 X 的子空间.

若 $x_n\in{}^aM$ 且在 X 中 $x_n\to x$,则任取 $x'\in X'$,

$$x'(x_n)\to x'(x).$$

若 $x'\in M$,则对 $n\geqslant 1$ 有 $x'(x_n)=0$,从而有 $x'(x)=0$,即有 $x\in{}^aM$. 因此 ${}^aM$ 在 X 中为闭子集. ■

问题 3.1.10 设 Y 为赋范空间 X 的闭子空间,Y^a 为其零化子. 求证:

(a) Y' 与 X'/Y^a 线性等距同构;

(b) $(X/Y)'$ 与 Y^a 线性等距同构.

解答 (a) 若 $x'+Y^a\in X'/Y^a$,令

$$F(x'+Y^a)=x'|_Y,$$

其中 $x'|_Y$ 为 x' 在 Y 上的限制. 若 $x_1'+Y^a=x_2'+Y^a$,则 $x_1'-x_2'\in Y^a$,从而对 $x\in Y$ 有

$$x_1'(x)=x_2'(x),$$

所以有

$$x_1'|_Y=x_2'|_Y.$$

由于 $x'|_Y$ 为 Y 上的有界线性泛函,故映射 F 是有定义的,且将 X'/Y^a 映到 Y'. 易见 F 为线性的. 每一个 $y'\in Y'$ 都有在 X 上的有界线性 Hahn-Banach 延拓 x',使得

$$F(x'+Y^a)=x'|_Y=y',$$
$$\|y'\|=\|x'\|\leqslant\|x'+Y^a\|.$$

这说明 F 为满射且

$$\|F(x'+Y^a)\|\leqslant\|x'+Y^a\|. \tag{4}$$

另外,若 $F(x'+Y^a)=y'$,$z'\in Y^a$,则任取 $y\in Y$,

$$|(x'+z')(y)|=|x'(y)|\leqslant|y'(y)|\leqslant\|y'\|\,\|y\|;$$

故有 $\|x'+z'\|\leqslant\|y'\|$. 由于这对任取的 $z'\in Y^a$ 成立,所以有

$$\|x'+Y^a\|\leqslant\|y'\|\leqslant\|F(x'+Y^a)\|. \tag{5}$$

由(4)式和(5)式知 F 为线性等距. 因此 Y' 与 X/Y^a 线性等距同构.

(b) 若 $x'\in Y^a$,设

$$f(x+Y)=x'(x),\quad x\in X.$$

若 $x_1+Y=x_2+Y$,则 $x_1-x_2\in Y$,从而有

$$x'(x_1-x_2)=0,\quad x'(x_1)=x'(x_2).$$

这说明映射 $f:X/Y\to\mathbb{K}$ 是有意义的. f 显然是线性的.

给定 $x+Y\in X/Y$,存在 Y 中序列 $\{y_n\}$ 使得

$$\|x+y_n\|\to\|x+Y\|.$$

由于 $x'(y_n)=0$，我们有

$$|f(x+Y)|=|x'(x)|=|x'(x+y_n)|\leqslant\|x'\|\,\|x+y_n\|.$$

令 $n\to\infty$ 有

$$|f(x+Y)|\leqslant\|x'\|\,\|x+Y\|.$$

上式对任取的 $x+Y\in X/Y$ 都成立，故 f 为 X/Y 上的有界线性泛函且有 $\|f\|\leqslant\|x'\|$. 另外，对 $x'\in X$，

$$|x'(x)|=|f(x+Y)|\leqslant\|f\|\,\|x+Y\|\leqslant\|f\|\,\|x\|.$$

因此也有 $\|x'\|\leqslant\|f\|$. 所以任取 $x'\in Y^a$，我们可以将它与 $(X/Y)'$ 中元 f 相对应，有

$$f(x+Y)=x'(x),\quad x\in X,$$
$$\|f\|=\|x'\|.$$

定义 $F:Y^a\to(X/Y)'$ 为 $F(x')=f$. 则 F 为线性等距.

为了证明 F 为满射，设 $f\in(X/Y)'$，在 X 上定义

$$x'(x)=f(x+Y),\quad x\in X.$$

则显然 x' 为线性的，且

$$|x'(x)|=|f(x+Y)|\leqslant\|f\|\,\|x+Y\|\leqslant\|f\|\,\|x\|.$$

所以有 $x'\in X'$ 且 $\|x'\|\leqslant\|f\|$. 若 $y\in Y$，则 $y+Y$ 为 X/Y 中的零元，因此

$$x'(y)=f(y+Y)=0.$$

这就说明 $x'\in Y^a$. 由 x' 的定义知 $F(x')=f$，从而 F 为满射. 这就证明了 Y^a 与 $(X/Y)'$ 为线性等距同构的. ■

问题 3.1.11 设 X,Y 为赋范空间，$F:X\to Y$ 为线性算子. 若 $y'\in Y'$，定义 $F'(y'):X\to\mathbb{K}$ 为

$$F'(y')(x)=y'(F(x)),\quad x\in X.$$

求证：

(a) 对 $y'\in Y'$，$F'(y')$ 为线性的；

(b) 对每一 $y'\in Y'$ 有 $F'(y')\in X'$ 当且仅当 $F\in BL(X,Y)$；

(c) 若 $F\in BL(X,Y)$，则 $F'\in B(Y',X')$ 且 $\|F'\|=\|F\|$，F' 称为 F **的共轭算子或伴随算子**.

解答 (a) 设 $x_1,x_2\in X,k\in\mathbb{K}$，则

$$F(kx_1+x_2)=kF(x_1)+F(x_2).$$

因此

$$y'(F(kx_1+x_2))=ky'(F(x_1))+y'(F(x_2)),$$
$$(F'y')(kx_1+x_2)=k(F'y')(x_1)+(F'y')(x_2).$$

所以 $F'y'$ 在 X 上为线性的.

(b) 设 $F\in BL(X,Y)$，$y'\in Y'$，则对 $x\in X$ 有

$$|(F'y')(x)|=|y'(F(x))|\leqslant\|y'\|\,\|F(x)\|\leqslant\|y'\|\,\|F\|\,\|x\|.$$

因此 $F'y'$ 为有界的且

$$\| F'y' \| \leqslant \| y' \| \, \| F \| . \tag{6}$$

反之，假设任取 $y' \in Y'$ 有 $F'y' \in X'$. 若 $F(x) \neq 0$，则存在 $y' \in Y'$ 使得

$$y'(F(x)) = \| F(x) \| , \quad \| y' \| = 1.$$

从而

$$\| F(x) \| = | \, y(F(x)) \, | = | \, (F'y')(x) \, | \leqslant \| Fy' \| \, \| x \| .$$

这说明 F 为有界的且

$$\| F \| \leqslant \| F'y' \| . \tag{7}$$

(c) 设 $F \in BL(X,Y)$，则由(b)知 F' 将 Y' 映到 X'. 容易证明 $F': Y' \to X'$ 为线性算子. 由于(6)式对任意的 $y' \in Y'$ 成立，故 F' 为有界线性算子且 $\| F' \| \leqslant \| F \|$. 又由于(7)式对某一 $y \in Y'$ 成立，且有 $\| y \| = 1$，故

$$\| F \| \leqslant \| F' \| \, \| y' \| = \| F' \| .$$

因此若 $F \in BL(X,Y)$，则 $F' \in BL(Y',X')$ 且 $\| F' \| = \| F \|$. ■

问题 3.1.12 设 X,Y 为赋范空间，$F \in BL(X,Y)$，$Y_1 = \overline{R(F)}$. 求证：

(a) Y_1 的零化子等于 F 的共轭算子 F' 的零空间；

(b) F' 零空间的零化子为 Y_1；

(c) 若线性方程 $F(x) = y$ 有解存在，则任取方程 $F'(y') = 0$ 的解 y' 有 $y'(y) = 0$.

解答 (a) Y_1 的零化子定义为

$$Y_1^a = \{ y' \in Y' : \text{任取 } y \in Y_1 \text{ 有 } y'(y) = 0 \}.$$

设 $y' \in Y_1^a$. 对 $x \in X$ 我们有

$$F'(y')(x) = y'(Fx) = 0,$$

这是由于 $Fx \in R(F) \subset Y_1$. 因此 $F'(y')$ 为 X' 中的零元，即 $y' \in Z(F')$.

反之，设 $y' \in Z(F')$，则 $F'(y') = 0$，即任取 $x \in X$ 有 $F'(y')(x) = 0$. 设 y 为 Y_1 中任意元，则存在 $R(F)$ 中序列 $\{y_n\}$ 使得 $y_n \to y$. 若 $y_n = F(x_n)$，则

$$y'(y_n) = y'(Fx_n) = F'(y')(x_n) = 0, \quad n \geqslant 1.$$

但 $y'(y_n) \to y'(y)$，从而有 $y'(y) = 0$. 这就证明了 $y' \in Y_1^a$. 所以有 $Y_1^a = Z(F')$.

(b) $Z(F')$ 的零化子定义为

$$E = \{ y \in Y : \text{任取 } y' \in Z(F') \text{ 有 } y'(y) = 0 \}.$$

设 $y = F(x) \in R(F)$. 若 $y' \in Z(F')$，则 $F'(y') = 0$，从而有 $F'(y')(x) = 0$ 对所有 $x \in X$ 成立，而 $F'(y')(x) = y'(F(x))$，因此对任意的 $y' \in Z(F')$ 有

$$y'(y) = 0,$$

即 $y \in E$. 所以 $R(F) \subset E$. 但由问题 3.1.9 知 E 为 Y 的闭子空间，故有 $Y_1 = \overline{R(F)} \subset E$.

另外，若 $z \notin Y_1$，则由问题 1.4.1 知存在 $y' \in Y'$ 使得任取 $y \in Y_1$ 有 $y'(y) = 0$，$y'(z) \neq 0$ 且 $\| y' \| = 1$. 因此 $y' \in Y_1^a$，由(a)知 $y' \in Z_1(F')$. 这说明 $z \notin E$. 因此若 $z \in E$，则 $z \in Y_1$. 从而有 $Y_1 = E$.

(c) 若方程 $F(x)=y$ 有解存在，即 $y=F(x)$ 对某个 $x\in X$ 成立，则 $y\in R(F)\subset E$. 因此任取 $y'\in Z(F')$，由(b)有 $y'(y)=0$，即任取 $y'\in Y'$ 使得 $F'(y')=0$ 都有 $y'(y)=0$.

这就完成了证明. ■

问题 3.1.13 设 X,Y,Z 为赋范空间，$F\in BL(X,Y)$，$G\in BL(Y,Z)$. 求证：$(G\circ F)'=F'\circ G'$.

解答 首先我们有

$$F'\in BL(Y',X'),\quad G'\in BL(Z',Y'),\quad G\circ F\in BL(X,Z),\quad (G\circ F)'\in BL(Z',X').$$

设 $z'\in Z'$，$y'=G'(z')$. 若 $x\in X$，$y=F(x)$，则

$$F'y'(x)=y'(Fx)=y'(y)=(G'z')(y);$$

因此

$$(F'y')(x)=x'(Gy)=z'(G\circ Fx)=(G\circ F)'(z')(x).$$

上式对任取的 $x\in X$ 成立，故有

$$F'y'=(G\circ F)'(z'),$$

即 $F'\circ G'(z')=(G\circ F)'(z')$，这对 $z'\in Z'$ 均成立，从而有

$$F'\circ G'=(G\circ F)'.$$ ■

问题 3.1.14 设 X,Y 为赋范空间，Y 为自反的. 定义

$$T:BL(X,Y)\to BL(Y',X')$$

为 $T(F)=F'$，其中 F' 为 F 的共轭算子. 求证：T 为满射.

解答 设 $G\in BL(Y',X')$，$J_1:X\to X''$，$J_2:Y\to Y''$ 为典范映射. 则由于 Y 为自反的，J_2 必为满射. 复合下列映射

$$J_1:X\to X'',\quad G':X''\to Y'',\quad J_2^{-1}:Y''\to Y,$$

则可以得到有界线性算子

$$F=J_2^{-1}G'J_1:X\to Y.$$

若 $y'\in Y'$，$x\in X$，设

$$y=F(x),\quad x'=G'(y'),\quad x''=J_1x.$$

则

$$J_2y(y')=y'(y)=y'(Fx)=F'y'(x).$$

但

$$J_2y=J_2Fx=G'J_1x=G'x'',$$

因此

$$\begin{aligned}F'y'(x)&=J_2y(y')=G'x''(y')=x''\in Gy'\\&=x''(x')=(J_1x)(x')=x'(x)\\&=Gy'(x).\end{aligned}$$

所以任取 $y'\in Y'$ 有 $Gy'=F'y'$，即 $G=F'=T(F)$. ■

问题 3.1.15 求证：自反空间的每个闭子空间也为自反的.

解答 设 X 为自反空间，Y 为 X 的闭子空间. 设 $J:X\to X''$，$J_1:Y\to Y''$ 为典范映射，则 J 为满射.

为了证明 J_1 也为满射，设 $y''\in Y''$，若 $x'\in X'$，则 x' 在 Y 上的限制 $x'|_Y$ 在 Y' 中. 定义 $x'':X'\to\mathbb{K}$ 为

$$x''(x')=y''(x'|_Y),\quad x'\in X'.$$

则 x'' 为线性的，且若 $y'=x'|_Y$，则

$$\|y'\|\leqslant\|x'\|,$$

$$|x''(x')|=|y''(y')|\leqslant\|y''\|\,\|x'\|.$$

因此 $x''\in X''$. 由于 J 为满射，存在 $x_1\in X$ 使得 $Jx_1=x''$.

假设 $x_1\notin Y$，由于 Y 为闭子空间，由问题 1.4.1 知存在 $x_1'\in X'$ 使得

$$x_1'(Y)=\{0\},\quad x_1'(x_1)\neq 0,\quad \|x_1'\|=1.$$

因此，若 $y_1'=x_1'|_Y$，则 $y_1'=0$，从而

$$x''(x_1')=y''(y_1')=0.$$

但 $x''(x_1')=(Jx_1)(x_1')=x_1'(x_1)\neq 0$，矛盾. 所以有 $x_1\in Y$. 给定 $y'\in Y'$，选取 y' 在 X 上的线性延拓 x'，则有

$$y''(y')=x''(x')=(Jx_1)(x')=x'(x_1)=y'(x_1).$$

上式对任意的 $y'\in Y'$ 都成立. 故有 $J_1x_1=y''$. 这就证明了 Y 为自反的. ■

问题 3.1.16 设 X,Y 为线性同胚的赋范空间，若 X 为自反的，求证：Y 也为自反的.

解答 设 $F:X\to Y$ 为连续线性算子，F 为一一映射，且其逆映射 $G=F^{-1}:Y\to X$ 也为连续的. 由于 $(G\circ F)'=F'\circ G'$，$(F\circ G)'=G'\circ F'$，故 $F':Y'\to X'$ 也为可逆的. 同理可知 $F'':X''\to Y''$ 为可逆的.

为了证明 Y 为自反的，设 $y''\in Y''$. 则存在 $x''\in X''$ 使得 $y''=F''(x'')$. 由于 X 为自反的，故存在 $x\in X$ 使得

$$x''(x')=x'(x),\quad x'\in X'.$$

设 $y'\in Y'$ 且 $x'=F'(y')$，则

$$x''(F'y')=F'y'(x).$$

但

$$x''(F'(y'))=F''x''(y')=y''(y'),$$

$$F'y'(x)=y'(F(x)).$$

因此有 $y''(y')=y'(F(x))=y'(y)$，即 $y''=J_1(y)$，其中 $y=F(x)$，$J_1:Y\to Y''$ 为典范映射. 即 Y 为自反的. ■

问题 3.1.17 设 Y 为赋范空间 X 的稠密子空间. 求证：Y' 与 X' 为线性等距同构的.

解答 设 $y'\in Y'$. 对 $x\in X$，存在 Y 中序列 $\{y_n\}$ 使得 $y_n\to x$. 由于 $\{y_n\}$ 为柯西列且

$$|y'(y_n)-y'(y_m)|\leqslant\|y'\|\,\|y_n-y_m\|,$$

故 $\{y'(y_n)\}$ 为纯量柯西列. 设

$$x'(x) = \lim_{n\to\infty} y'(y_n). \tag{8}$$

若$\{z_n\}$为Y中另外一列元使得$z_n\to x$,则

$$y'(y_n) - y'(z_n) = y'(y_n - z_n) \to 0.$$

这就证明了无论序列$\{y_n\}$如何选取,$\lim\limits_{n\to\infty} y'(y_n)$都是一样的,从而(8)式中$x'(x)$的定义是无矛盾的.我们有$x': X\to\mathbb{K}$.若$y\in Y$,可以取$y_n = y$,因此有$x'(y) = y'(y)$对$y\in Y$成立,即$x'|_Y = y'$.

若$y_n\to x_1, z_n\to x_2$,其中$y_n, z_n\in Y$,则

$$ky_n + z_n \to kx_1 + x_2, \quad y'(ky_n + z_n) = ky'(y_n) + y'(z_n).$$

因此

$$x'(kx_1 + x_2) = kx'(x_1) + x'(x_2),$$

即x'为X上的线性泛函.若$y_n\in Y, y_n\to x$,则

$$|y'(y_n)| \leqslant \|y'\|\,\|y_n\|.$$

令$n\to\infty$有$|x'(x)|\leqslant\|y'\|\,\|x\|$.因此$x'$为有界的且$\|x'\|\leqslant\|y'\|$.又由于对$y\in Y$有

$$|y'(y)| = |x'(y)| \leqslant \|x'\|\,\|y\|,$$

故也有$\|y'\|\leqslant\|x'\|$.从而$\|x'\| = \|y'\|$.

因此,对每一个$y'\in Y'$,我们将它与$x'\in X'$对应,$x'|_Y = y'$,$\|x'\| = \|y'\|$.若x_1'为y'的另外一个连续线性延拓,则若$y_n\in Y$有$x_1'(y_n) = x'(y_n)$.因此若$y_n\to x$,则

$$x_1'(x) = \lim y'(y_n) = x'(x).$$

这说明y'有唯一的延拓$x'\in X'$.

记$F(y') = x'$,其中$x'\in X', x'|_Y = y'$.这就定义了映射$F: Y'\to X'$.F显然为线性的,且

$$\|F(y')\| = \|x'\| = \|y'\|,$$

即F为等距.F为满射,这是因为任取$x'\in X'$,令$y' = x'|_Y$,则有$F(y') = x'$. ■

问题 3.1.18 求证:若$1<p<\infty$,则l^p为自反的.

解答 设$X = l^p, Y = l^q, 1/p + 1/q = 1$.设$F(y) = f_y, y\in Y$,其中

$$f_y(x) = \sum_{j=1}^{\infty} y(j)x(j), \quad x\in X,$$

即

$$F(y)(x) = \sum_{j=1}^{\infty} y(j)x(j), \quad x\in X, \quad y\in Y.$$

在问题3.1.4解答中,我们已证明了$F: Y\to X$为一个线性等距且为满射.若p换为q,则X与Y的角色互换.因此,若

$$G(x)(y) = \sum_{j=1}^{\infty} x(j)y(j), \quad y\in Y, \quad x\in X,$$

则$G: X\to Y'$为线性等距且为满射.

设$x''\in X'', y' = x''\circ F$,则$y': Y\to\mathbb{K}$为有界线性泛函.因此存在$x\in X$使得$G(x) = y'$.若

$x' \in X'$给定，则存在 $y \in Y$ 使得 $F(y)=x'$. 因此

$$x'(x) = F(y)(x) = \sum_{j=1}^{\infty} y(j)x(j),$$

$$y'(y) = G(x)(y) = \sum_{j=1}^{\infty} y(j)x(j).$$

从而有 $y'(y)=x'(x)$，所以

$$x''(x') = x''(F(y)) = y'(y) = x'(x).$$

由于上式对任取的 $x' \in X'$ 成立，故有 $x''=J(x)$，其中 J 为典范映射. 这就证明了 $X=l^p$ 为自反的. ■

问题 3.1.19 若 X 为自反赋范空间，证明：X' 也为自反的.

解答 设 $J: X \to X''$ 及 $J_1: X' \to X'''$ 为典范映射. 我们将证明若 J 为满射，则 J_1 也为满射. 设 x''' 为 X''' 中任一元，定义 $x': X \to \mathbb{K}$ 为

$$x'(x) = x'''(Jx), \quad x \in X.$$

则 $x'=x''' \circ J \in X'$. 设 $x'' \in X''$，则存在 $x \in X$ 使得 $Jx=x''$.

因此

$$x'''(x'') = x'''(Jx) = x'(x).$$

但

$$J_1 x'(x'') = x''(x') = Jx(x') = x'(x),$$

因此有

$$J_1 x'(x'') = x'''(x''), \quad x'' \in X'',$$

即 $J_1 x' = x'''$. ■

问题 3.1.20 举例说明：若 X' 为自反的，则 X 可能不自反.

解答 设 $1<p<\infty$，$X=c_{00}$，其上赋予范数 $\|\cdot\|_p$，$Y=l^p$. 任取 $y \in Y$，

$$y_n = \sum_{j=1}^{n} y(j)e_j, \quad n = 1,2,\cdots,$$

则 $y_n \in X$ 且当 $n \to \infty$ 时，

$$\| y - y_n \|_p^p = \sum_{j=n+1}^{\infty} | y(j) |^p \to 0,$$

因此 $y_n \to y$. 这说明 X 在 Y 中稠密. 利用问题 3.1.17 知 X' 与 Y' 为线性等距同构的. 但由问题 3.1.18 知 l^p 为自反的. 故由问题 3.1.16 知 X' 也为自反的.

假设 X 为自反的，则 X 与 X'' 线性等距同构，而 X'' 为 Banach 空间，但 Y 为 X 的真稠密子空间，故 X 不为完备的. 因此 X 不为自反的. ■

问题 3.1.21 求证：Banach 空间 X 为自反的当且仅当 X' 为自反的.

解答 设 X 为 Banach 空间且 X' 自反. 为了证明 X 为自反的，设 $J: X \to X''$ 为典范映射，$Y=J(X)$. 则由于 X 为完备的，J 为等距，故 Y 也为完备的. 因此 Y 在 X'' 中为闭子集. 由

于 X' 为自反的，所以由问题 3.1.19 知 X'' 也为自反的. 所以由问题 3.1.15 知 Y 为自反的. 设 J' 为 $J: X\to Y$ 的共轭算子，J'' 为 J' 的共轭算子. 为证 $J(X)=X''$，设 $x''\in X''$，$y''=J''x''$. 则 $y''\in Y''$. 由于 Y 为自反的，存在 $y\in Y$ 使得 $y''=J_1(y)$，其中 $J_1: Y\to Y''$ 为典范映射. 由于 $Y=J(X)$，存在 $x\in X$ 使得 $y=J(x)$.

设 $J_2=J^{-1}: Y\to X$. 给定 $x'\in X'$，令 $y'=J_2'(x')$. 则

$$J'(y')=(J'\circ J_2')(x')=(J_2\circ J)'(x')=x'.$$

由于 $J''=(J')'$，故

$$(J''x'')(y')=x''(J'y')=x''(x').$$

由于 $J''x''=y''=J_1y$，故有

$$x''(x')=(J''x'')(y')=(J_1y)(y')=y'(y)=(J_2'x')(y)=x'(J_2y)=x'(x),$$

因此 $x''(x')=x'(x)$ 对任取的 $x'\in X'$ 成立，即有 $x''=Jx$. ■

问题 3.1.22 求证：l^1，l^∞，c 及 c_0 都不为自反的.

解答 若 X 为可分自反空间，则典范映射 $J: X\to X''$ 为线性等距且为满射，因此 X'' 也必为可分的，所以由问题 3.1.5 知 X' 必为可分的.

设 $X=l^1$，则 X 为可分的. X' 线性等距同构于 l^∞，但 l^∞ 不为可分的，因此 X' 不可能为可分的. 这就证明了 l^1 不为自反的.

设 $X=c_0$ 或 c. 假设 X 为自反的，则 X' 也自反，但 X' 与 l^1 为线性等距同构的. 因此由问题 3.1.16 知 l^1 必为自反的，矛盾. 所以 c_0 及 c 均不为自反的.

设 $X=l^\infty$，则 X 与 $(l^1)'$ 线性等距同构. 若 X 为自反的，则由问题 3.1.16 知 $(l^1)'$ 也为自反的. 由于 l^1 为 Banach 空间，这由问题 3.1.16 可知 l^1 为自反的，矛盾. 故 l^∞ 不为自反的. ■

问题 3.1.23 赋范空间 X 称为**一致凸的**，若任取 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得任给 $x,y\in X$，

$$\|x\|\leqslant 1,\quad \|y\|\leqslant 1,\quad \|x-y\|\geqslant\varepsilon$$

都有 $\|(x+y)/2\|<1-\delta$. 设 X 为赋范空间，$x'\in X'$ 为非零元，求证：

(a) 若 X 为自反的，则至少存在一个 $x\in X$ 使得

$$x'(x)=\|x'\|,\quad \|x\|=1; \tag{9}$$

(b) 若 X 为严格凸的，则至多存在一个 $x\in X$ 使得(9)式成立.

(c) 若 X 为一致凸 Banach 空间，则存在唯一的 $x\in X$ 使得(9)式成立.

解答 (a) 由于 $x'\neq 0$，所以由问题 1.4.2 知存在 $f\in X''$ 使得

$$f(x')=\|x'\|,\quad \|f\|=1.$$

由假设 X 为自反的，存在 $x\in X$ 使得 $J(x)=f$，即任取 $x'\in X'$ 有 $f(x')=x'(x)$. 因此

$$x'(x)=f(x')=\|x'\|.$$

进一步地，$\|x\|=\|J(x)\|=\|f\|=1$. 这就证明了(a).

(b) 设 X 为严格凸的，且

$$x'\in(x_1)=\|x'\|=x'(x_2),\quad \|x_1\|=1=\|x_2\|.$$

令 $x=(x_1+x_2)/2$，则

$$\| x' \| = \frac{1}{2}(x'(x_1) + x'(x_2)) = x'(x).$$

因此 $\| x' \| = |x'(x)| \leqslant \| x' \| \, \| x \|$. 所以

$$1 \leqslant \| x \| = \left\| \frac{x_1 + x_2}{2} \right\| \leqslant \frac{\| x_1 \| + \| x_2 \|}{2} = 1.$$

故有 $\left\| \frac{x_1 + x_2}{2} \right\| = 1$. 又由于 X 为严格凸的，这仅在 $x_1 = x_2$ 时成立. 这就证明了(b).

(c) 设 X 为一致凸 Banach 空间. 存在 X 中一列元 $\{x_n\}$ 使得

$$\| x_n \| = 1, \quad | x'(x_n) | \to \| x' \|.$$

设

$$k_n = \begin{cases} | x'(x_n) | / x'(x_n), & x'(x_n) \neq 0, \\ 1, & x'(x_n) = 0. \end{cases}$$

$y_n = k_n x_n$. 则任取 n

$$| k_n | = 1, \quad \| y_n \| = | k_n | \, \| x_n \| = 1, \tag{10}$$

$$x'(y_n) = k_n x'(x_n) = | x'(x_n) |.$$

因此 $x'(y_n) \geqslant 0$ 且 $x'(y_n) \to \| x' \|$.

设 $\varepsilon > 0$ 固定，由 X 的一致凸性知存在 $\delta > 0$，使得任取 $x, y \in X$ 满足

$$\| x \| \leqslant 1, \quad \| y \| \leqslant 1, \quad \| x - y \| \geqslant \varepsilon$$

都有 $\| (x+y)/2 \| < 1 - \delta$. 由于 $\delta \| x' \| > 0$，则存在 N 使得任取 $n \geqslant N$

$$| x'(y_n) - \| x' \| | < \frac{\delta}{2} \| x' \|.$$

设 $m, n \geqslant N$，则

$$\| x' \| \leqslant | \, \| x' \| - x'(y_n) | + | x'(y_n) | < \frac{\delta}{2} \| x' \| + x'(y_n),$$

$$\| x' \| < \frac{\delta}{2} \| x' \| + x'(y_m).$$

因此

$$2 \| x' \| < \delta \| x' \| + x'(y_n + y_m),$$

$$\| x' \| - \frac{\delta}{2} \| x' \| < x'\left(\frac{y_n + y_m}{2} \right) \leqslant \| x' \| \left\| \frac{y_n + y_m}{2} \right\|,$$

从而 $1 - \delta/2 < \| (y_n + y_m)/2 \|$. 所以由 δ 的选取有

$$\| y_n - y_m \| < \varepsilon.$$

上式当 $m, n \geqslant N$ 时总成立. 这说明 $\{y_m\}$ 为 X 的柯西列. 由于 X 为完备的，它必收敛到 X 中某一点 x. 则必有 $x'(y_n) \to x'(x)$，即

$$x'(x) = \lim x'(y_n) = \| x' \|.$$

由于由(10)式有

$$\| x \| = \lim \| y_n \| = 1,$$

从而 x 满足(9)式. 由于每个一致凸空间都为严格凸的,由(b)知这样的 x 最多只有一个. 这就完成了证明. ■

问题 3.1.24 如在问题 1.4.17 中一样,赋范空间 X 称为**光滑的**若任取非零 $x \in X$,存在唯一的 $x' \in X'$ 使得

$$x'(x) = \| x \|, \quad \| x' \| = 1. \tag{11}$$

求证:若 X 为光滑的且为自反的,则 X' 为严格凸的.

解答 设 X 为光滑的且为自反的. 为了证明 X' 为严格凸的,设 $x', y' \in X'$,

$$\| x' \| = \| y' \| = \left\| \frac{x' + y'}{2} \right\| = 1.$$

由问题 1.4.2 知存在 $x'' \in X''$ 使得

$$x''(x' + y') = \| x' + y' \| = 2, \quad \| x'' \| = 1. \tag{12}$$

由于 X 为自反的,存在 $x \in X$ 使得

$$x''(z') = z'(x), \quad z' \in X',$$

且 $\| x'' \| = \| x \| = 1$. 设 $u = x'(x)$, $v = y'(x)$,则由(12)式有

$$u + v = (x' + y')(x) = x''(x' + y') = 2.$$

但

$$| u | \leqslant \| x' \| \| x \| = 1, \quad | v | \leqslant \| y' \| \| x \| \leqslant 1.$$

由于

$$| u + v |^2 + | u - v |^2 = 2 | u |^2 + 2 | v |^2,$$

故有 $4 + |u - v|^2 \leqslant 2 + 2$. 因此必有 $u = v = (u + v)/2 = 1$. 所以

$$x'(x) = 1 = \| x \| = y'(x),$$
$$\| x' \| = \| y' \| = 1.$$

由于 X 为光滑的且 $x \neq 0$,故有 $x' = y'$. 这就证明了 X' 为严格凸的. ■

3.2 弱收敛性

设 X 为赋范空间,若

$$x'(x_n) \to x'(x), \quad x' \in X'.$$

则 X 中的序列 $\{x_n\}$ 称为**弱收敛**到 $x \in X$. 此时,记 $x_n \xrightarrow{w} x$.

若

$$x_n'(x) \to x'(x), \quad x \in X,$$

则称 X' 中序列 $\{x_n'\}$ **弱 * 收敛**到 $x' \in X'$. 此时,记 $x_n \xrightarrow{w^*} x$.

若对每一个 $x' \in X'$, $\{x'(x_n)\}$ 为纯量柯西列,则 X 中序列 $\{x_n\}$ 为**弱柯西列**. 若赋范空间

X 中任意弱柯西列均在 X 中弱收敛，则称 X 为**弱完备**的.

若 $x_n \xrightarrow{w} x$ 且 $x_n \xrightarrow{w} y$，则 $x=y$. 若 $x_n \xrightarrow{w} x$，$y_n \xrightarrow{w} y$，$k\in\mathbb{K}$，则 $kx_n+y_n \to kx+y$.

对弱 $*$ 收敛性类似结果也成立.

练习

设 X 为赋范空间，X' 为其对偶空间.

1. 求证：若在 X 中 $x_n \to x$，则必有 $x_n \xrightarrow{w} x$.
2. 若 $x_n \xrightarrow{w} x$，$x_n \xrightarrow{w} y$，求证：$x=y$.
3. 若 $x_n \xrightarrow{w} x$，$y_n \xrightarrow{w} y$，$k\in\mathbb{K}$，求证：$kx_n+y_n \xrightarrow{w} kx+y$.
4. 若 $x_n' \xrightarrow{w^*} x'$，$x_n' \xrightarrow{w^*} y'$，求证：$x'=y'$.
5. 若 $x_n' \xrightarrow{w^*} x'$，$y_n' \xrightarrow{w^*} y'$，$k\in\mathbb{K}$，求证：$kx_n'+y_n' \xrightarrow{w^*} kx'+y'$.
6. 若 $X=\mathbb{R}^2$ 且 $\boldsymbol{x}_n \xrightarrow{w} \boldsymbol{x}$，求证：在 X 中有 $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$.

问题

问题 3.2.1 设 X 为赋范空间，求证：若在 X' 中有 $x_n' \xrightarrow{w} x'$，则必有 $x_n' \xrightarrow{w^*} x'$，但逆命题不成立.

解答 设 $x_n' \xrightarrow{w} x'$，则任取 $x''\in X''$ 有 $x''(x_n') \to x''(x')$. 设 $x\in X$ 及 $x''=J(x)$，其中 J 为在 3.1 节中定义的典范映射. 则

$$x''(x_n') = x_n'(x), \quad x''(x') = x'(x).$$

因此 $x_n'(x) \to x'(x)$. 这对所有的 $x\in X$ 都成立，这说明在 X' 中有 $x_n' \xrightarrow{w^*} x'$.

为证逆命题不成立，设 $X=c_0$，x_n' 定义为

$$x_n'(x) = x(n), \quad x\in X, \quad n=1,2,\cdots.$$

对任选的 $x\in X$，$x_n(x)=x(n)\to 0$，因此 $x_n' \xrightarrow{w^*} 0$. 由问题 3.1.2 的解答知若 g 为 c_0 上的有界线性泛函，$g(e_j)=y_j$，则必有 $y\in l^1$，且

$$\|y\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |g(e_j)| \leqslant \|g\|.$$

因此任取 $x'\in X'$，

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x'(e_j)| \leqslant \|x'\| < \infty.$$

我们可以定义 $f:X'\to\mathbb{K}$ 为

$$f(x')=\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j x'(e_j),\quad x'\in X'.$$

f 显然是线性的，

$$|f(x')|\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}|x(e_j)|\leqslant\|x'\|,\quad x'\in X'.$$

这说明 $f\in X''$，$\|f\|\leqslant 1$. 由于

$$f(x_n')=\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j x_n'(e_j)=\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j e_j(n)=(-1)^n,$$

故$\{f(x_n')\}$不收敛，从而$\{x_n'\}$不弱收敛. ■

问题 3.2.2 设 X 为自反赋范空间，求证：在 X' 中 $x_n'\xrightarrow{w}x'$ 当且仅当在 X' 中 $x_n'\xrightarrow{w^*}x'$.

解答 由问题 3.2.1 知若 $x_n'\xrightarrow{w}x'$，则必有 $x_n'\xrightarrow{w^*}x'$. 为证其逆命题，设 X 为自反的且 $x_n'\xrightarrow{w^*}x'$. 为证 $x_n'\xrightarrow{w}x'$，设 x''为 X'上的有界线性泛函，则 $x''=J(x)$，其中 J 为典范映射. 由于 $x_n'\xrightarrow{w^*}x'$，我们有

$$x_n'(x)\to x'(x).$$

由于 $x''(x_n')=x_n'(x)$，$x''(x')=x'(x)$，这说明

$$x''(x_n')\to x''(x').$$

上式对任取的 $x''\in X''$都成立，故有 $x_n'\xrightarrow{w}x'$. ■

问题 3.2.3 设 $x_n\in C[a,b]$，在 $C[a,b]$中有 $x_n\xrightarrow{w}x$. 求证：$\{x_n\}$在$[a,b]$上点点收敛. 证明 $C[a,b]$中的点点收敛的序列可以不是弱收敛的.

解答 设 $X=C[a,b]$，$t_0\in[a,b]$，定义 $f:X\to\mathbb{K}$ 为

$$f(x)=x(t_0),\quad x\in X.$$

则 f 为线性的，且

$$|f(x)|=|x(t_0)|\leqslant\|x\|_\infty,\quad x\in X.$$

因此 f 为有界的且 $\|f\|\leqslant 1$. 所以有 $f\in X'$，从而有 $f(x_n)\to f(x)$，即 $x_n(t_0)\to x(t_0)$. 因为这对任取的 $t_0\in[a,b]$成立，故$\{x_n\}$为点点收敛的.

为证第二部分，对 $n=1,2,\cdots$，设

$$x_n(t)=n^3(b-a)^{-n}(t-a)^{n-1}(b-t),\quad a\leqslant t\leqslant b.$$

则 $x_n\in X$. 由于

$$x_n(t)=n^3\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^{n-1}\left(\frac{b-t}{b-a}\right),$$

故易见若 $a\leqslant t<b$，则当 $n\to\infty$时有 $x_n(t)\to 0$. 又由于 $x_n(b)=0$，故$\{x_n\}$在$[a,b]$上点点收敛

到 0.

设

$$f(x)=\int_a^b x(t)\mathrm{d}t,\quad x\in C[a,b].$$

则 $f\in X'$. 假设$\{x_n\}$为弱收敛的,则$\{f(x_n)\}$必为收敛的. 由于

$$x_n(t)=n^3(b-a)^{-n}((b-a)(t-a)^{n-1}-(t-a)^n),$$

我们有

$$f(x_n)=n^3\left(\frac{b-a}{n}-\frac{b-a}{n+1}\right)=(b-a)\frac{n^2}{n+1}.$$

因此当 $n\to\infty$有 $f(x_n)\to\infty$,矛盾. 因此$\{x_n\}$不为弱收敛的. ■

问题 3.2.4 设 X 为赋范空间且在 X 中 $x_n\xrightarrow{w}x$. 求证:

$$\|x\|\leqslant\liminf_{n\to\infty}\|x_n\|.$$

解答 由问题 1.4.2,存在 $f\in X'$使得

$$f(x)=\|x\|,\quad \|f\|=1,$$

由于 $x_n\xrightarrow{w}x$,故有

$$f(x_n)\to f(x)=\|x\|.$$

由于$|f(x_n)|\leqslant\|f\|\,\|x_n\|=\|x_n\|$,

$$\liminf_{n\to\infty}|f(x_n)|\leqslant\liminf_{n\to\infty}\|x_n\|.$$

但$|f(x_n)|\to|f(x)|=\|x\|$,所以

$$\|x\|\leqslant\liminf_{n\to\infty}\|x_n\|.$$ ■

问题 3.2.5 设 X 为赋范空间. 求证:若任取 $f\in X'$,

$$\mathrm{Re}f(x_n)\to\mathrm{Re}f(x),$$

则 $x_n\xrightarrow{w}x$.

解答 若数域$\mathbb{K}$为$\mathbb{R}$,则要证的结论为平凡的. 故不妨设$\mathbb{K}=\mathbb{C}$. 设 $f\in X'$固定,$g=-\mathrm{i}f$,$u=\mathrm{Re}f$,$v=\mathrm{Im}f$. 则 $g\in X'$,

$$g(x)=-\mathrm{i}(u(x)+\mathrm{i}v(x))=v(x)-\mathrm{i}u(x),$$

所以 $\mathrm{Re}g=v$. 由题设

$$\mathrm{Re}f(x_n)\to\mathrm{Re}f(x),\quad \mathrm{Re}g(x_n)\to\mathrm{Re}g(x).$$

因此 $u(x_n)\to u(x)$且 $v(x_n)\to v(x)$. 所以

$$f(x_n)=u(x_n)+\mathrm{i}v(x_n)\to u(x)+\mathrm{i}v(x)=f(x).$$

这就证明了 $x_n\xrightarrow{w}x$. ■

问题 3.2.6 设在赋范空间 X 中有 $x_n\xrightarrow{w}x$,求证:若 $Y=\mathrm{span}\{x_n\}$,则 $x\in\overline{Y}$.

解答 假设 $x\notin\bar{Y}$,则由问题 1.4.1 知存在 $f\in X'$ 使得任取 $y\in Y$ 有 $f(y)=0$ 且

$$f(x)=d(x,Y),\quad \|f\|=1.$$

因此任取 n 有 $f(x_n)=0$,但 $f(x)>0$. 所以 $f(x_n)$ 不可能收敛到 $f(x)$,从而 $\{x_n\}$ 不弱收敛到 x. ■

问题 3.2.7 设 X 为赋范空间,X 的子集被称为**弱闭的**,若它包含所有该子集中弱收敛子列的弱极限. 求证:

(a) X 的子空间为闭的当且仅当它为弱闭的.

(b) X 中可能有子集为弱闭的,但不为闭的;即(a)中的结论对不是子空间的子集不成立.

(c) 若在 X 中 $x_n\xrightarrow{w}x$,则存在由 $\{x_n\}$ 的线性组合组成的序列 $\{y_n\}$,使得在 X 中 $\{y_n\}$ 依范数收敛到 x.

解答 (a) 设 Y 为 X 的闭子空间,$x_n\xrightarrow{w}x$,$x_n\in Y$. 设 $Y_1=\mathrm{span}\{x_n\}$,则由问题 3.2.6 知 $x\in\bar{Y}_1$,但 Y 为包含 Y_1 的闭子空间,因此 $\bar{Y}_1\subset Y$,从而 $x\in Y$,这就证明了 Y 为弱闭的.

反之,若 Y 为弱闭的且 $x\in\bar{Y}$. 则存在 $\{x_n\}\in Y$ 便得 $x_n\to x$. 若 $x'\in X$,则由 x' 的连续性有 $x'(x_n)\to x'(x)$,因此

$$x'(x_n)\to x'(x),\quad x'\in X',$$

即 $x_n\xrightarrow{w}x$. 由于 Y 为弱闭的,故 $x\in Y$. 所以 Y 为闭的.

(b) 考虑赋范空间 $X=l^2$. 设 $E=\{e_n:n=1,2,\cdots\}$. 由于 E 无极限点,故 E 为 X 的闭集. 设 $x'\in X'$,$x'(e_j)=y_j$. 则正如问题 3.1.4 解答的第二部分一样,可证 $y\in l^2$(在问题 3.1.4 解答中取 $p=2$). 因此当 $n\to\infty$ 时,$y_n\to 0$,即当 $n\to\infty$ 时有 $x'(e_n)\to 0$. 由于这对任取的 $x'\in X'$ 成立,故 $e_n\xrightarrow{w}0$. 因为 $e_n\in E$ 但 $0\notin E$,故 E 不为弱闭的.

(c) 设 $Y=\mathrm{span}\{x_n\}$,则由问题 3.2.6 知 $x\in\bar{Y}$. 因此存在 Y 中一列元 $\{y_m\}$ 使得 $y_m\to x$. 由于每一个 y_m 为 x_n 的线性组合,这就证明了(c). ■

问题 3.2.8 求证:赋范空间中的弱收敛列均为弱柯西列. 这个命题的逆命题不成立.

解答 设 $x_n\xrightarrow{w}x$,则任取 $x'\in X'$ 有 $x'(x_n)\to x'(x)$. 但收敛列必为柯西列,所以 $\{x'(x_n)\}$ 必为柯西列. 这就说明 $\{x_n\}$ 为弱柯西列.

为证逆命题不真,设 X 为赋范空间,Y 为 X 的子空间,Y 在 X 中不为闭集. 例如:我们可以取 $X=c_0$,$Y=c_{00}$. 设 $x\in\bar{Y}$,$x\notin Y$,则存在 Y 中一列元 $\{y_n\}$ 使得 $y_n\to x$.

假设 $\{y_n\}$ 在 Y 中弱收敛,即对某一个 $y\in Y$ 有 $y_n\xrightarrow{w}y$. 设 $x'\in X'$,$y'=x'|_Y$,则 $y'\in Y'$,且

$$x'\{y_n\}=y'(y_n)\to y'(y)=x'(y).$$

又由于在 X 中 $\{y_n\}$ 依范数收敛到 x,故 $x'(y_n)\to x'(x)$. 因此 $x'(x)=x'(y)$. 由于这对 $x'\in$

X'都成立，故有 $x=y\in Y$，这与 x 的选取矛盾，这就证明了$\{y_n\}$不在 Y 中弱收敛. 设 $y'\in Y'$，则

$$|y'(y_n)-y'(y_m)|=|y'(y_n-y_m)|\leqslant \|y'\|\,\|y_n-y_m\|.$$

由于$\{y_n\}$在 X 中依范数收敛，所以它必为柯西列. 因此任取 $y'\in Y'$，$\{y'(y_n)\}$为纯量柯西列，即$\{y_n\}$为弱柯西列. ■

问题 3.2.9 设 X 为赋范空间. 求证：

(a) X 中的弱柯西列均有界；

(b) X 中的弱收敛列均有界；

(c) 即使 X 为 Banach 空间，X 中的有界列也不一定弱柯西列.

解答 (a) 设$\{x_n\}$为赋范空间 X 的弱柯西列，$f_n=J(x_n)$，其中 $J:X\to X''$为典范映射. 则任取 $x'\in X'$，$\{x'(x_n)\}$为纯量柯西列，但柯西列都为有界的，且 $x'(x_n)=f_n(x')$. 因此对任意的 $x'\in X'$，序列$\{f_n(x')\}$为有界列. 由于 X'为 Banach 空间，我们可以对从 X'到$\mathbb{K}$ 的有界线性泛函族$\{f_n:n=1,2,\cdots\}$应用一致有界性原理：由于$\{f_n:n=1,2,\cdots\}$为点点有界的，故$\{f_n:n=1,2,\cdots\}$为有界的. 但 $\|f_n\|=\|J(x_n)\|=\|x_n\|$. 因此$\{x_n\}$为有界列.

(b) 由于弱收敛列均为弱柯西列，故由(a)可以得到(b).

(c) 设 $X=l^1$，且

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}y(j)x(j),\quad x\in X,$$

其中 $y(j)=(-1)^j$. 则 $y\in l^\infty$，因此由问题 3.1.1 解答的第一部分知 $f\in X'$. 若 e_n 为 X 的第 n 个单位向量，则

$$f(e_n)=\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j e_n(j)=(-1)^n.$$

因此对这个 f，$\{f(e_n)\}$不为柯西列. 从而$\{e_n\}$为 X 的有界列，但不为弱柯西列. ■

问题 3.2.10 设 X 为 Banach 空间，在 X'中 $x_n'\xrightarrow{w^*}x'$. 求证：$\{x_n'\}$为 X'中的有界列. 证明在上面的结论中，X 的完备性是必要的.

解答 设在 X'中有 $x_n'\xrightarrow{w^*}x'$. 则任取 $x\in X$ 有 $x_n'(x)\to x'(x)$. 因此任取 $x\in X$，$\{x_n'(x)\}$为纯量有界列. 由于$\{x_n':n=1,2,\cdots\}$为 $BL(X,\mathbb{K})$的子集且 X 为 Banach 空间，由一致有界性原理知$\{\|x_n'\|:n=1,2,\cdots\}$是有界的，即$\{x_n'\}$为有界列.

为证第二部分，设 $X=c_{00}$且

$$x_n'(x)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}x(j),\quad x\in c_{00},$$

$n=1,2,\cdots$. 显然每一个 $x_n':X\to\mathbb{K}$ 为线性的，且

$$|x_n'(x)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}|x(j)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}n\|x\|_\infty,\quad x\in X.$$

这证明了 $x_n' \in X'$ 且 $\| x_n' \| \leqslant \sqrt{n}$. 若

$$x = e_1 + e_2 + \cdots + e_n = (1, \cdots, 1, 0, 0, \cdots).$$

则 $x \in X$, $\| x \| = \| x \|_\infty = 1$,

$$x_n'(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}(1 + \cdots + 1) = \sqrt{n}.$$

这说明 $\| x_n' \| = \sqrt{n}$. 因此 $\{x_n'\}$ 在 X' 中无界. 另外, 对每一个 $x \in c_{00}$, 存在整数 m 使得任取 $j > m$ 有 $x(j) = 0$. 所以

$$x_n'(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{m} x(j), \quad n \geqslant m.$$

这说明对任意固定的 $x \in X$, 当 $n \to \infty$ 时

$$x_n'(x) \to 0.$$

因此在 X' 中 $x_n' \xrightarrow{w^*} 0$. 但 $\{x_n'\}$ 不为有界的. ■

问题 3.2.11 设 X 为赋范空间, E 为 X 的子集使得 E 中任意序列都有弱柯西子列, 求证: E 为有界的.

解答 假设 E 为无界的. 则对 $n = 1, 2, \cdots$, 存在 $y_n \in E$ 使得 $\| y_n \| > n$. 设 $\{y_{n_j}\}$ 为 $\{y_n\}$ 的子列, 则当 $j \to \infty$ 时有 $\| y_{n_j} \| \to \infty$. 由题设 $\{y_n\}$ 有弱柯西列, 设为 $\{y_{n_i}\}$, 则由问题 3.2.9(a)知 $\{y_{n_i}\}$ 必为有界列, 矛盾. 因此, E 必为有界的 ■

问题 3.2.12 求证: 自反赋范空间均为弱完备的.

解答 设 X 为自反的, $\{x_n\}$ 为 X 的弱柯西列, $J(x_n) = f_n$, 其中 $J: X \to X''$ 为典范映射. 则

$$f_n(x') = x'(x_n), \quad x' \in X', \quad n = 1, 2, \cdots.$$

由于 $\{x'(x_n)\}$ 为 $\mathbb{K}$ 中柯西列且 $\mathbb{K}$ 为完备的, 故对 $x' \in X'$,

$$f(x') = \lim_{n \to \infty} x'(x_n) = \lim_{n \to \infty} f_n(x')$$

在 $\mathbb{K}$ 中存在. 这样就定义了映射 $f: X' \to \mathbb{K}$. 由于 f_n 都为线性的, 故 f 也为线性的.

由问题 3.2.9(a)知 $\{x_n\}$ 为 X 中的有界列. 设任取 n 有 $\| x_n \| \leqslant \alpha$. 则

$$| f_n(x') | = | x'(x_n) | \leqslant \| x' \| \| x_n \| \leqslant \alpha \| x' \|.$$

令 $n \to \infty$ 有

$$| f(x') | \leqslant \alpha \| x' \|, \quad x' \in X'.$$

这说明 $f \in X''$. 由题设知 X 为自反的, 故存在 $x \in X$ 使得 $J(x) = f$, 即任取 $x' \in X'$ 有 $f(x') = x'(x)$. 因此

$$x'(x_n) \to f(x') = x'(x), \quad x' \in X'.$$

这意味着 $x_n \xrightarrow{w} x$. ■

问题 3.2.13 设 $X = c_{00}$ 或 c_0, 求证: 在 X 中 $x_n \xrightarrow{w} x$ 当且仅当 $\{x_n\}$ 有界且对 $j \geqslant 1$ 有

$x_n(j)\to x(j)$.

解答 设 $x_n \xrightarrow{w} x$，则由问题 3.2.9(b)知$\{x_n\}$为有界列. 若 $j=1,2,\cdots$，令

$$f_j(x) = x(j), \quad x \in X.$$

则 $f_j \in X'$，从而当 $n\to\infty$时有 $f_j(x_n)\to f_j(x)$，即当 $n\to\infty$时，

$$x_n(j) \to x(j). \tag{1}$$

反之，假设$\{x_n\}$为 X 的有界列且对某一个 $x\in X$ 及任给的 $j\geqslant 1$，(1)式是成立的. 则存在 $\alpha>0$ 使得任取 $n\geqslant 1$ 有 $\|x_n\|_\infty \leqslant \alpha$. 设 g 为 X'中一元，为证当 $n\to\infty$时 $g(x_n)\to g(x)$，我们令 $g(e_j)=y(j)$. 由问题 3.1.2 解答的第二部分知 $y\in l^1$，且

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} y(j)x(j), \quad x \in X.$$

设 $\varepsilon>0$ 任意固定，则存在 m 使得

$$\sum_{j=m+1}^{\infty} |\, y(j)\,| < \varepsilon. \tag{2}$$

将 m 固定，由(1)式，存在 N 使得任取 $n\geqslant N$

$$\sum_{j=1}^{m} |\, y(j)\,|\,|\, x_n(j)-x(j)\,| < \varepsilon. \tag{3}$$

因此若 $n\geqslant N$，

$$\begin{aligned} |\, g(x_n - x)\,| &= \left|\sum_{j=1}^{\infty} y(j)(x_n(j)-x(j))\right| \\ &\leqslant \left(\sum_{j=1}^{m} + \sum_{j=m+1}^{\infty}\right) |\, y(j)\,|\,|\, x_n(j)-x(j)\,|. \end{aligned} \tag{4}$$

在(4)式的第二个和式中，

$$|\, x_n(j)-x(j)\,| \leqslant |\, x_n(j)\,| + |\, x(j)\,| \leqslant \|x_n\|_\infty + \|x\|_\infty < \alpha + \|x\|_\infty$$

对 $n\geqslant 1$ 成立. (4)式中的另一个和式是小于 ε 的，这是由于(3)式成立. 所以若 $n\geqslant N$，由(2)式有

$$\begin{aligned} |\, g(x_n)-g(x)\,| &= |\, g(x_n - x)\,| \\ &< \varepsilon + \sum_{j=m+1}^{\infty} |\, y(j)\,|\,(\alpha + \|x\|_\infty) \\ &< \varepsilon + (\alpha + \|x\|_\infty)\varepsilon. \end{aligned}$$

由于 $\varepsilon>0$ 为任意的，故当 $n\to\infty$时，$g(x_n)\to g(x)$. 从而 $x_n \xrightarrow{w} x$. ■

问题 3.2.14 若 $1<p<\infty$，求证：在 l^p 中 $x_n \xrightarrow{w} x$ 当且仅当$\{x_n\}$为有界的且任取 $j\geqslant 1$ 有 $x_n(j)\to x(j)$. 证明当 $p=1$ 或 $p=\infty$时，上述命题不成立.

解答 我们将用类似于问题 3.2.13 的证明方法. 设 $X=l^p$，其中 $1<p<\infty$. 若在 X 中

$x_n \xrightarrow{w} x$，则由问题 3.2.9(b)知$\{x_n\}$为有界的. 若 $j=1,2,\cdots$，令

$$f_j(x) = x(j), \quad x \in X.$$

则 $f_j \in X'$，从而 $f_j(x_n) \to f_j(x)$，即当 $n \to \infty$ 时

$$x_n(j) \to x(j). \tag{5}$$

反之，设$\{x_n\}$为 X 中有界列且(5)式对所有 $j \geqslant 1$ 及某个 $x \in X$ 成立. 则存在 $\alpha>0$ 使得任给 $n \geqslant 1$ 有 $\| x_n \|_p \leqslant \alpha$. 设 $g \in X'$，为证当 $n \to \infty$ 时 $g(x_n) \to g(x)$，设 $g(e_j)=y_j$. 由问题 3.1.4 解答的第二部分知 $y \in l^q$，且

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} y(j)x(j), \quad x \in X.$$

设 $\varepsilon>0$ 固定，存在 m 使得

$$\sum_{j=m+1}^{\infty} | y(j) |^q < \varepsilon^q. \tag{6}$$

将 m 固定，我们有

$$\begin{aligned} | g(x_n - x) | &= \left| \sum_{j=1}^{\infty} y(j)(x_n(j) - x(j)) \right| \\ &\leqslant \left(\sum_{j=1}^{m} + \sum_{j=m+1}^{\infty} \right) | y(j) | | x_n(j) - x(j) |. \end{aligned} \tag{7}$$

利用 Hölder 不等式，(7)式中的第二个和式不大于

$$\left(\sum_{j=m+1}^{\infty} | y(j) |^q \right)^{1/q} \left(\sum_{j=m+1}^{\infty} | x_n(j) - x(j) |^p \right)^{1/p} \leqslant \varepsilon \| x_n - x \|_p,$$

其中，在上面的运算中我们用到了(6)式. 又由于(5)式，存在 N，使得任取 $n \geqslant N$，(7)式中的第一个和式不大于 ε. 由于任取 n 有

$$\| x_n - x \|_p = \| x_n \|_p + \| x \|_p \leqslant \alpha + \| x \|_p,$$

故当 $n \geqslant N$ 时

$$| g(x_n) - g(x) | = | g(x_n - x) | < \varepsilon + \varepsilon(\alpha + \| x \|_p).$$

由于 $\varepsilon>0$ 为任意的，故当 $n \to \infty$ 时，$g(x_n) \to g(x)$. 因此 $x_n \xrightarrow{w} x$.

若 $p=1$ 或 ∞，正如上面的证明一样，若 $x_n \xrightarrow{w} x$，则$\{x_n\}$为有界列且任取 $j \geqslant 1$，(5)式成立. 我们将证明当 $p=1$ 或 ∞ 时，其逆命题不成立.

设 $p=1$，且

$$x_n(j) = \begin{cases} 1/n, & 1 \leqslant j \leqslant n, \\ 1/j^2, & j \geqslant n+1. \end{cases}$$

则

$$\sum_{j=1}^{\infty} | x_n(j) | = n\left(\frac{1}{n}\right) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2}.$$

故 $x_n\in l^1$ 且 $\|x_n\|_1<1+\frac{1}{n}$. 因此$\{x_n\}$为 l^1 中的有界列. 任取 $n\geqslant j$ 有

$$x_n(j)=\frac{1}{n}.$$

所以(5)式成立,其中 $x=0$. 设

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}x(j),\quad x\in l^1.$$

则 f 为 l^1 上的有界线性泛函,当 $n\to\infty$时

$$f(x_n)=n\left(\frac{1}{n}\right)+\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j^2}\to 1.$$

这说明$\{x_n\}$不弱收敛到 0.

最后,设 $p=\infty$,令

$$x_n(j)=\begin{cases}1/n, & 1\leqslant j\leqslant n,\\ 1, & j\geqslant n+1.\end{cases}$$

则 $\|x_n\|_\infty=1$ 且任取 $j\geqslant 1$,当 $n\to\infty$时有 $x_n(j)\to 0$. 因此$\{x_n\}$为 l^∞ 的有界列且当 $x=0$ 时(5)式成立. 设

$$g(x)=\lim_{j\to\infty}x(j),\quad x\in c.$$

则 g 为 c 上的有界线性泛函,设 f 为 g 在 l^∞ 上的一个有界线性延拓,则任取 n 有

$$f(x_n)=g(x_n)=1.$$

这说明$\{x_n\}$不弱收敛到 0. ■

问题 3.2.15 求证:在 c 中 $x_n\xrightarrow{w}x$ 当且仅当$\{x_n\}$为 c 中的有界列且对 $j=1,2,\cdots$,当 $n\to\infty$时

$$x_n(j)\to x(j),\qquad \lim_{j\to\infty}x_n(j)\to\lim_{j\to\infty}x(j).$$

解答 我们用类似于上题的方法. 设 $X=c$.

设在 c 中 $x_n\xrightarrow{w}x$. 则由问题 3.2.9(b)知$\{x_n\}$为有界的. 对 $j=1,2,\cdots$,设

$$f_j(x)=x(j),\quad x\in X.$$

则 $f_j\in X'$,从而当 $n\to\infty$时 $f_j(x_n)\to f_j(x)$,即有

$$x_n(j)\to x(j). \tag{8}$$

类似地,若对 $x\in X$,设 $f(x)=\lim_{j\to\infty}x(j)$,则 $f\in X'$. 因此当 $n\to\infty$时 $f(x_n)\to f(x)$,即有当 $n\to\infty$时

$$\lim_j x_n(j)\to\lim_j x(j). \tag{9}$$

反之,假设$\{x_n\}$为 X 中有界列,且(8)式和(9)式对 $j\geqslant 1$ 及某个 $x\in X$ 成立. 则存在 $\alpha>0$ 使得对 $n\geqslant 1$ 有 $\|x_n\|_\infty\leqslant\alpha$. 设 g 为 X' 中任一元,为证 $g(x_n)\to g(x)$,设 $g(e_j)=y_{j+1}$. 由问题 3.1.3 证明的第二部分知 $y\in l^1$,$y(1)$的选取是使得

$$g(x)=y(1)f(x)+\sum_{j=1}^{\infty}x(j)y(j+1),\quad x\in X$$

成立，其中

$$f(x)=\lim_{j\to\infty}x(j),\quad x\in X.$$

设 $\varepsilon>0$ 给定，存在 m 使得

$$\sum_{j=m+1}^{\infty}|y(j)|<\varepsilon. \tag{10}$$

固定这个 m，我们有

$$|g(x_n-x)|\leqslant|y(1)||f(x_n)-f(x)|$$
$$+\left(\sum_{j=1}^{m-1}+\sum_{j=m}^{\infty}\right)|y(j+1)||x_n(j)-x(j)|. \tag{11}$$

在(11)式中的最后一个和式中

$$|x_n(j)-x(j)|\leqslant|x_n(j)|+|x(j)|\leqslant\|x_n\|_\infty+\|x\|_\infty\leqslant\alpha+\|x\|_\infty$$

对 $n\geqslant1$ 成立. 利用(8)式可以找到 N_1 使得当 $n\geqslant N_1$ 时，(11)式中的另外一个和式小于 ε. 利用(9)式可以找到 $N\geqslant N_1$，使得任取 $n\geqslant N$ 时

$$|y(1)||f(x_n)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此若 $n\geqslant N$，由(10)式和(11)式有

$$|g(x_n)-g(x)|=|g(x_n-x)|$$
$$<\varepsilon+\varepsilon+(\alpha+\|x\|_\infty)\sum_{j=m}^{\infty}|y(j+1)|$$
$$<2\varepsilon+(\alpha+\|x\|_\infty)\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon>0$ 为任意的，这就证明了当 $n\to\infty$ 时 $g(x_n)\to g(x)$. 因此 $x_n\xrightarrow{w}x$. ■

问题 3.2.16 求证：在 l^1 中 $x_n\to x$ 当且仅当 $x_n\xrightarrow{w}x$.

解答 设在 l^1 中 $x_n\to x$，则任取 $x'\in(l^1)'$，由 x' 的连续性有

$$x'(x_n)\to x'(x),$$

因此 $x_n\xrightarrow{w}x$.

为证逆命题成立，我们首先假设在 l^1 中 $x_n\xrightarrow{w}0$，且对某个 $\varepsilon>0$，任取 $n\geqslant1$ 有 $\|x_n\|\geqslant\varepsilon$. 我们将用如下方法找到由正整数组成的序列 $\{m_r\}$ 及 $\{n_r\}$：设 $n_0=1$. 由于 $x_1\in l^1$，存在 $m_1>1$ 使得

$$\sum_{j=m_1+1}^{\infty}|x_1(j)|<\varepsilon/5.$$

若 $x_j'(x)=x(j)$，则 x_j' 为 l^1 上的有界线性泛函，从而当 $n\to\infty$ 时，

$$x_n(j)=x_j'(x_n)\to0. \tag{12}$$

因此存在 $n_1>1$ 使得

$$\sum_{j=1}^{m_1} |x_{n_1}(j)|<\varepsilon/5.$$

若 n_{r-1} 及 m_r 已经找到，我们取 $n_r>n_{r-1}$ 使得

$$\sum_{j=1}^{m_r} |x_{n_r}(j)|<\varepsilon/5, \tag{13}$$

由(12)式知这是可以做到的. 然后我们取 $m_{r+1}>m_r$ 使得

$$\sum_{j=m_{r+1}+1}^{\infty} |x_{n_r}(j)|<\varepsilon/5. \tag{14}$$

因为 $x_{n_r}\in l^1$，所以这是可以做到的. 这样我们就构造了序列 $\{m_r\}$ 及 $\{n_r\}$.

选取 $y(j)$ 使得

$$y(j)x_{n_r}(j)=|x_{n_r}(j)|$$

对 $m_r<j\leqslant m_{r+1}$，$r=0,1,2,\cdots$ 成立且任取 $j\geqslant 1$ 有 $|y(j)|\leqslant 1$（其中 $m_0=0$）. 设

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty} y(j)x(j),\quad x\in l^1.$$

问题 3.1.1 解答的第一部分说明 f 为 l^1 上的有界线性泛函. 因此当 $n\to\infty$ 时，$f(x_n)\to 0$. 我们有

$$f(x_{n_r})=\left(\sum_{j=1}^{m_r}+\sum_{j=m_r+1}^{m_{r+1}}+\sum_{j=m_{r+1}+1}^{\infty}\right)y(j)x_{n_r}(j)=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3. \tag{15}$$

在第二个和式中

$$y(j)x_{n_r}(j)=|x_{n_r}(j)|,$$

而对 $j\geqslant 1$，

$$|y(j)x_{n_r}(j)|\leqslant|x_{n_r}(j)|.$$

因此由(13)式和(14)式得

$$\Sigma_2=\sum_{j=m_r+1}^{m_{r+1}}|x_{n_r}(j)|,$$

$$|\Sigma_1|+|\Sigma_3|\leqslant\sum_{j=1}^{m_r}|x_{n_r}(j)|+\sum_{j=m_{r+1}+1}^{\infty}|x_{n_r}(j)|<2\varepsilon/5.$$

所以由(15)式知

$$\sum_{j=m_r+1}^{m_{r+1}}|x_{n_r}(j)|=\Sigma_2=|f(x_{n_r})-\Sigma_1-\Sigma_3|<|f(x_{n_r})|+2\varepsilon/5.$$

由(13)式和(14)式有

$$\sum_{j=1}^{\infty}|x_{n_r}(j)|<f(x_{n_r})+4\varepsilon/5.$$

上式对所有的 r 都成立. 由于当 r 足够大时 $|f(x_{n_r})|<\varepsilon/5$，所以当 r 足够大时

$$\| x_{n_r} \|_1 < \varepsilon.$$

但由假设任取 $n\geqslant 1$ 有 $\| x_n \|_1 \geqslant \varepsilon$，矛盾. 因此没有这样的 $\varepsilon>0$ 存在.

为完成证明，我们假设在 l^1 中 $y_n \xrightarrow{w} y$，但 $\| y_n - y \|$ 不收敛到 0. 则对某一个 $\varepsilon>0$，存在无穷正整数序列 $n_1, n_2, \cdots$，使得对 $i\geqslant 1$ 有 $\| y_{n_i} - y \| \geqslant \varepsilon$. 设 $x_i = y_{n_i} - y$，则在 l^1 中 $x_i \xrightarrow{w} 0$ 且 $\| x_i \| \geqslant \varepsilon$. 由上面的证明知这样的 $\varepsilon>0$ 是不存在的. ■

问题 3.2.17 设 X 为 Banach 空间，Y 为赋范空间，$F_n \in BL(X,Y)$，$n=1,2,\cdots$. 求证：若对任取的 $x\in X$，$\{F_n(x)\}$ 在 Y 中弱收敛，则 $\{\| F_n \|\}$ 为有界的.

解答 若在 Y 中 $F_n(x) \xrightarrow{w} y$，则由问题 3.2.9(b)知 $\{F_n(x)\}$ 在 Y 中为有界的. 因此任取 $x\in X$，$\{F_n(x): n\geqslant 1\}$ 为有界的. 由于 X 为 Banach 空间，一致有界性原理可以推出 $\{\| F_n \| : n=1,2,\cdots\}$ 为有界的. ■

问题 3.2.18 设 $t_0 \in [a,b]$，对 $n=1,2,\cdots$，设 $y_n \in C[a,b]$ 满足

$$\begin{aligned} y_n(t) &\geqslant 0, \quad t \in [a,b], \\ y_n(t) &= 0, \quad |t-t_0| > 1/n, \\ \int_a^b y_n(t)\mathrm{d}t &= 1 \end{aligned} \tag{16}$$

设 x_n' 及 x' 定义在 $C[a,b]$ 上为

$$\begin{aligned} x_n'(x) &= \int_a^b y_n(t)x(t)\mathrm{d}t, \quad x \in C[a,b], \\ x'(x) &= x(t_0), \quad x \in C[a,b]. \end{aligned}$$

求证 $x_n' \xrightarrow{w^*} x'$.

解答 设 $x\in C[a,b]$，我们需要证明当 $n\to\infty$ 时，$x_n'(x)\to x'(x)$. 由(16)式有

$$x_n'(x) - x'(x) = \int_a^b y_n(t)x(t)\mathrm{d}t - x(t_0)\int_a^b y_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b (x(t)-x(t_0))y_n(t)\mathrm{d}t.$$

设 $\varepsilon>0$ 给定，由于 x 为连续的，存在 $\delta>0$ 使得任取 $t\in[a,b]$，$|t-t_0|<\delta$，有

$$|x(t)-x(t_0)|<\varepsilon.$$

因此

$$\begin{aligned} |y_n(t)(x(t)-x(t_0))| &\leqslant \varepsilon y_n(t), \quad |t-t_0|<1/n, \\ |y_n(t)(x(t)-x(t_0))| &= 0, \quad |t-t_0| \geqslant 1/n. \end{aligned}$$

所以

$$|x_n'(x)-x'(x)| \leqslant \int_a^b |y_n(t)(x(t)-x(t_0))|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \varepsilon y_n(t)\mathrm{d}t = \varepsilon.$$

上式只要 $1/n<\delta$ 就成立，故 $x_n' \xrightarrow{w^*} x'$. ■

问题 3.2.19 设 X, Y 为赋范空间，$F: X\to Y$ 为线性算子. 求证：下述命题相互等价：

(a) F 为连续的;

(b) 若在 X 中有 $x_n \to x$,则在 Y 中有 $F(x_n) \to F(x)$;

(c) 若在 X 中有 $x_n \xrightarrow{w} x$,则在 Y 中有 $F(x_n) \xrightarrow{w} F(x)$;

(d) 若在 X 中有 $x_n \to x$,则在 Y 中有 $F(x_n) \xrightarrow{w} F(x)$.

解答 对度量空间(a)和(b)的等价性是众所周知的.

(a) $\Rightarrow$(c):设 F 为连续的且在 X 中 $x_n \xrightarrow{w} x$. 若 $y' \in Y'$,$x' = y' \circ F$,则 $x' \in X'$. 因此 $x'(x_n) \to x'(x)$,即 $y'(F(x_n)) \to y'(F(x))$. 因此在 Y 中有 $F(x_n) \xrightarrow{w} F(x)$.

(c) $\Rightarrow$(a):若(a)不成立,则对 $n \geqslant 1$,存在 $z_n \in X$ 使得

$$\| F(z_n) \| > n, \quad \| z_n \| < 1.$$

令 $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} z_n$,则

$$\| x_n \| = \frac{1}{\sqrt{n}} \| z_n \| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0,$$

$$\| F(x_n) \| = \frac{1}{\sqrt{n}} \| F(z_n) \| > \sqrt{n}.$$

因此$\{F(x_n)\}$为无界的. 由问题 3.2.9(b)知$\{F(x_n)\}$不可能弱收敛. 但由于 $\| x_n \| \to 0$ 有 $x_n \xrightarrow{w} 0$. 因此当(a)不成立时(c)也不成立.

(a)$\Rightarrow$(d):若(a)成立,且在 X 中 $x_n \to x$,则由连续性知 $F(x_n) \to F(x)$,从而也有 $F(x_n) \xrightarrow{w} F(x)$.

(d)$\Rightarrow$(a):若(a)不成立,则如上面一样,存在 X 中一列元$\{x_n\}$使得 $x_n \to 0$,但$\{F(x_n)\}$在 Y 中不弱收敛. 因此当(a)不成立时(d)也不成立. 这就证明了(a),(b),(c)和(d)的等价性.

第4章 CHAPTER 4

有界线性算子

这一章将主要研究有界线性算子. 在 4.1 节中我们研究紧线性算子. 对每个从 X 到 X 的有界线性算子,与之相对应一些纯量,称为该算子的谱值,这将在 4.2 节中讨论. 谱值是在研究线性方程的解时很自然产生的概念,这些线性方程包括线性微分方程、线性积分方程及线性代数方程、因此谱值在研究这类方程的解时是十分有用的.

4.1 紧 算 子

设 X,Y 为赋范空间,

$$U=\{x\in X:\|x\|<1\}$$

为 X 的**开单位球**. 线性算子 $F:X\to Y$ 为连续的当且仅当 $F(U)$ 为有界的. 若 $\overline{F(U)}$ 为 Y 的紧子集,则称 F 为**全连续的**或**紧的**. 我们用 $CL(X,Y)$ 来表示所有从 X 到 Y 的紧算子. 若 $X=Y$,记 $CL(X)=CL(X,Y)$.

由于紧子集必为有界集,故紧线性算子必为有界的. 因此 $CL(X,Y)$ 为 $BL(X,Y)$ 的子集,一般来讲,它是一个真子集(见问题 4.1.1).

线性算子 $F:X\to Y$ 为紧的当且仅当对 X 中任意有界列 $\{x_n\}$, Y 中序列 $\{F(x_n)\}$ 在 Y 中都有收敛子列. 若 $F:X\to Y$ 为有界线性算子且其值域为 Y 的有限维空间,则 F 为紧的.

若 $F:X\to Y,G:X\to Y$ 为紧算子,则 kF 及 $F+G$ 都为紧算子,

因此 $CL(X,Y)$ 为 $BL(X,Y)$ 的子空间. 若 Y 为 Banach 空间，则 $CL(X,Y)$ 为 Banach 空间 $BL(X,Y)$ 的闭子空间.

若 $F:X\to Y, G:Y\to Z$ 为有界线性算子，且其中之一为紧算子，则 $G\circ F:X\to Z$ 为紧算子.

练习

1. 求证：每个紧线性算子都连续且这个命题的逆命题不成立.

2. 设 X 为赋范空间，$F:X\to\mathbb{K}$ 定义为

$$F(x)=\begin{cases}\|x\|, & \|x\|\leqslant 1,\\ 0, & \|x\|>1.\end{cases}$$

求证：$\overline{F(U)}$ 为紧的，但 F 不为连续的.

3. 设 X,Y 为赋范空间，求证：线性算子 $F:X\to Y$ 为紧的当且仅当任取 $\{x_n\}$ 为 X 中的有界列，$\{F(x_n)\}$ 在 Y 中都有收敛子列.

4. 设 X 为赋范空间，求证：X 上的有界线性泛函均为紧算子.

5. 求证：若 $F:X\to Y$ 及 $G:Y\to Z$ 为有界线性算子且 F 和 G 中至少有一个为紧算子，则 $G\circ F:X\to Z$ 为紧算子.

问题

问题 4.1.1 设 X,Y 为赋范空间，且 X 为无穷维的. 设 $F:X\to Y$ 为线性算子且下有界，即存在 $\alpha>0$ 使得

$$\alpha\|x\|\leqslant\|F(x)\|,\quad x\in X. \tag{1}$$

求证：F 不为紧算子. 由此推出无穷维赋范空间上的恒等算子不为紧算子.

解答 假设 F 为紧算子且为下有界的. 则存在 $\alpha>0$ 使得(1)成立，我们首先证明单位开球 U 为完全有界的. 设 $\varepsilon>0$ 给定. 对 $b\in Y$，令

$$V(b)=\{y\in Y:\|y-b\|<\varepsilon\alpha\},$$

则 $\{V(b):b\in F(U)\}$ 为 $E=\overline{F(U)}$ 的开覆盖. 由于 E 为紧的，所以存在 $b_1,b_2,\cdots,b_n\in F(U)$ 使得 $V(b_1),V(b_2),\cdots,V(b_n)$ 也为 $\overline{F(U)}$ 的开覆盖. 设 $b_i=F(a_i)$，其中 $a_i\in U$，

$$U(a_i,\varepsilon)=\{x\in X:\|x-a_i\|<\varepsilon\}.$$

设 $x\in U$，则 $F(x)\in F(U)\subset E$，因此存在 i 使得 $F(x)\in V(b_i)$，所以利用(1)式有

$$\|F(x)-b_i\|<\varepsilon\alpha,$$

$$\alpha\|x-a_i\|\leqslant\|F(x-a_i)\|=\|F(x)-b_i\|<\varepsilon\alpha.$$

这说明对某个 i 有 $\|x-a_i\|<\varepsilon$，即 $x\in U(a_i,\varepsilon)$. 因此 $U(a_1,\varepsilon),U(a_2,\varepsilon),\cdots,U(a_n,\varepsilon)$ 为 U 的覆盖. 这就证明了 U 为完全有界的. 由问题 1.3.15 知 X 必为有限维空间. 所以若 X 为无

穷维的，则 F 必不为紧算子.

若 $I:X\to X$ 为恒等算子，则 $\|I(x)\|=\|x\|$，从而 I 为下有界的. 因此若 X 为无穷维空间，则 I 必不为紧的.

问题 4.1.2 设 X 为赋范空间，$z\in X$，$f\in X'$. 求证：若 $T:X\to X$ 定义为

$$T(x)=f(x)z,\quad x\in X.$$

则 T 为紧线性算子.

解答 T 的线性性可直接由 f 的线性性得到，设 $\{x_n\}$ 为 X 的有界列，由于 f 为有界线性泛函，所以 $\{f(x_n)\}$ 为纯量有界列，从而它有收敛子列 $\{f(x_{n_i})\}$. 若当 $i\to\infty$ 时，$f(x_{n_i})\to k$，则当 $i\to\infty$ 时 $T(x_{n_i})\to kz$. 因此 $\{T(x_{n_i})\}$ 为 $\{T(x_n)\}$ 的收敛子列. 这就证明了 T 为紧的. ■

问题 4.1.3 设 $X=l^p$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，$\{\alpha_n\}$ 为一纯量列使得当 $n\to\infty$ 时，$\alpha_n\to 0$. 求证：算子 $A:X\to X$

$$A(x)(n)=\alpha_n x(n),\quad n\geqslant 1,\quad x\in X$$

为紧算子.

解答 算子 A 显然为线性的. 若 $n=0,1,2,\cdots$，令

$$\beta_n=\sup_{j\geqslant n+1}|\alpha_j|,\quad \beta=\beta_0.$$

则当 $n\to\infty$ 时有 $\beta_n\to 0$. 若 $1\leqslant p<\infty$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}|A(x)(n)|^p=\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^p|x(n)|^p\leqslant\beta^p\sum_{n=1}^{\infty}|x(n)|^p.$$

这说明任取 $x\in l^p$，$A(x)\in l^p$. 若 $p=\infty$，则

$$|A(x)(n)|=|\alpha_n||x(n)|\leqslant\beta\|x\|_\infty;$$

因此若 $x\in l^\infty$，则 $A(x)\in l^\infty$.

对 $n=1,2,\cdots$，定义 $A_n:X\to X$ 为

$$A_n(x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x(j)e_j=(\alpha_1x(1),\alpha_2x(2),\cdots,\alpha_nx(n),\cdots).$$

则 A_n 为线性算子. 若 $1\leqslant p<\infty$，则

$$\|A_n(x)\|_p^p=\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|^p|x(j)|^p\leqslant\beta^p\|x\|_p^p,$$

$$\|A_n(x)\|_p\leqslant\beta\|x\|_p.$$

若 $p=\infty$，则

$$|A_n(x)(j)|\leqslant\beta|x(j)|\leqslant\beta\|x\|_\infty,$$

$$\|A_n(x)\|_\infty\leqslant\beta\|x\|_\infty.$$

因此 $A_n:X\to X$ 为有界线性算子，它的值域为有限维的，从而 A_n 为紧的，即有 $A_n\in CL(X)$. 显然有

$$A_n(x)(j)-A(x)(j)=\begin{cases}0, & 1\leqslant j\leqslant n,\\ -\alpha_j x(j), & j\geqslant n+1.\end{cases}$$

因此若 $1\leqslant p<\infty$，

$$\| A_n(x)-Ax \|_p^p=\sum_{j=n+1}^{\infty}|\alpha_j x(j)|^p\leqslant\beta_n^p\sum_{j=n+1}^{\infty}|x(j)|^p\leqslant\beta_n^p\|x\|_p^p,$$

$$\| A_nx-Ax \|_p\leqslant\beta_n\|x\|_p, \tag{2}$$

若 $p=\infty$，则

$$|A_n(x)(j)-A(x)(j)|\leqslant\beta_n|x(j)|\leqslant\beta_n\|x\|_\infty,$$

$$\| A_nx-Ax \|_\infty\leqslant\beta_n\|x\|_\infty.$$

因此对 $1\leqslant p\leqslant\infty$，(2)式均成立. 这就证明了 $A_n-A\in BL(X)$ 且当 $n\to\infty$ 时，

$$\| A_n-A \|\leqslant\beta_n\to 0.$$

所以在 $BL(X)$ 中有 $A_n\to A$. 由于 X 为 Banach 空间，故 $CL(X)$ 为 $BL(X)$ 的闭子空间. 因此 $A\in CL(X)$. ■

问题 4.1.4 问：是否存在紧线性算子 $T:l^\infty\to l^\infty$ 使得 T 为满射？

解答 答案是“否”. 我们将证明若 X,Y 为Banach空间，且存在紧线性算子 $T:X\to Y$，T 为满射，则 Y 必为有限维的. 若这样的算子存在，则它必为有界的且为满射，由开映射定理，若 U 为 X 的开单位球，则 $T(U)$ 为 Y 的开子集. 所以存在 $r>0$ 使得若

$$V=\{y\in Y:\|y\|<r\},$$

则 $V\subset T(U)$. 由假设知 $\overline{T(U)}$ 为紧子集，$\overline{V}\subset\overline{T(U)}$，故

$$\overline{V}=\{y\in Y:\|y\|\leqslant r\}$$

为紧子集. 由问题 1.3.15 知 Y 必为有限维空间.

由于 $X=l^\infty$ 为无穷维 Banach 空间，所以不存在 $T:l^\infty\to l^\infty$ 为紧算子且为满射. ■

问题 4.1.5 若 X,Y 为赋范空间，$F\in BL(X,Y)$，F 不为紧算子. 问：是否可以有 X 的无穷维子空间 Z，使得 T 在 Z 上的限制为紧算子？

解答 答案是“可以”. 设 $X=l^2$，对 $j\geqslant 1$，令

$$F(x)(2j)=0,\quad F(x)(2j-1)=x(2j-1).$$

因此 $F(x)=(x(1),0,x(3),0,\cdots)\in l^2$ 对所有 $x\in l^2$ 成立. 这就定义了映射 $F:l^2\to l^2$. 由于对 $i\geqslant 1$ 有

$$|F(x)(i)|\leqslant|x(i)|,$$

故 $\| F(x) \|_2\leqslant\| x \|_2$，所以 F 为有界的. 易证 F 的值域为

$$Y=\{y\in l^2:y(2j)=0,j\geqslant 1\}.$$

若 $y_n\in Y$，且在 l^2 中 $y_n\to x$，则对 $i\geqslant 1$，当 $n\to\infty$ 时，有

$$y_n(i)\to x(i).$$

由于 $y_n(2j)=0$，故有 $x(2j)=0$，所以 $x\in Y$. 这说明 Y 为 $X=l^2$ 的闭子空间. 从而 X 和 Y 均为 Banach 空间，且 $T:X\to Y$ 为满射，注意到 $Y=\overline{\operatorname{span}}\{e_1,e_3,e_5,\cdots\}$ 为无穷维的，故由问题 4.1.4 知 T 不为紧算子.

设 $Z=\{x\in l^2:x(2j-1)=0,j\geqslant 2\}$ 且 G 为 F 在 Z 上的限制，则

$$Z = \overline{\text{span}}\{e_1, e_2, e_4, e_6, \cdots\}$$

为无穷维的，任取 $x \in Z$

$$G(x)(2j) = F(x)(2j) = 0,$$

$$G(x)(2j-1) = F(x)(2j-1) = x(2j-1) = 0, j \geqslant 2.$$

因此任取 $x \in Z$ 及 $i \geqslant 2$ 有 $G(x)(i) = 0$. 所以 G 的值域为 $\text{span}\{e_1\}$，但 $\text{span}\{e_1\}$ 为有限维空间，故 G 必为紧算子. ■

问题 4.1.6 设 X 为无穷维赋范空间，$F \in CL(X)$. 求证：F 在 $BL(X)$ 中不可逆.

解答 假设 F 在 $BL(X)$ 中可逆，设其逆为 G. 则任取 $x \in X$ 有

$$\| x \| = \| GF(x) \| \leqslant \| G \| \| F(x) \|.$$

这说明 F 为下有界的. 由问题 4.1.1 知 F 不可能为紧算子，矛盾. 故 F 在 $BL(X)$ 中不可逆. ■

问题 4.1.7 设 $X = l^p$，$Y = l^q$，其中

$$1 < p \leqslant \infty, \quad 1 \leqslant q < \infty, \quad 1/p + 1/q = 1,$$

算子 $F: X \to Y$ 定义为

$$F(x)(i) = \sum_{j=1}^{\infty} k_{ij} x(j), \quad i \geqslant 1, \quad x \in l^p.$$

求证：若

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} | k_{ij} |^q < \infty$$

则 $F \in CL(X, Y)$.

解答 F 显然为线性的. 设

$$\sum_{j=1}^{\infty} | k_{ij} |^q = \alpha_i^q, \quad i = 1, 2, \cdots,$$

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i^q = \beta_n^q, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

且 $\beta = \beta_0$. 由于 $\sum \alpha_i^q$ 收敛，故当 $n \to \infty$ 时，$\beta_n \to 0$. 若 $1 < p < \infty$，$x \in l^p$，则由 Hölder 不等式

$$\sum_{j=1}^{\infty} | k_{ij} x(j) | \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} | k_{ij} |^q \right)^{1/q} \left(\sum_{j=1}^{\infty} | x(j) |^p \right)^{1/p} = \alpha_i \| x \|_p, \tag{3}$$

若 $p = \infty$，则 $q = 1$，

$$| k_{ij} x(j) | \leqslant | k_{ij} | | x(j) | \leqslant | k_{ij} | \| x \|_\infty, \quad j \geqslant 1,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} | k_{ij} x(j) | \leqslant \alpha_i \| x \|_\infty.$$

上式与(3)式结合证明了对每个 $i \geqslant 1$，$F(x)(i)$ 存在，且

$$| F(x)(i) | \leqslant \alpha_i \| x \|_p, \quad i \geqslant 1, \quad 1 < p \leqslant \infty, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} | F(x)(i) |^q \leqslant \| x \|_p^q \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^q = (\beta \| x \|_p)^q.$$

因此，$F(x)$有意义且 $F(x)\in l^q$，

$$\| F(x) \|_q \leqslant \beta \| x \|_p, \quad x \in l^p.$$

所以 $F\in BL(X,Y)$.

对 $n=1,2,\cdots$，定义 $F_n:X\to Y$ 为

$$F_n(x)=\sum_{i=1}^{n} F(x)(i)e_i = (F(x)(1),\cdots,F(x)(n),0,0,\cdots).$$

显然有 $F_n(x)\in l^q$，F_n 为线性的且由(4)式有

$$\| F_n(x) \|_q^q = \sum_{i=1}^{n} | F(x)(i) |^q \leqslant \| x \|_p^q \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^q.$$

因此

$$\| F_n(x) \|_q \leqslant \| x \|_p \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^q \right)^{1/q} = \beta \| x \|_p.$$

所以 F_n 为有界的，它的值域为有限维的，从而每一个 F_n 为紧算子. 由于

$$F(x)(i) - F_n(x)(i) = \begin{cases} 0, & 1 \leqslant i \leqslant n, \\ F(x)(i), & i \geqslant n+1, \end{cases}$$

利用(4)式有

$$\| F(x) - F_n(x) \|_q^q = \sum_{i=n+1}^{\infty} | F(x)(i) |^q \leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i^q \| x \|_p^q = \beta_n^q \| x \|_p^q.$$

因此 $\| F(x)-F_n(x) \|_q \leqslant \beta_n \| x \|_p$. 由于 $\| F_n - F \| \leqslant \beta_n \to 0$，故在 $BL(X,Y)$ 中有 $F_n\to F$. 由于 $Y=l^q$ 为 Banach 空间，故 $CL(X,Y)$ 为 $BL(X,Y)$ 的闭子空间，所以 $F\in CL(X,Y)$. ■

问题 4.1.8 设 $X=l^1$，$Y=l^\infty$，$F:X\to Y$ 定义为

$$F(x)(i) = \sum_{j=1}^{\infty} k_{ij} x(j), \quad i \geqslant 1, \quad x \in l^1.$$

求证：若

$$\alpha_i = \sup_{j\geqslant 1} | k_{ij} | < \infty, \quad i \geqslant 1$$

且当 $i\to\infty$ 时有 $\alpha_i\to 0$，则 $F\in CL(X,Y)$.

解答 我们用类似与问题 4.1.7 的方法. F 的线性性是显然的. 若 $x\in l^1$，则对 $i\geqslant 1$，有

$$\sum_{j=1}^{\infty} | k_{ij} x(j) | \leqslant \sum_{j=1}^{j} \alpha_i | x(j) | = \alpha_i \| x \|_1.$$

这说明对 $i\geqslant 1$，$F(x)(i)$ 有意义，且

$$| F(x)(i) | \leqslant \alpha_i \| x \|_1, \quad i \geqslant 1. \tag{5}$$

由于 $\alpha_i\to 0$，故存在 β 使得任给 i 有 $|\alpha_i|\leqslant\beta$. 因此 $F(x)$ 有意义，$F(x)\in l^\infty$ 且

$$\| F(x) \|_\infty \leqslant \beta \| x \|_1, \quad x \in l^1.$$

因此有 $F\in BL(X,Y)$.

对 $n\geqslant 1$，定义 $F_n:X\to Y$ 为

$$F_n(x)=\sum_{i=1}^{n}F(x)(i)e_i=(F(x)(1),F(x)(2),\cdots,F(x)(n),0,0,\cdots).$$

显然有 $F_n(x)\in l^\infty$，F_n 为线性的且由(5)知

$$\|F_n(x)\|\leqslant\beta\|x\|_1.$$

所以 F_n 为有界的，其值域为有限维的，从而 F_n 为紧算子. 由于

$$F(x)(i)-F_n(x)(i)=\begin{cases}0, & 1\leqslant i\leqslant n,\\ F(x)(i), & i\geqslant n+1,\end{cases}$$

利用(5)式有

$$\|F(x)-F_n(x)\|=\sup_{i\geqslant n+1}|F(x)(i)|\leqslant\beta_n\|x\|_1,$$

其中 $\beta_n=\sup\limits_{i\geqslant n+1}\alpha_i$，所以

$$\|F-F_n\|\leqslant\beta_n.$$

由于当 $i\to\infty$ 有 $\alpha_i\to0$，故当 $n\to\infty$ 时 $\beta_n\to0$. 因此在 $BL(X,Y)$ 中有 $F_n\to F$. 但 $F_n\in BL(X,Y)$，$Y=l^\infty$ 为Banach空间，故 $CL(X,Y)$ 为 $BL(X,Y)$ 的闭子空间，从而 $F\in CL(X,Y)$. ■

问题 4.1.9 设 $X=l^2$，W 为所有 $BL(X)$ 中的算子 A 满足

$$A(x)(i)=\sum_{j=1}^{\infty}k_{ij}x(j),\quad i\geqslant1,x\in l^2,$$

其中

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|k_{ij}|^2<\infty.$$

求证 W 为 $CL(X)$ 的真子空间.

解答 对 $p=q=2$ 应用问题 4.1.7 知 W 为 $CL(X)$ 的子集. 设 $A,B\in W$ 及 $k\in\mathbb{K}$，又设 M 和 N 分别由矩阵 $\boldsymbol{M}_1=(a_{ij})$ 及 $\boldsymbol{M}_2=(b_{ij})$ 表示. 设

$$k_{ij}=ka_{ij}+b_{ij}.$$

则若 $x\in X$，$i\geqslant1$ 有

$$kA(x)(i)+Bx(i)=k\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}x(j)+\sum_{j=1}^{\infty}b_{ij}x_j,$$

$$(kAx+Bx)(i)=\sum_{j=1}^{\infty}k_{ij}x(j).$$

因此 $kA+B$ 由矩阵 (k_{ij}) 表示. 由于

$$|k_{ij}|^2\leqslant(|k||a_{ij}|+|b_{ij}|)^2,$$

我们有

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|k_{ij}|^2\leqslant|k|^2\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2+2|k|\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}||b_{ij}|+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|b_{ij}|^2.$$

由 Schwarz 不等式有

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}||b_{ij}|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|b_{ij}|^2\right)^{1/2}.$$

因此有

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|k_{ij}|^2<\infty,$$

所以 $kA+B\in W$，从而 W 为 $CL(X)$ 的子空间.

设 $k_{ii}=i^{-1/2}$，且 $k_{ij}=0$ 若 $i\neq j$. 令

$$A(x)(i)=\frac{1}{\sqrt{i}}x(i),i\geqslant 1,x\in X,$$

则由于当 $i\to\infty$ 有 $\frac{1}{\sqrt{i}}\to 0$，利用问题 4.1.3 知 A 为紧算子. 但

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|k_{ij}|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}=\infty.$$

因此 $A\in CL(X)\backslash W$. 从而 W 为 $CL(X)$ 的真子空间. ■

问题 4.1.10 设 X,Y 为赋范空间，$F\in CL(X,Y)$，问：是否有

(a) $F\in CL(X,R(F))$?

(b) $F\in CL(X,\overline{R(F)})$?

解答 (a) 答案是“否”，设 $X=c_{00}$，$Y=l^{\infty}$ 且 $A:l^{\infty}\to l^{\infty}$ 定义为

$$A(x)(j)=\frac{1}{j}x(j),\quad j\geqslant 1,x\in l^{\infty}.$$

设 F 为 A 在 X 上的限制，则由问题 4.1.3 知 A 为紧算子. 设 $\{x_n\}$ 为 X 中的有界列，则 $\{Ax_n\}$ 在 Y 中有收敛子列，即 $\{F(x_n)\}$ 在 Y 中有收敛子列. 这就证明了 $F\in CL(X,Y)$. 设

$$x_n=e_1+e_2+\cdots+e_n=(1,\cdots,1,0,0,\cdots),$$

及

$$y_n=F(x_n)=\left(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},0,0,\cdots\right).$$

若 $y=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\right)$，则

$$\|y-y_n\|_{\infty}=\sup\left\{\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+2},\cdots\right\}=\frac{1}{n+1},$$

因此在 l^{∞} 中有 $y_n\to y$. 所以若 $\{F(x_n)\}$ 的某个子列收敛，则它必收敛到 y. 但 $R(F)=c_{00}$，$y\notin c_{00}$，所以 $\{F(x_n)\}$ 在 $c_{00}=R(F)$ 中无子列收敛. 这就说明 $F:X\to R(F)$ 不为紧算子.

(b) 这部分的答案是“是”. 考虑 X 中的有界列 $\{x_n\}$，则 $\{F(x_n)\}$ 在 Y 中有收敛子列，由于 $F(x_n)\in R(F)$，则收敛子列的极限必在 $\overline{R(F)}$ 中，即 $\{F(x_n)\}$ 的某个子列在 $\overline{R(F)}$ 中收敛. 因此 $F:X\to\overline{R(F)}$ 为紧算子. ■

问题 4.1.11 设 X,Y 为赋范空间，$F\in CL(X,Y)$. 求证：$R(F)$ 为可分赋范空间.

解答 若 $n=1,2,\cdots,b\in Y$,令

$$V_n(b)=\{y\in Y:\|y-b\|<1/n\}.$$

任取 n,$\{V_n(b):b\in F(U)\}$为$\overline{F(U)}$的开覆盖. 由于$\overline{F(U)}$为紧集,上述开覆盖有有限开覆盖. 因此存在 $F(U)$中有限个点 $b_{n1},b_{n2},\cdots$,使得$\{V_n(b_{ni}):i=1,2,\cdots\}$为$\overline{F(U)}$的开覆盖.

设 S 为所有 rb_{ni} 组成的集合,其中 $n\geqslant 1,i\geqslant 1,r\geqslant 1$ 为整数. 由于 $b_{ni}\in F(U)$,故 $rb_{ni}\in F(X)=R(F)$. 所以 S 为 $R(F)$的可数集. 我们将证明 S 在 $R(F)$中稠密.

设 $y\in R(F)$及 $\varepsilon>0$ 给定. 则存在 $x\in X,F(x)=y$. 设 r 为大于 $\|x\|$ 的整数,则$\frac{x}{r}\in U$. 从而

$$y/r=F(x/r)\in F(U).$$

若 $n>r/\varepsilon$,则存在 i 使得 $y/r\in V_n(b_{ni})$,即

$$\|y/r-b_{ni}\|<\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{r}.$$

我们有 $\|y-z\|<\varepsilon$,其中 $z=rb_{ni}\in S$. ■

问题 4.1.12 设 X 为赋范空间,$A\in BL(X)$,$\{x_n\}$为 X 的有界列使得$\{Ax_n-x_n\}$在 X 中收敛. 求证:若对某个 $m\geqslant 1$,A^m 为紧算子,则$\{x_n\}$有收敛子列.

解答 设

$$B=A^{m-1}+\cdots+A+I,\qquad y_n=Ax_n-x_n=(A-I)x_n,\qquad z_n=B(y_n).$$

则$\{y_n\}$收敛. 由于 B 为连续的,故$\{z_n\}$也收敛. 进一步地,

$$z_n=(A^{m-1}+\cdots+A+I)(A-I)x_n=(A^m-I)x_n,$$

$$x_n=A^mx_n-z_n.$$

由于 A^m 为紧算子,故$\{A^mx_n\}$在 x 中有收敛子列$\{A^mx_{n_j}\}$. 因为$\{z_{n_j}\}$收敛,所以$\{x_{n_j}\}$收敛. ■

问题 4.1.13 设 $X=C[0,1]$,k 为闭单位正方形

$$S=\{(s,t):0\leqslant s,t\leqslant 1\}$$

上的纯量连续函数. 设 $A:X\to X$ 定义为

$$A(x)(s)=\int_0^1 k(s,t)x(t)\mathrm{d}t,\quad 0\leqslant s\leqslant 1,\quad x\in X.$$

求证:A 为紧算子.

解答 由于单位正方形 S 为紧的,故 k 在 S 上为有界的,且为一致连续的. 设 $\varepsilon>0$ 给定,则存在 $\delta>0$ 使得若$|s_1-s_2|<\delta$,$0\leqslant t\leqslant 1$,则有

$$|k(s_1,t)-k(s_2,t)|<\varepsilon.$$

因此,若 $x\in X$,$|s_1-s_2|<\delta$,则

$$A(x)(s_1)-A(x)(s_2)=\int_0^1\{k(s_1,t)-k(s_2,t)\}x(t)\mathrm{d}t,$$

$$|A(x)(s_1)-A(x)(s_2)|\leqslant\int_0^1|k(s_1,t)-k(s_2,t)||x(t)|\,dt\leqslant\varepsilon\|x\|_\infty. \tag{6}$$

这说明 $A(x)$在$[0,1]$上为一致连续的. 因此 $A(x)\in X$. 由积分的线性性知 A 为线性的. 由于 k 为有界的,故存在 $\alpha>0$ 使得

$$|k(s,t)|\leqslant\alpha,\quad 0\leqslant s,t\leqslant 1.$$

因此

$$|A(x)(s)|\leqslant\int_0^1|k(s,t)||x(t)|\,dt\leqslant\alpha\|x\|_\infty,\quad 0\leqslant s\leqslant 1; \tag{7}$$

$$\|Ax\|_\infty\leqslant\alpha\|x\|_\infty.$$

所以 A 为有界线性算子.

为证 A 为紧算子,设$\{x_n\}$为 X 的有界列,我们将证明$\{Ax_n\}$有收敛子列. 设任取 n 有 $\|x_n\|\leqslant\beta$,及 $y_n=Ax_n$,则由(7)式有

$$|y_n(s)|\leqslant\alpha\|x\|_\infty\leqslant\alpha\beta,\quad n\geqslant 1.$$

因此$\{y_n:n\geqslant 1\}$为一致有界的. 若$|s_1-s_2|<\delta$,则由(6)式有

$$|y_n(s_1)-y_n(s_2)|=|Ax_n(s_1)-Ax_n(s_2)|\leqslant\varepsilon\|x\|_\infty\leqslant\varepsilon\beta.$$

由于 $\varepsilon>0$ 为任选的,故$\{y_n\}$为**等度连续**的. 因此它有子列$\{y_{n_i}\}$在$[0,1]$上一致收敛①. 设在$[0,1]$上$\{y_{n_i}\}$一致收敛到 y. 则当 $i\to\infty$时,$\|y_{n_i}-y\|_\infty\to 0$,即当 $i\to\infty$时

$$\|Ax_{n_i}-y\|_\infty\to 0.$$

因此$\{Ax_n\}$有收敛子列$\{Ax_{n_i}\}$. 这就证明了 A 为紧算子.

问题 4.1.14 对 $x\in C[0,1]$,令

$$A(x)(s)=\int_0^1 k(s,t)x(t)\,dt,\quad 0\leqslant s\leqslant 1,$$

其中核函数 k 满足

(i) $\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant 1}\int_0^1|k(s,t)|\,dt<\infty$.

(ii) 对固定的 $s\in[0,1]$,有

$$\lim_{\delta\to 0}\int_0^1|k(s+\delta,t)-k(s,t)|\,dt=0.$$

求证:A 为$C[0,1]$上的紧算子.

解答 若 $0\leqslant s\leqslant 1$,定义$[0,1]$上的函数 k_s 为

$$k_s(t)=k(s,t),\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

则若 $x\in C[0,1]$,

$$A(x)(s)=\int_0^1 k_s(t)x(t)\,dt,\quad 0\leqslant s\leqslant 1.$$

---

① 见 Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis* (1976), Ch. 7.

由条件(i)知 $k_s\in L^1[0,1]$且对 $0\leqslant s\leqslant 1$，

$$\| k_s \|_1 = \int_0^1 | k_s(t) | \mathrm{d}t = \int_0^1 | k(s,t) | \mathrm{d}t \leqslant \alpha. \tag{8}$$

其中 α 为一个常数. 条件(ii)说明当 $\delta\to 0$ 时

$$\| k_{s+\delta} - k_s \|_1 = \int_0^1 | k_{s+\delta}(t) - k_s(t) | \mathrm{d}t \to 0,$$

其中的 s 为固定的. 设 $\phi:[0,1]\to L^1[0,1]$定义为 $\phi(s)=k_s$，则对固定的 s，当 $\delta\to 0$ 时

$$\| \phi(s+\delta) - \phi(s) \|_1 = \| k_{s+\delta} - k_s \|_1 \to 0.$$

这说明 ϕ 为$[0,1]$上的连续函数. 由于$[0,1]$为紧的，故 ϕ 在$[0,1]$上一致连续. 给定 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得若 $u,s\in[0,1]$，$|u-s|<\delta$，则

$$\| \phi(u) - \phi(s) \|_1 < \varepsilon,$$

即

$$\int_0^1 | k_u(t) - k_s(t) | \mathrm{d}t = \| k_u - k_s \|_1 < \varepsilon. \tag{9}$$

现在用与问题 4.1.13 类似的方法. 设 $x\in X$ 及$|u-s|<\delta$，则由(9)式有

$$| Ax(u) - Ax(s) | \leqslant \int_0^1 | k_u(t) - k_s(t) | | x(t) | \mathrm{d}t \leqslant \varepsilon \| x \|_\infty \tag{10}$$

这证明了 Ax 为一致连续的，从而 $Ax\in X$，又显然 A 为线性的，对 $0\leqslant s\leqslant 1$，由(8)式有

$$| Ax(s) | \leqslant \int_0^1 | k_s(t) | | x(t) | \mathrm{d}t \leqslant \alpha \| x \|_\infty. \tag{11}$$

故对 $x\in X$ 有 $\| Ax \|_\infty \leqslant \alpha \| x \|_\infty$，因此 $A\in BL(X)$.

为证 A 为紧的，设$\{x_n\}$为 X 中有界列，设任取 n 有 $\| x_n \| \leqslant \beta$，$y_n = Ax_n$. 则由(11)式知

$$| y_n(s) | \leqslant \alpha \| x_n \|_\infty \leqslant \alpha\beta, \quad n \geqslant 1.$$

所以$\{y_n : n\geqslant 1\}$为一致有界的. 若$|u-s|<\delta$，则由(10)式有

$$| y_n(u) - y_n(s) | = | Ax_n(u) - Ax_n(s) | \leqslant \varepsilon \| x_n \|_\infty \leqslant \varepsilon\beta.$$

由于 $\varepsilon>0$ 为任意的，因此$\{y_n\}$为等度连续的. 利用在问题 4.1.13 解答中应用过的结果，知道$\{Ax_n\}$有一收敛子列. 所以 A 为紧算子. ■

问题 4.1.15 设 $X=L^2[0,1]$，k 为闭单位正方形

$$S = \{ s(t) : 0 \leqslant s,t \leqslant 1 \}$$

上的纯量连续函数. 对 $x\in X$，令

$$A(x)(s) = \int_0^1 k(s,t)x(t)\mathrm{d}t, \quad 0 \leqslant s \leqslant 1.$$

求证：$A:X\to X$ 为紧线性算子.

解答 由 k 的一致连续性，若 $\varepsilon>0$，则存在 $\delta>0$，使得任取$|s_1-s_2|<\delta$，$0\leqslant t\leqslant 1$，有

$$| k(s_1,t) - k(s_2,t) | < \varepsilon.$$

因此若 $x\in X$ 且$|s_1-s_2|<\delta$，则由 Schwarz 不等式

$$|Ax(s_1)-Ax(s_2)|\leqslant\int_0^1|k(s_1,t)-k(s_2,t)||x(t)|\,\mathrm{d}t$$
$$\leqslant\left(\int_0^1|k(s_1,t)-k(s_2,t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\|x\|_2$$
$$\leqslant\varepsilon\|x\|_2. \tag{12}$$

所以 Ax 为一致连续的，从而任取 $x\in X$，$Ax\in X$. A 显然为线性的. 又由于 k 为有界的，故存在 $\alpha>0$ 使得

$$|k(s,t)|\leqslant\alpha,\quad 0\leqslant s,t\leqslant 1.$$

由 Schwarz 不等式

$$|Ax(s)|\leqslant\int_0^1|k(s,t)||x(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\left(\int_0^1|k(s,t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\|x\|_2\leqslant\alpha\|x\|_2, \tag{13}$$
$$\|Ax\|_2\leqslant\left(\int_0^1|Ax(s)|^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}\leqslant\alpha\|x\|_2.$$

因此 $A\in BL(X)$.

为证 A 为紧算子，设$\{x_n\}$为 x 中有界列，设 $\|x_n\|_2\leqslant\beta$，$y_n=Ax_n$. 则由(13)式得

$$|y_n(s)|\leqslant\alpha\|x_n\|_2\leqslant\alpha\beta,\quad n=1,2,\cdots.$$

这说明$\{y_n:n=1,2,\cdots\}$在$[0,1]$上一致有界. 利用(12)式我们知道$\{y_n\}$为等度连续的. 因此它有一子列$\{y_{n_i}\}$在$[0,1]$上一致收敛. 由于一致收敛性可以推出 $L^2[0,1]$中的收敛性，所以这个子列$\{Ax_{n_i}\}$也必在 $L^2[0,1]$中收敛. 这就证明了 A 为紧算子. ■

问题 4.1.16 设 $X=L^2[0,1]$，k 为闭单位正方形上的纯量可测函数使得

$$\int_0^1\int_0^1|k(s,t)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t<\infty.$$

任取 $x\in X$，设

$$A(x)(s)=\int_0^1k(s,t)x(t)\mathrm{d}t,\quad 0\leqslant s\leqslant 1.$$

求证：A 为紧线性算子.

解答 设 S 为闭单位正方形

$$S=\{(s,t):0\leqslant s\leqslant 1,0\leqslant t\leqslant 1\}.$$

则由题设 $k\in L^2(S)$. 所有 S 上的纯量连续函数之集在 $L^2(S)$中稠密[①]. 因此存在 k_n 为 S 上的连续函数使得在 $L^2(S)$中有 $k_n\to k$. 对 $n\geqslant 1$，设

$$A_n(x)(s)=\int_0^1k_n(s,t)x(t)\mathrm{d}t,\quad 0\leqslant s\leqslant 1,\quad x\in X.$$

则由问题 4.1.15 知 $A_n\in CL(X)$. 对 $0\leqslant s\leqslant 1$，我们由 Schwarz 不等式有

$$A_n(x)(s)-A(x)(s)=\int_0^1(k_n(s,t)-k(s,t))x(t)\mathrm{d}t,$$

---

① 见：Rudin, W., *Real and Complex Analysis* (1966), Ch. 3.

$$|A_n(x)(s)-A(x)(s)|\leqslant\left(\int_0^1|k_n(s,t)-k(s,t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\|x\|_2.$$

因此

$$\begin{aligned}\|A_nx-Ax\|_2^2&=\int_0^1|A_nx(s)-Ax(s)|^2\mathrm{d}s\\&\leqslant\int_0^1\int_0^1|k_n(s,t)-k(s,t)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t\,\|x\|_2^2\\&=\|x\|_2^2\|k_n-k\|_2^2.\end{aligned}$$

$$\|A_nx-Ax\|_2\leqslant\|k_n-k\|_2\|x\|_2 \tag{14}$$

这首先说明 $A_nx-Ax\in L^2[0,1]$，从而 $Ax\in L^2[0,1]$. A 显然为线性的. 由(14)式知 A_n-A 为有界的，因此有 $A\in BL(X)$. 由(14)式我们还有当 $n\to\infty$ 时

$$\|A_n-A\|\leqslant\|k_n-k\|_2\to 0.$$

所以在 $BL(X)$ 中有 $A_n\to A$. 但 $A_n\in CL(X)$，X 为 Banach 空间，故 $CL(X)$ 为 $BL(X)$ 的闭子空间. 所以有 $A\in CL(X)$. 这就完成了证明. ■

问题 4.1.17 设 $X=L^2[0,1]$，对 $x\in X$，设

$$A(x)(s)=\frac{1}{s}\int_0^s x(t)\mathrm{d}t,\quad 0<s<\infty.$$

求证：

(a) $A\in BL(X)$，

(b) $A\notin CL(X)$.

解答 (a) 我们用 $C_c(0,\infty)$ 记所有 $(0,\infty)$ 上的连续函数 x 使得 x 在 $(0,\infty)$ 的某个紧集之外为 0. 则 $C_c(0,\infty)$ 在 $L^2(0,\infty)$ 中稠密①.

设 $x\in C_c(0,\infty)$ 及 $y=A(|x|)$. 则

$$sy(s)=\int_0^s|x(t)|\mathrm{d}t,\quad 0<s<\infty. \tag{15}$$

则由于 $|x|$ 在 $(0,\infty)$ 上连续知，$sy(s)$ 为可微函数，且

$$sy'(s)+y(s)=|x(s)|,\quad 0<s<\infty. \tag{16}$$

分部积分可以给出

$$\int_0^\infty y(s)^2\mathrm{d}s=[sy(s)]_0^\infty-\int_0^\infty s2y(s)y'(s)\mathrm{d}s. \tag{17}$$

假设对 $t\notin[a,b]$ 有 $x(t)=0$，其中 $0<a<b<\infty$. 则由(15)式得

$$\begin{aligned}y(s)&=0,\quad 0<s<a,\\y(s)&=\frac{1}{s}\int_a^b|x(t)|\mathrm{d}t=\frac{\alpha}{s},\quad s>b,\end{aligned} \tag{18}$$

其中 α 为有限常数. 所以(17)式中已积项在两个端点 0 和 ∞ 均为 0. 因此由(16)式和(17)

① 见 Rudin, W., *Real and Complex Analysis* (1966), Ch. 3.

式知

$$\int_0^\infty y(s)^2\mathrm{d}s = -2\int_0^\infty y(s)\{|x(s)|-y(s)\}\mathrm{d}s = 2\int_0^\infty y(s)^2\mathrm{d}s - 2\int_0^\infty |x(s)|y(s)\mathrm{d}s,$$

$$\int_0^\infty y(s)^2\mathrm{d}s = 2\int_0^\infty |x(s)|y(s)\mathrm{d}s \leqslant 2\left(\int_0^\infty |x(s)|^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}\left(\int_0^\infty y(s)^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}. \tag{19}$$

在上式中我们用到了 Schwarz 不等式. 由(18)式我们有

$$\|y\|_2^2 = \int_0^\infty y(s)^2\mathrm{d}s < \infty.$$

所以由(19)式可以推出 $\|y\|_2 \leqslant 2\|x\|_2$. 这样我们就证明了若 $x\in C_c(0,\infty)$,则 $A(|x|)\in X$,且

$$\|A(|x|)\|_2 \leqslant 2\|x\|_2, \quad x\in C_c(0,\infty). \tag{20}$$

现设 $x\in X$. 由于 $C_c(0,\infty)$ 在 X 中稠密,存在 $C_c(0,\infty)$ 中一列元 $\{x_n\}$ 使得在 X 中有 $x_n\to x$. 设

$$y_n = A(|x_n|), \quad y = A(|x|).$$

则

$$s(y_n(s)-y(s)) = \int_0^s (|x_n(t)|-|x(t)|)\mathrm{d}t,$$

$$s|y_n(s)-y(s)| \leqslant \int_0^s ||x_n(t)|-|x(t)||\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \int_0^s |x_n(t)-x(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \left(\int_0^s 1^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_0^s |x_n(t)-x(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

$$\leqslant s^{1/2}\|x_2 - x\|_2.$$

因此对固定的 $s\in(0,\infty)$,当 $n\to\infty$ 时,$y_n(s)\to y(s)$. 由于 $y_n\geqslant 0$ 我们应用 Fatou 引理得到.

$$\int_0^\infty y(s)^2\mathrm{d}s \leqslant \liminf_{n\to\infty}\int_0^\infty y_n(s)^2\mathrm{d}s.$$

但由(20)式有

$$\int_0^\infty y_n(s)^2\mathrm{d}s = \|A(|x_n|)\|_2^2 \leqslant 4\|x_n\|_2^2,$$

由于 $x_n\to x$,故有 $\|x_n\|_2\to\|x\|_2$,所以

$$\liminf\int_0^\infty y_n(s)^2\mathrm{d}s \leqslant 4\|x\|_2^2,$$

$$\int_0^\infty y(s)^2\mathrm{d}s \leqslant 4\|x\|_2^2.$$

由于

$$|Ax(s)| \leqslant \frac{1}{s}\int_0^s |x(t)|\,\mathrm{d}t = y(s),$$

我们有

$$\int_0^{\infty} |Ax(s)|^2 ds \leqslant 4 \|x\|_2^2.$$

因此若 $x \in X$，则有

$$A(x) \in X,$$
$$\|A(x)\|_2 \leqslant 2\|x\|_2.$$

这就证明了 $A \in BL(X)$.

(b) 为证 A 不为紧算子，对 $n \geqslant 1$，设

$$x_n(t) = \begin{cases} t^{-1/2}, & 4^{n-1} \leqslant t \leqslant 4^n, \\ 0, & 0 < t < 4^{n-1} \text{ 或 } t > 4^n. \end{cases}$$

则

$$\int_0^{\infty} x_n(t)^2 dt = \int_{4^{n-1}}^{4^n} \frac{dt}{t} = \log 4.$$

所以任取 $n \geqslant 1$ 有 $x_n \in X$ 且 $\|x_n\|_2 = (\log 4)^{1/2}$. 设 $y_n = A(x_n)$，若 $s \geqslant 4^n$，

$$s y_n(s) = \int_0^s x_n(t) dt = \int_{4^{n-1}}^{4^n} t^{-1/2} dt = 2^n.$$

因此若 $s \geqslant 4^n$，则 $y_n(s) = 2^n / s$. 若 $n > m$，则

$$\|y_n - y_m\|_2^2 \geqslant \int_{4^n}^{\infty} |y_n(s) - y_m(s)|^2 ds$$
$$= \int_{4^n}^{\infty} \left(\frac{2^n - 2^m}{s} \right)^2 ds = (2^n - 2^m)^2 \frac{1}{4^n} \geqslant 1/4.$$

这说明 $\{y_n\}$ 无子列收敛，即 $\{Ax_n\}$ 无子列收敛，注意到 $\{x_n\}$ 在 X 中为有界的. 从而 A 不为紧算子. ■

问题 4.1.18 设 $x \in l^2$，对 $n = 1, 2, \cdots$，设

$$A(x)(n) = \frac{1}{n}\{x(1) + \cdots + x(n)\}.$$

求证：$A: l^2 \to l^2$ 为有界线性算子，但 A 不为紧算子.

解答 设 $x \in c_{00}$，$y = A(|x|)$，则

$$n y(n) = |x(1)| + \cdots + |x(n)|.$$

因此对 $n = 1, 2, \cdots$，

$$n^2 y(n)^2 - (n-1)^2 y(n-1)^2 = \{n y(n) - (n-1) y(n-1)\}\{n y_n + (n-1) y(n-1)\}$$
$$\leqslant |x(n)|^2 n y(n),$$

其中 $y(0) = 0$. 所以

$$n y(n)^2 - \frac{(n-1)^2}{n} y(n-1)^2 \leqslant 2 |x(n)| y(n),$$

$$\sum_{n=1}^{N} n y(n)^2 - \sum_{n=2}^{N} \frac{(n-1)^2}{n} y(n-1)^2 \leqslant 2 \sum_{n=1}^{N} |x(n)| y(n).$$

因此由 Schwarz 不等式

$$\sum_{n=1}^{N-1} y(n)^2\left(n-\frac{n^2}{n+1}\right)+Ny(N)^2 \leqslant 2\left(\sum_{n=1}^{N} |x(n)|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{N} y(n)^2\right)^{1/2}. \tag{21}$$

由于 $x\in c_{00}$，存在 m 使得任取 $j>m$ 有 $x_j=0$. 因此对 $n>m$，

$$y(n)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}|x(j)|=\frac{\alpha}{n},$$

其中 α 为与 n 无关的. 这就证明了

$$\sum_{n=1}^{\infty} y(n)^2<\infty,$$

且当 $N\to\infty$ 时，$Ny(N)^2\to 0$. 由于

$$n-\frac{n^2}{n+1}=\frac{n}{n+1}\geqslant\frac{1}{2},$$

在(21)式中令 $N\to\infty$ 有

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} y(n)^2\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}y(n)^2\leqslant 2\|x\|_2\left(\sum_{n=1}^{\infty} y(n)^2\right)^{1/2}.$$

因此有 $\|y\|_2\leqslant 4\|x\|_2$. 这样我们就证明了若 $x\in c_{00}$，则 $A(|x|)\in l^2$ 且

$$\|A(|x|)\|_2\leqslant 4\|x\|_2,\quad x\in c_{00}. \tag{22}$$

现在假设 $x\in l^2$，且

$$x_m=\sum_{j=1}^{m} x(j)e_j=(x(1),\cdots,x(m),0,0,\cdots),$$

$$y_m=A(|x_m|),\quad y=A(|x|).$$

则 $x_m\in c_{00}$，由(22)式有

$$\|x_m\|_2=\left(\sum_{j=1}^{n}|x(j)|^2\right)^{1/2}\leqslant\|x\|_2,$$

$$\|y_m\|_2=\|A(|x_m|)\|_2\leqslant 4\|x_m\|_2\leqslant 4\|x\|_2. \tag{23}$$

由于当 $m\geqslant j$ 时，$x_m(j)=x(j)$，故当 $m>i$ 时，有

$$y_m(i)=\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i}|x_m(j)|=\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i}|x(j)|=y(j).$$

因此若 $m>N$，由(23)式有

$$\sum_{i=1}^{N} y(i)^2=\sum_{i=1}^{N} y_m(i)^2\leqslant\|y_m\|_2^2\leqslant 16\|x\|_2^2.$$

上式对任取的 N 都成立，因此 $y\in l^2$，且

$$\sum_{i=1}^{\infty} y(i)^2\leqslant 16\|x\|_2^2.$$

由于

$$|A(x)(n)|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}|x(j)|=y(n),$$

所以 $A(x)\in l^2$，且

$$\| Ax \|_2 \leqslant 4 \| x \|_2 .$$

由于 A 显然为线性的，这就证明了 $A\in BL(l^2)$.

为证 A 不为紧算子，对 $n=1,2,\cdots$，设

$$x_n(j)=\begin{cases}\sqrt{j+1}-\sqrt{j}, & 4^n\leqslant j<4^{n+1},\\ 0, & j<4^n \text{ 或 } j\geqslant 4^{n+1}.\end{cases}$$

因为

$$(\sqrt{j+1}+\sqrt{j})^2=j+1+2\sqrt{(j+1)j}+j>4j,$$

我们有

$$(\sqrt{j+1}-\sqrt{j})^2=\frac{1}{(\sqrt{j+1}+\sqrt{j})^2}<\frac{1}{4j}<\frac{1}{4}\log\left(1-\frac{1}{j}\right)^{-1}.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n(j)^2=\sum_{j=4^n}^{4^{n+1}-1}(\sqrt{j+1}-\sqrt{j})^2<\frac{1}{4}\sum_{j=4^n}^{4^{n+1}-1}\log\left(\frac{j}{j-1}\right)=\frac{1}{4}\log\left(\frac{4^{n+1}-1}{4^n-1}\right).$$

当 $n\to\infty$ 时，上式最后一项收敛到 $\frac{1}{4}\log 4$. 因此 $x_n\in l^2$，$\{\| x_n \|\}$ 为有界的. 设 $y_n=A(x_n)$，若 $i\geqslant 4^{n+1}$，则

$$iy_n(i)=\sum_{j=1}^{i}x_n(j)=\sum_{j=4^n}^{4^{n+1}-1}(\sqrt{j+1}-\sqrt{j})=\sqrt{4^{n+1}}-\sqrt{4^n},$$

$$y_n(i)=(2^{n+1}-2^n)/i=2^n/i.$$

设 $n>m$，则

$$\| y_n-y_m \|_2^2=\sum_{i=1}^{\infty}|y_n(i)-y_m(i)|^2\geqslant\sum_{i=4^{n+1}}^{\infty}\left|\frac{2^n}{i}-\frac{2^m}{i}\right|^2.$$

所以

$$\| y_n-y_m \|_2^2\geqslant(2^n-2^m)^2\sum_{i=4^{n+1}}^{\infty}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)=(2^n-2^m)^2\frac{1}{4^{n+1}}\geqslant\left(\frac{1}{4}\right)^2.$$

这说明 $\{y_n\}$ 无收敛子列，因此 $\{A(x_n)\}$ 也无收敛子列，再注意到 $\{x_n\}$ 为有界列，所以 A 不为紧算子. ■

4.2 有界算子的谱

设 X 为赋范空间，从 X 到 X 的所有有界线性算子构成的集合记为 $BL(X)$. 定义其中的乘法如下：若 $A,B\in BL(X)$，则

$$AB(x)=A(Bx),\quad x\in X.$$

这样 $BL(X)$就是一个赋范代数，即为赋范空间，同时还是一个环. 它有恒等元 I，由 $I(x)=x, x\in X$ 给出，I 称为**恒等算子**. 进一步地，

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \|B\|, A, B \in BL(X).$$

$BL(X)$中的元有时也称为 X 上的有界算子.

设 $A\in BL(X)$，纯量 k 称为 A 的**正则值**若 $A-kI$ 在 $BL(X)$中可逆，即$(A-kI)^{-1}$存在且在 $BL(X)$中. 不为正则值的纯量 k 称为 A 的**谱值**. A 的**谱**为所有 A 的谱值组成的集合，记为 $S(A)$或 $\sigma(A)$.

若 $A-kI$ 不为单射，则存在非零元 $x\in X$ 使得 $Ax=kx$，此时称 k 为 A 的**特征值**，非零元 $x\in X$ 使得 $Ax=kx$ 称为与 k 相对应的**特征向量**. 零空间 $Z(A-kI)$称为与 k 相对应的**特征空间**. A 的所有特征值组成的集合称为 A 的**特征谱**或**点谱**，记为 $e(A)$或 $\sigma_e(A)$.

若 $k\in\mathbb{K}$，且存在 X 中序列$\{x_n\}$使得当 $n\to\infty$时，$\|Ax_n-kx_n\|\to 0$ 且任取 n 有 $\|x_n\|=1$，则称 k 为 A 的**近似特征值**. A 的所有近似特征值组成的集合记为 $a(A)$或 $\sigma_a(A)$. k 为 A 的近似特征值当且仅当 $A-kI$ 不为下有界的.

每个特征值都是谱值，事实上若 $A\in BL(X)$，则

$$\sigma_e(A) \subset \sigma_a(A) \subset \sigma(A).$$

对应于不同特征值的特征向量为线性无关的.

若 X 为 Banach 空间，则 $BL(X)$也为 Banach 空间. 设 $A\in BL(X)$，$\|A\|<|k|$，则 $k\notin\sigma(A)$(见问题 4.2.1). A 的谱 $\sigma(A)$为$\mathbb{K}$ 的紧子集.

线性算子 $A: X\to X$ 称为**有限秩的**，若它的值域为有限维的. 若 X 为 Banach 空间，$A\in BL(X)$为有限秩的，则 A 的每个谱值都为特征值，即有 $\sigma_e(A)=\sigma(A)$.

设 X 为 Banach 空间，$A: X\to X$ 为紧线性算子，则 A 的点谱 $\sigma_e(A)$为可数的(有可能为有限的，甚至是空集)，且 0 为 $\sigma_e(A)$仅有的可能的极限点. A 的每一非零谱值都是特征值. 因此 A 的谱 $\sigma(A)$为可数的且 0 为仅有的可能的极限点. 若 k 为非零特征值，则与之相对应的特征空间 $Z(A-kI)$为有限维的.

若 X 为复 Banach 空间，$A\in BL(X)$，则 A 的谱 $\sigma(A)$为非空的，且

$$\lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} = \sup\{|k|: k\in\sigma(A)\}.$$

这个公式称为**谱半径公式**.

练习

1. 设 X 为赋范空间，求证：任取 $A, B\in BL(X)$有

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \|B\|.$$

2. 设 X 为赋范空间，$A\in BL(X)$. 求证：k 为 A 的近似特征值当且仅当 $A-kI$ 不为下有界的.

3. 设 X 为赋范空间，$A\in BL(X)$. 求证：

$$\sigma_e(A) \subset \sigma_a(A) \subset \sigma(A).$$

4. 求证：对应于不同特征值的特征向量是线性无关的.

5. 设 $X=\mathbb{R}^3$，$A\in BL(X)$由矩阵

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

表示. 求：$\sigma(A)$.

问题

问题 4.2.1 设 X 为 Banach 空间，$A\in BL(X)$，对某个正整数 m 有 $\|A^m\|<1$. 求证：$I-A$ 在 $BL(X)$中可逆. 由此推出若 $\|A\|<|k|$. 则 $k\notin\sigma(A)$.

解答 设 $\|A^m\|=\lambda$，$\|A\|=\alpha$. 则若 $n=mr+j$，

$$\|A^n\| = \|(A^m)^r A^j\| \leqslant \|A^m\|^r \|A\|^j = \lambda^r \alpha^j, \quad r\geqslant 0, \quad j\geqslant 0.$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|A^n\| = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1}\|A^{mr+j}\| \leqslant \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1}\lambda^r\alpha^j = \left(\sum_{j=0}^{m-1}\alpha^j\right)\sum_{r=0}^{\infty}\lambda^r < \infty.$$

这是因为由题设有 $0\leqslant\lambda<1$. 这就证明了 $\sum A^n$ 在 $BL(X)$中绝对收敛. 由于 $BL(X)$为 Banach 空间，故 $\sum A^n$ 必在 $BL(X)$中收敛. 设

$$B=\sum_{n=0}^{\infty}A^n, \quad B_n = I+A+\cdots+A^{n-1}.$$

则在 $BL(X)$中 $B_n\to B$，

$$(I-A)B_n = I-A^n = B_n(I-A).$$

由于 $A^n=B_{n+1}-B_n\to 0$，我们有

$$(I-A)B = I = B(I-A).$$

这就证明了第一部分.

若 $|k|>\|A\|$，将已证结论应用到算子 A/k 及 $m=1$，我们有

$$A-kI = -k(I-A/k)$$

在 $BL(X)$中可逆，因此 $k\notin\sigma(A)$. ■

问题 4.2.2 设 $X=l^p$，其中 $1\leqslant p<\infty$，e_i 为 X 的第 i 个单位向量. 又设 $T\in BL(X)$使得 $Te_i=e_{i+1}$，$i\geqslant 1$. 求 T 的特征值及 T 的谱.

解答 设 $x\in l^p$ 给定，设

$$x_n=\sum_{j=1}^{n}x(j)e_j = (x(1),\cdots,x(n),0,0,\cdots).$$

则当 $n\to\infty$ 时

$$\| x-x_n \|_p^p = \sum_{j=n+1}^{\infty} | x(j) |^p \to 0.$$

因此在 l^p 中有 $x_n\to x$. 所以在 l^p 中有 $Tx_n\to Tx$. 由于

$$| Tx_n(i)-Tx(i) | \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} | Tx_n(j)-Tx(j) |^p = \| Tx_n-Tx \|_p^p,$$

所以当 $n\to\infty$ 时

$$Tx_n(i)\to Tx(i).$$

其中的 i 为任意的. 因为

$$T(x_n) = \sum_{j=1}^{n} x(j)Te_j = \sum_{j=1}^{n} x(j)e_{j+1},$$

故

$$Tx_n(1)=0, \quad Tx_n(i)=x_{i-1}, \quad 2\leqslant i\leqslant n+1.$$

因此

$$Tx(1)=0, \quad Tx(i)=x(i-1), \quad i\geqslant 2.$$

从而

$$\| Tx \|_p^p = \sum_{i=2}^{\infty} | x(i-1) |^p = \| x \|_p^p.$$

这说明 $\| T \|=1$. 我们知道若 X 为 Banach 空间，$|k|>\| T \|$，则 $k\notin\sigma(T)$. 因此

$$k\in\sigma(T)\Rightarrow | k |\leqslant 1. \tag{1}$$

另外，设 $|k|\leqslant 1$ 且 $(T-kI)(x)=e_1$ 对某个 $x\in l^p$ 成立，则

$$Tx(1)-kx(1)=1,$$

$$Tx(i)-kx(i)=0, \quad i\geqslant 2,$$

$$kx(1) = -1kx(i) = Tx(i) = x(i-1), \quad i\geqslant 2.$$

因此对 $i=2,3,\cdots$，有

$$k^i x(i) = k^{i-1}x(i-1) = kx(1) = -1.$$

但若 $x\in l^p$，则当 $i\to\infty$ 时，$x(i)\to 0$. 所以当 $i\to\infty$ 时，有

$$k^i x(i)\to 0.$$

这里我们用到了 $|k|\leqslant 1$ 这个假设. 这与 $k^i x(i)=-1$ 矛盾. 这就证明了 $T-kI$ 不为满射，所以

$$| k |\leqslant 1\Rightarrow k\in\sigma(T).$$

这与(1)式一起证明了

$$\sigma(T) = \{k\in\mathbb{K} : | k |\leqslant 1\}.$$

设 $x\in l^p$ 使得 $(T-kI)x=0$，则如上面一样

$$Tx(i)-kx(i)=0, \quad i\geqslant 1,$$

$$k^i x(i) = k^{i-1} Tx(i) = k^{i-1} x(i-1) = kx(1) = 0, \quad i \geqslant 2.$$

因此，若 $k \neq 0$，则任取 $i \geqslant 1$ 有 $x(i)=0$. 若 $k=0$，则

$$x(i-1) = Tx(i) = kx(i) = 0, \quad i \geqslant 2;$$

因此对 $i \geqslant 1$ 有 $x(i)=0$. 这样我们就证明了 $(T-kI)x=0$ 仅在 $x=0$ 时成立，所以 k 不为特征值，而这对所有的 $k \in \mathbb{K}$ 都是对的. 因此 $\sigma_e(T)=\varnothing$. ■

问题 4.2.3 若 $P \in BL(X)$，$P^2=P$，则称 P 为**幂等的**或称 P 为**投影**. 若 P 为赋范空间 X 上的投影且 $P \neq 0$，$P \neq I$. 求 P 的特征值和 P 的谱.

解答 由于 $P \neq 0$，$P \neq I$，存在 $x_1, x_2 \in X$ 使得 $Px_1 \neq 0$，$Px_2 \neq Ix_2 = x_2$. 设 $y_1 = Px_1$，$y_2 = Px_2 - x_2$. 则

$$Py_1 = P^2 x_1 = Px_1 = y_1$$
$$Py_1 = y_1, \quad y_1 \neq 0.$$

因此 1 为 P 的特征值. 又

$$Py_2 = P^2 x_2 - Px_2 = Px_2 - Px_2 = 0$$
$$Py_2 = 0 \cdot y_2, \quad y_2 \neq 0.$$

所以 0 为 P 的特征值.

现设 $k \neq 0$，$k \neq 1$，$Q = \dfrac{1}{k(1-k)} P - \dfrac{1}{k} I$. 则 $Q \in BL(X)$，且

$$PQ = QP = \frac{1}{k(1-k)} P^2 - \frac{1}{k} P = \frac{1}{k(1-k)} P - \frac{1}{k} P = \frac{1}{1-k} P = kQ + I.$$

因此，$(P-kI)Q = I = Q(P-kI)$. 所以 $(P-kI)^{-1} = Q$ 在 $BL(X)$ 中存在，即 k 不为 P 的谱值. 故有

$$\{0,1\} \subset \sigma_e(P) \subset \sigma(P) \subset \{0,1\}$$

因此

$$\sigma_e(P) = \sigma(P) = \{0,1\}.$$ ■

问题 4.2.4 设 X 为赋范空间，$T \in BL(X)$，设 Y 为对应于 T 的某个特征值 λ 的特征空间. 求：T 在 Y 上限制的谱.

解答 设 $S = T/Y$ 为 T 在 Y 上的限制，则任取 $y \in Y$ 有

$$S(y) = T(y) = \lambda y.$$

这首先说明 λ 为 S 的特征值. 若 $k \neq \lambda$，设 $R = I/(\lambda - k)$，其中 I 为 Y 上的恒等算子，则 $R \in BL(Y)$ 且若 $y \in Y$，

$$RSy - kRy = \frac{1}{\lambda - k} Sy - \frac{k}{\lambda - k} y = \frac{1}{\lambda - k} \lambda y - \frac{k}{\lambda - k} y = y.$$

因此 $RS - kR = I$，类似可证 $SR - kR = I$. 这说明 $(S-kI)^{-1} = R$ 在 $BL(Y)$ 中存在. 所以 k 不为 S 的谱值，从而若 $k \in \sigma(S)$，则 $k = \lambda$. 因此

$$\{\lambda\} \subset \sigma_e(S) \subset \sigma(S) \subset \{\lambda\},$$

$$\sigma_e(S)=\sigma(S)=\{\lambda\}.$$ ■

问题 4.2.5 设 $X=l^p$，其中 $1\leqslant p\leqslant\infty$，$E$ 为数域 $\mathbb{K}$ 的紧子集. 求证：存在 $A\in BL(X)$ 使得 A 的谱为 E.

解答 取定 E 的可数稠密子集 $\{k_n\}$. 由于 E 为紧子集，故 $\{k_n\}$ 为有界列，设任取 n 有 $|k_n|\leqslant\alpha$. 在 X 上定义 A 为

$$(Ax)(j)=k_jx(j),\quad j\geqslant 1,\quad x\in X.$$

对 $1\leqslant p<\infty$，

$$\|Ax\|_p^p=\sum_{j=1}^{n}|k_jx(j)|^p\leqslant\alpha^p\|x\|_p^p,$$

$$\|Ax\|_p\leqslant\alpha\|x\|,$$

若 $p=\infty$，则

$$|Ax(j)|\leqslant\alpha|x(j)|\leqslant\alpha\|x\|_\infty,$$

$$\|Ax\|_\infty\leqslant\alpha\|x\|_\infty.$$

因 A 为 X 上的有界线性算子.

设 $k\in E$，且 $k\notin\sigma_a(A)$，则 $A-kI$ 为下有界的，即存在 $\beta>0$ 使得

$$\beta\|x\|_p\leqslant\|Ax-kx\|_p,\quad x\in X. \tag{2}$$

由于 $\{k_n\}$ 在 E 中稠密，所以存在 n 使得 $|k-k_n|<\beta$. 因为

$$(Ae_n)(j)-ke_n(j)=k_je_n(j)-ke_n(j)=\begin{cases}0, & j\neq n,\\ k_n-k, & j=n,\end{cases}$$

我们有

$$\|Ae_n-ke_n\|_p=|k_n-k|<\beta,$$

这与(2)式矛盾. 因此 $k\in\sigma_a(A)$，所以

$$E\subset\sigma_a(A). \tag{3}$$

若 $k\notin E$. 在 X 上定义 B 为

$$(Bx)(n)=k_n'x(n),\quad n\geqslant 1,$$

其中

$$k_n'=\frac{1}{k_n-k}.$$

则由于 E 为紧子集及 $k\notin E$ 知 $\{k_n'\}$ 为有界集. 与上面一样的方法可证 B 为 X 上的有界线性算子. 进一步地，因为

$$ABx(n)=k_nk_n'x(n)=BAx(n),$$

$$x(n)+kBx(n)=(1+kk_n')x(n)=\left(1+\frac{k}{k_n-k}\right)x(n)=k_nk_n'x(n),$$

所以 $ABx=BAx=x+kBx$. 因此

$$(A-kI)B(x)=x=B(A-kI)x,$$

即$(A-kI)^{-1}=B$在$BL(X)$中存在. 这说明k不为A的谱值. 从而$\sigma(A)\subset E$. 由于$\sigma_a(A)\subset\sigma(A)$,所以由(3)式有$\sigma_a(A)=\sigma(A)=E$. ■

问题 4.2.6 设$X=l^p$,其中$1\leqslant p\leqslant\infty$,$\{\alpha_n\}$为$[0,1]$的稠密子集. 定义$BL(X)$中元$A$为

$$(Ax)(n)=\alpha_n x(n),\quad n\geqslant 1,\quad x\in X.$$

求:A的特征值及A的谱.

解答 设$k\in\mathbb{K}$,$Ax=kx$. 则

$$\alpha_n x(n)-kx(n)=(Ax)(n)-kx(n)=0.$$

所以任取n有$\alpha_n-k=0$或$x(n)=0$. 若$k=\alpha_j$,则可取$x=e_j$. 若任取n,$k\neq\alpha_n$,则必有$x=0$. 这就证明了A的特征值为

$$\sigma_a(A)=\{\alpha_n:n\geqslant 1\}.$$

设$E=[0,1]$,则E为$\mathbb{K}$的紧子集,所以利用问题 4.2.5 知$\sigma(A)=E=[0,1]$. ■

问题 4.2.7 设$X=C[0,1]$及$v\in X$. 定义X上的算子T为$T(x)=vx$. 求:T的谱及特征值.

解答 由于v在$[0,1]$上连续,故其值域为紧区间$[a,b]$. 首先设$k\in[a,b]$,则存在$t_0\in[0,1]$使得$k=x(t_0)$. 设$\varepsilon>0$给定,则由v的连续性知存在$\delta>0$使得任取$t\in[0,1]$,$|t-t_0|<\delta$,则

$$|v(t)-v(t_0)|<\varepsilon.\tag{4}$$

设

$$y(t)=\begin{cases}1-\dfrac{|t-t_0|}{\delta}, & |t-t_0|\leqslant\delta,\\ 0, & |t-t_0|>\delta,\end{cases}$$

x为y在$[0,1]$上的限制. 则y在$\mathbb{R}$上连续且

$$|x(t)|\leqslant 1=x(t_0),\quad t\in[0,1].\tag{5}$$

因此$x\in X$且$\|x\|_\infty=1$. 由于$(Tx)(t)=v(t)x(t)$,所以

$$\begin{aligned}(Tx)(t)-kx(t)&=v(t)x(t)-kx(t)\\&=(v(t)-v(t_0))x(t).\end{aligned}$$

由于若$|t-t_0|>\delta$,有$x(t)=0$,故由(4)式和(5)式有

$$|v(t)-v(t_0)||x(t)|<\varepsilon,\quad t\in[0,1].$$

因此

$$\|Tx-kx\|_\infty\leqslant\varepsilon.\tag{6}$$

这样我们就证明了任取$\varepsilon>0$,存在$x\in X$,$\|x\|_\infty=1$且(6)式成立,所以k为T的近似特征值.

现假设$k\notin[a,b]$,设

$$u(t)=\frac{1}{v(t)-k}.$$

则 $u\in C[0,1]=X$. 设 $S(x)=ux, x\in X$. 由于 $u(t)v(t)-ku(t)=1$, 故有

$$x+kSx = x+kux = uvx.$$

所以

$$STx = uvx = x+kSx = TSx$$
$$S(T-kI)x = x = (T-kI)Sx.$$

因此 $(T-kI)^{-1}=S$ 在 $BL(X)$ 中存在. 所以 $k\notin\sigma(T)$. 从而若 $k\in\sigma(T)$, 则 $k\in[a,b]$. 我们证明了

$$[a,b]\subset\sigma_a(T), \quad \sigma(T)\subset[a,b].$$

由于 $\sigma_a(T)\subset\sigma(T)$, 所以

$$\sigma(T)=[a,b]$$

为 v 的值域.

为求 T 的特征值, 设 $Tx=kx$ 对某个 $x\neq 0$ 成立,

$$V=\{t\in[0,1]: x(t)\neq 0\}.$$

则 V 为 $[0,1]$ 的非空开子集且对所有的 $t\in[0,1]$ 有

$$(v(t)-k)x(t) = (Tx)(t)-kx(t) = 0.$$

因此当 t 在某一非空开集中时 $v(t)=k$.

另外, 若任取 $\alpha<t<\beta$ 有 $v(t)=k$, 其中 $0\leqslant\alpha,\beta\leqslant 1$ 固定. 设

$$x(t)=\begin{cases}(t-\alpha)(t-\beta), & \alpha\leqslant t\leqslant\beta,\\ 0, & t<\beta \text{ 或 } t>\beta.\end{cases}$$

则 $x\in X, x\neq 0$, 且对所有的 $0\leqslant t\leqslant 1$ 有

$$(Tx)(t)-kx(t) = (v(t)-k)x(t) = 0.$$

因此 $Tx=kx$, k 为 T 的特征值. 所以 T 的特征值之集 $\sigma_p(T)$ 是由所有的 $k\in[a,b]$ 使得当 t 在某一非空开子集上时有 $v(t)=k$ 组成. ■

问题 4.2.8 设 $X=C[0,1]$, 求证: 存在 $BL(X)$ 中元 T 使得 T 的谱为给定的区间 $[a,b]$.

解答 选取 $v\in X$ 使其值域为 $[a,b]$, 例如可取

$$v(t)=a+(b-a)t, \quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

定义 X 上的算子 T 为 $Tx=vx$, 则由问题 4.2.7 知 $\sigma(T)=[a,b]$. ■

问题 4.2.9 设 $X=l^p$, 其中 $1\leqslant p\leqslant\infty$. 若 $T\in BL(X)$ 定义为

$$(Tx)(j)=x(j+1), \quad j\geqslant 1, \quad x\in X.$$

求: T 的谱.

解答 若 $1\leqslant p<\infty$, 则

$$\|Tx\|_p^p=\sum_{j=1}^{\infty}|Tx(j)|^p=\sum_{j=1}^{\infty}|x(j+1)|^p\leqslant\|x\|_p^p,$$
$$\|Tx\|_p\leqslant\|x\|_p, \quad x\in X.$$

若 $p=\infty$,则

$$|Tx(j)|=|x(j+1)|\leqslant\|x\|_\infty,\quad j\geqslant 1,$$
$$\|Tx\|_\infty\leqslant\|x\|_\infty.$$

因此,无论在何种情形都有 $\|T\|\leqslant 1$. 由于 X 为 Banach 空间,若 $|k|>1$,则 $k\notin\sigma(T)$,即

$$\sigma(T)\subset\{k:|k|\leqslant 1\}. \tag{7}$$

若 $|k|<1$,$x=(1,k,k^2,\cdots)$,则 $x\in X$,$x\neq 0$ 且

$$kx(j)=k^j=x(j+1)=(Tx)(j)$$

对 $j\geqslant 1$ 成立. 所以有 $Tx=kx$,从而 k 为 T 的特征值. 故

$$\{k:|k|<1\}\subset\sigma_e(T). \tag{8}$$

由于 $\sigma_e(T)\subset\sigma(T)$ 且 $\sigma(T)$ 为闭集,故由(7)式和(8)式有

$$\sigma(T)=\{k\in\mathbb{K}:|k|\leqslant 1\}.$$ ■

问题 4.2.10 求证:实 Banach 空间上的有界线性算子的谱可以是空集.

解答 设 $X=\mathbb{R}^2$,$\mathbb{K}=\mathbb{R}$,算子 A 由矩阵

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}a & b\\ -b & a\end{bmatrix}$$

表示,其中 $a,b\in\mathbb{R}$,$b\neq 0$. 则 $A-kI$ 由矩阵

$$\boldsymbol{M}-k\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}a-k & b\\ -b & a-k\end{bmatrix}$$

表示. 由于 $\det(\boldsymbol{M}-k\boldsymbol{I})=(a-k)^2+b^2\geqslant b^2>0$ 对所有 $k\in\mathbb{R}$ 成立,故 $\boldsymbol{M}-k\boldsymbol{I}$ 为可逆的,即 $A-kI$ 在 $BL(X)$ 中可逆. 因此 $\sigma(A)=\varnothing$. ■

问题 4.2.11 求证:赋范空间上的有界线性算子的谱可以是数域 $\mathbb{K}$ 的非空非紧子集.

解答 设 $X=c_{00}$,$A:X\to X$ 定义为

$$Ax(1)=0,\quad Ax(i)=x(i-1),\quad i\geqslant 2.$$

则 $A\in BL(X)$. 设 $k\in\mathbb{K}$,$k\notin\sigma(A)$,则 $B=(A-kI)^{-1}$ 在 $BL(X)$ 中存在. 设

$$y(1)=1-k,\quad y(2)=1,\quad y(i)=0,\quad i\geqslant 3.$$

则 $y\in X$. 设 $x=By$,则 $x\in X$ 且

$$y=(A-kI)By=(A-kI)x=Ax-kx.$$

因此

$$1-k=y(1)=Ax(1)-kx(1)=-kx(1), \tag{9}$$
$$1=y(2)=Ax(2)-kx(2)=x(1)-kx(2), \tag{10}$$
$$0=y(i)=Ax(i)-kx(i)=x(i-1)-kx(i)$$

对 $i>2$ 成立. 将(10)式乘以 k 再与(9)式求和有

$$1=-k^2x(2).$$

这说明 $x(2)\neq 0$. 由于 $x\in X=c_{00}$,故存在 m 使得 $x(m)\neq 0$,且任取 $j>m$ 有 $x(j)=0$. 我们有 $m\geqslant 2$. 所以

$$0 = y(m+1) = x(m) - kx(m+1) = x(m),$$

矛盾. 因此 $B=(A-kI)^{-1}$ 在 $BL(X)$ 中不存在，即有 $k\in\sigma(A)$ 对所有的 $k\in\mathbb{K}$ 成立. 因此 $\sigma(A)=\mathbb{K}$ 为非空非紧的子集. ■

问题 4.2.12 算子 A 称为**幂零**的若存在正整数 m 使得 $A^m=0$. 试求复 Banach 空间 X 上幂零算子的谱.

解答 若 X 为复 Banach 空间，$A\in BL(X)$，则谱半径公式成立：

$$\lim_{n\to\infty} \| A^n \|^{1/n} = \sup\{ | k | : k \in \sigma(A)\}.$$

若 A 为幂零的，则 $A^m=0$ 对某个 m 成立，因此任取 $n\geqslant m$ 有 $A^n=0$. 所以

$$\sup\{ | k | : k \in \sigma(A)\} = 0.$$

这说明 A 的谱不包含非零元. 但由于 X 为复 Banach 空间，故 $\sigma(A)$ 非空，从而 $\sigma(A)=\{0\}$. ■

问题 4.2.13 设 X 为复 Banach 空间，对 $T\in BL(X)$，设

$$r_\sigma(T) = \{ | k | : k \in \sigma(T)\}$$

为 T 的谱半径. 若 $S,T\in BL(X)$，求证：

(a) 若 $TS=ST$，则

$$r_\sigma(ST) \leqslant r_\sigma(S) r_\sigma(T).$$

(b) 条件 $TS=ST$ 在(a)中不能去掉.

(c) (a)中的不等式可以是严格的.

解答 (a) 谱半径公式是说当 $n\to\infty$ 时

$$\| T^n \|^{1/n} \to r_\sigma(T).$$

由于 $ST=TS$，故有

$$(ST)^n = S^n T^n, \quad n \geqslant 1.$$

由于 $\| AB \| \leqslant \| A \| \| B \|$，所以有

$$\| (ST)^n \| \leqslant \| S^n \| \| T^n \|.$$

因此有

$$\| (ST)^n \|^{1/n} \leqslant \| S^n \|^{1/n} \| T^n \|^{1/n},$$

令 $n\to\infty$ 有

$$r_\sigma(ST) \leqslant r_\sigma(S) r_\sigma(T).$$

(b) 设 $X=\mathbb{C}^2$，$\mathbb{K}=\mathbb{C}$，S 和 T 分别由矩阵

$$\boldsymbol{M}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

表示. 由于 $S-kI$ 由矩阵 $\boldsymbol{M}_1-k\boldsymbol{I}$ 表示，且 $k\in\sigma(S)$ 当且仅当 $S-kI$ 不可逆，故 $k\in\sigma(S)$ 当且仅当

$$\det(\boldsymbol{M}_1 - k\boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} -k & 0 \\ 1 & -k \end{vmatrix} = 0,$$

即 $k=0$. 因此 $\sigma(S)=\{0\}$, $r_\sigma(S)=0$. 类似地, ST 由矩阵

$$\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

表示, 从而 $k\in\sigma(ST)$ 当且仅当

$$\begin{vmatrix}-k & 0\\ 1 & 2-k\end{vmatrix}=0,$$

即 $k=0$ 或 2. 因此 $\sigma(ST)=\{0,2\}$, $r_\sigma(ST)=2$. 所以有

$$r_\sigma(ST)=2>0=r_\sigma(S)r_\sigma(T).$$

(c) 选取 $T\in BL(X)$ 使得 $T^2=T$, $T\neq 0$, $T\neq I$. 则由问题 4.2.3 知 $\sigma(T)=\{0,1\}$. 所以 $r_\sigma(T)=1$. 若 $S=I-T$, 则 $S^2=S$, $S\neq 0$, $S\neq I$, 因此也有 $r_\sigma(S)=1$. 但 $ST=0=TS$; 所以 $r_\sigma(ST)=0$. 从而 $r_\sigma(ST)<r_\sigma(S)r_\sigma(T)$. ■

问题 4.2.14 设 $A\in BL(X)$. A 的**剩余谱** $\sigma_r(A)$ 由所有纯量 k 使得 $A-kI$ 的值域不在 X 中稠密组成. 求证: 若 X 为 Banach 空间, $A\in BL(X)$, 则

$$\sigma(A)=\sigma_a(A)\cup\sigma_r(A).$$

解答 首先设 $k\notin\sigma(A)$, 则 $A-kI$ 为可逆的. $A-kI$ 的值域为 X, 所以必在 X 中稠密, 因此 $k\notin\sigma_r(A)$. 这样就证明了 $\sigma_r(A)\subset\sigma(A)$. 又由于 $\sigma_a(A)\subset\sigma(A)$, 故有

$$\sigma_r(A)\cup\sigma_a(A)\subset\sigma(A). \tag{11}$$

现假设 $k\notin\sigma_r(A)$ 且 $k\notin\sigma_a(A)$, 则 $A-kI$ 的值域在 X 中稠密且 $A-kI$ 为下有界的. 由 $A-kI$ 为下有界知 $A-kI$ 为单射. 若 $y\in X$, 则存在 X 中序列 $\{x_n\}$ 使得 $(A-kI)x_n\to y$, 设 $y_n=(A-kI)x_n$, 则对某个 $\alpha>0$ 有

$$\alpha\|x_n-x_m\|\leqslant\|(A-kI)(x_n-x_m)\|=\|y_n-y_m\|.$$

由于 $y_n\to y$, 这说明 $\{x_n\}$ 为 X 中的柯西列. 又 X 为 Banach 空间, 故存在 $x\in X$ 使得 $x_n\to x$. 因此

$$y_n=(A-kI)x_n\to(A-kI)x.$$

所以有 $y=(A-kI)x$. 这就证明了 $A-kI$ 为满射. 由于 X 为 Banach 空间, 由开映射定理知 $A-kI$ 在 $BL(X)$ 中可逆. 因此, 若 $k\notin\sigma_r(A)$ 且 $k\notin\sigma_a(A)$, 则必有 $k\notin\sigma(A)$, 或等价地, 若 $k\in\sigma(A)$, 则 $k\in\sigma_r(A)$ 或 $k\in\sigma_a(A)$. 这与(11)式一起就完成了证明. ■

问题 4.2.15 若 X 为赋范空间, $A\in BL(X)$ 为可逆的, 求证:

$$\sigma(A^{-1})=\left\{k\in\mathbb{K}:\frac{1}{k}\in\sigma(A)\right\}.$$

解答 由于 $A^{-1}-0\cdot I=A^{-1}$ 可逆, 故 $0\notin\sigma(A^{-1})$. 若 $k\neq 0$, 则

$$A^{-1}-kI=A^{-1}-kA^{-1}A=-kA^{-1}\left(A-\frac{1}{k}I\right).$$

因此 $A^{-1}-kI$ 为可逆的当且仅当 $A-\frac{1}{k}I$ 为可逆的. 所以

$$k \in \sigma(A^{-1}) \Leftrightarrow \frac{1}{k} \in \sigma(A).$$ ■

问题 4.2.16 设 X 为 Banach 空间，$A,B\in BL(X)$. 求证：$\sigma(AB)$与 $\sigma(BA)$最多相差$\{0\}$.

解答 设 $k\notin\sigma(AB)$，$k\neq 0$. 设 $F=AB-kI$，$G=BA-kI$. 则 F 在 $BL(X)$中可逆且

$$FA = ABA - kA = AG,$$
$$GB = BAB - kB = BF.$$

因此，

$$A = F^{-1}AG, \quad B = GBF^{-1},$$
$$kI = BA - G = GBF^{-1}F^{-1}AG - G,$$
$$I = GS = TG.$$

其中

$$S = \frac{1}{k}(BF^{-1}F^{-1}AG - I), \qquad T = \frac{1}{k}(GBF^{-1}F^{-1}A - I).$$

但由 $GS=I$ 知 G 为满射，由 $TG=I$ 知 G 为单射. 从而 G 为一一映射. 又由于 $G\in BL(X)$且 X 为 Banach 空间，由开映射定理知 G 在 $BL(X)$中可逆. 因此 $k\notin\sigma(BA)$.

我们证明了若 $k\in\sigma(BA)$且 $k\neq 0$，则 $k\in\sigma(AB)$，这就完成了证明. ■

问题 4.2.17 设 X 为 Banach 空间，$A\in BL(X)$. 求证：

(a) A 的近似点谱 $\sigma_a(A)$为 $\mathbb{K}$ 的紧子集；

(b) A 的特征值的极限必在 $\sigma_a(A)$中；

(c) $\sigma(A)$在$\mathbb{K}$ 中的边界包含在 $\sigma_a(A)$中；

(d) 若$\mathbb{K}=\mathbb{C}$，则 $\sigma_a(A)\neq\varnothing$.

解答 (a) 我们知道 $k\notin\sigma_a(A)$当且仅当 $A-kI$ 为下有界的. 设 $k\notin\sigma_a(A)$，则存在 $\alpha>0$使得

$$\alpha\|x\| \leqslant \|(A-kI)x\|, \quad x\in X.$$

若$|k'-k|<\frac{1}{2}\alpha$，则

$$\alpha\|x\| \leqslant \|Ax-kx\| \leqslant \|Ax-k'x\| + \|k'x-kx\|$$
$$\leqslant \|Ax-k'x\| + \frac{1}{2}\alpha\|x\|.$$

因此对 $x\in X$ 有$\frac{1}{2}\alpha\|x\|\leqslant\|Ax-k'x\|$. 这说明 $A-k'I$ 为下有界的，从而 $k'\notin\sigma_a(A)$. 我们证明了若$|k'-k|<\frac{1}{2}\alpha$，则 $k'\notin\sigma_a(A)$. 这说明 $\sigma_a(A)$的余集为开集，从而 $\sigma_a(A)$为闭集. 又 $\sigma_a(A)\subset\sigma(A)$且 $\sigma(A)$为紧集，故 $\sigma_a(A)$为紧集.

(b) 若 $k_n\in\sigma_e(A)$且 $k_n\to k$. 则由于 $\sigma_e(A)\subset\sigma_a(A)$知 $k_n\in\sigma_a(A)$. 又由于 $\sigma_a(A)$为闭集知 $k\in\sigma_a(A)$.

(c) 假设 $k\notin\sigma_a(A)$且 k 为$\sigma(A)$的边界点. 则 $A-kI$ 为下有界的,即存在 $\alpha>0$ 使得

$$\alpha\|x\|\leqslant\|Ax-kx\|,\quad x\in X.$$

设 $y\in X$. 由于 k 为$\sigma(A)$的边界点,对 $n\geqslant1$,可以找到 $k_n\notin\sigma(A)$使得$|k-k_n|<\alpha/n$. 设 $x_n=(A-k_nI)^{-1}y$. 则 $y=Ax_n-k_nx_n$,$\alpha\|x_n\|\leqslant\|Ax_n-kx_n\|$. 所以

$$\alpha\|x_n\|\leqslant\|y+k_nx_n-kx_n\|\leqslant\|y\|+|k_n-k|\,\|x_n\|\leqslant\|y\|+\frac{\alpha}{n}\|x_n\|.$$

因此有 $\alpha\left(1-\frac{1}{n}\right)\|x_n\|\leqslant\|y\|$. 从而

$$\|y-(Ax_n-kx_n)\|=\|kx_n-k_nx_n\|\leqslant\frac{\alpha}{n}\|x_n\|<\frac{1}{n-1}\|y\|,$$

对 $n>1$ 成立. 这说明 y 在 $A-kI$ 值域的闭包中. 这对任取的 $y\in X$ 都成立,故 $A-kI$ 值域的闭包为 X,即 $k\notin\sigma_r(A)$. 由于 $k\notin\sigma_a(A)$,故由问题 4.2.14 知 $k\notin\sigma(A)$. 但 $\sigma(A)$为闭集,所以 $\sigma(A)$必包含它的边界点,矛盾. 因此若 k 为$\sigma(A)$的边界点,则 $k\in\sigma_a(A)$.

(d) 设$\mathbb{K}=\mathbb{C}$,若 $\sigma_a(A)=\varnothing$,则由(c)知$\sigma(A)$无边界点. 因此$\sigma(A)$为开集. 由于$\sigma(A)$为 $\mathbb{K}$ 的非空紧子集,这是不可能的. ■

问题 4.2.18 设 X 为 Banach 空间,$A\in BL(X)$,$A\neq0$. 求证:A 为有限秩的当且仅当存在 X 中线性无关的元$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,X'中线性无关的元$\{x_1',x_2,\cdots,x_n'\}$使得

$$A(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i'(x)x_i,\quad x\in X.$$

由此推出 A 的非零特征值为矩阵(k_{ij})特征多项式非零根的全体,其中对 $i,j=1,2,\cdots,n$,$k_{ij}=x_i'(x_j)$.

解答 若存在如题设的$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$及$\{x_1',x_2',\cdots,x_n'\}$,则 A 的值域中每一点都有如下形式

$$y=Ax=\sum_{i=1}^{n}k_ix_i,$$

其中 $k_i=x_i'(x)$. 因此 $y\in\operatorname{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$. 从而 $R(A)$为有限维的,即 A 为有限秩的.

反之,若 A 为有限秩的,则 $Y=R(A)$有有限的基. 设$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$为 Y 的基. Y 中每个元 y 可以唯一地表示为 $y=k_1x_1+k_2x_2\cdots+k_nx_n$. 因此可以找到 $f_j:Y\to\mathbb{K}$ 使得

$$f_j(y)=k_j,$$

其中 $y=\sum_{i=1}^{n}k_ix_i$. f_j 显然为线性的,又由于 Y 为有限维的,则由问题 1.3.8 知 f_j 为连续的. 令 $x_j'=f_j\circ A$,则 $x_j'\in X'$. 由于若 $x\in X$,则 $Ax\in Y$,故若

$$Ax=\sum_{i=1}^{n}k_ix_i,$$

则 $f_j(Ax)=k_j$. 因此若 $x\in X$

$$Ax=\sum_{i=1}^{n}k_ix_i=\sum_{i=1}^{n}f_i(Ax)x_i=\sum_{i=1}^{n}x_i'(x)x_i.$$

为证 $x_1',x_2',\cdots,x_n'$ 为线性无关的，设 $k_1x_1'+k_2x_2,\cdots+k_nx_n'=0$. 则任取 $x\in X$ 有

$$\sum_{j=1}^{n}k_jx_j'(x)=0.$$

由 f_j 的定义有

$$f_j(x_i)=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

由于存在 $z_1,z_2,\cdots,z_n\in X$ 使得 $Az_i=x_i$，所以

$$0=\sum_{j=1}^{n}k_jx_j'(z_i)=\sum_{j=1}^{n}k_jf_j(Az_i)=\sum_{j=1}^{n}k_jf_j(x_i)=k_i.$$

上式对任取的 $i=1,2,\cdots,n$ 都是对的，故 $x_1',x_2,\cdots,x_n'$ 线性无关.

为证第二部分，设 $k_{ij}=x_i'(x_j)$ 且 B 为 A 在 $Y=R(A)$ 上的限制. 则

$$Bx_j=Ax_j=\sum_{i=1}^{n}x_i'(x_j)x_i=\sum_{i=1}^{n}k_{ij}x_i.$$

这说明相对于基 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 矩阵 (k_{ij}) 表示算子 B. 若 $k\neq0$，$Ax=kx$，则 $x\in Y$. 由此知 A 的非零特征值刚好为 B 的非零特征值的全体. 若 $\boldsymbol{M}=(k_{ij})$，则 $B-kI$ 由矩阵 $\boldsymbol{M}-k\boldsymbol{I}$ 表示，所以 B 的特征值 k 为特征方程

$$\mathrm{def}(\boldsymbol{M}-k\boldsymbol{I})=0$$

的根的全体. 因此，B 的非零特征值为矩阵 (k_{ij}) 特征多项式非零根的全体. ■

问题 4.2.19 设 $X=l^p$，其中 $1\leqslant p\leqslant\infty$，$T\in BL(X)$ 由下式给出：

$$Tx=\left(0,x(1),\frac{x(2)}{2},\cdots\right),\quad x\in X.$$

求：T 的特征值及 T 的谱.

解答 由 T 的定义有

$$(Tx)(1)=0,$$

$$(Tx)(n)=\frac{x(n-1)}{n-1},\quad n\geqslant2,\quad x\in X.$$

T 显然为线性的. 由于当 $n\geqslant2$ 时，$|(Tx)(n)|\leqslant|x(n-1)|$，故

$$\|Tx\|_p\leqslant\|x\|_p,\quad x\in X.$$

因此 $T\in BL(X)$. 由于

$$T(T^{r-1}x)(1)=0,$$

$$T(T^{r-1}x)(n)=\frac{(T^{r-1}x)(n-1)}{n-1},\quad n\geqslant2,$$

由归纳法知

$$(T^rx)(n)=0,\quad 1\leqslant n\leqslant r,$$

$$(T^rx)(n)=\frac{x(n-r)}{(n-1)(n-2)\cdots(n-r)},\quad n\geqslant r+1.$$

因为

$$(n-1)(n-2)\cdots(n-r)=\binom{n-1}{r}r!\geqslant r!,$$

我们有

$$|(T^rx)(n)|\leqslant\frac{|x(n-r)|}{r!},\quad n\geqslant r+1. \tag{12}$$

若 $1\leqslant p<\infty$,则

$$\|T^rx\|_p^p=\sum_{n=1}^{\infty}|(T^rx)(n)|^p\leqslant\sum_{n=r+1}^{\infty}\left(\frac{|x(n-r)|}{r!}\right)^p=\left(\frac{\|x\|_p}{r!}\right)^p.$$

所以 $\|T^rx\|\leqslant\frac{1}{r!}\|x\|_p$. 由(12)式知当 $p=\infty$ 时这也是对的. 又由于这对所有的 $x\in X$ 成立,故

$$\|T^r\|\leqslant\frac{1}{r!},\quad r\geqslant 1.$$

若 $k\neq 0$,则

$$T-kI=-k\left(-\frac{1}{k}T+I\right)=-k(I-A),$$

其中 $A=\frac{1}{k}T$. 因为

$$\|A^m\|=\left\|\frac{1}{k^m}T^m\right\|=\left(\frac{1}{|k|}\right)^m\|T^m\|\leqslant\left(\frac{1}{|k|}\right)^m\frac{1}{m!}<1$$

对某个 m 成立,故由问题 4.2.1 知 $I-A$ 在 $BL(X)$ 中可逆. 因此 $T-kI$ 也可逆,从而 k 不为 T 的谱值.

由于 $(Tx)(1)=0$,所以不存在 $x\in X$ 使得 $Tx=(1,0,\cdots)$. 因此 T 不为满射,从而 $T=T-0\cdot I$ 不可逆,这说明 0 为 T 的谱值.

若 $Tx=0$,则

$$x(n)=(n+1)(Tx)(n+1),\quad n\geqslant 1.$$

故必有 $x=0$,这说明 0 不为 T 的特征值.

因此有

$$\sigma(T)=\{0\},\quad \sigma_c(T)=\varnothing$$ ■

问题 4.2.20 设 X 为 Banach 空间,$A,B\in BL(X)$. 求证:若 B 为紧的,则除掉特征值外 A 的谱和 $A+B$ 的谱相等.

解答 设 $k\notin\sigma_c(A)$,$k\notin\sigma(A+B)$. 则 $T=(A+B-kI)^{-1}$ 在 $BL(X)$ 中存在,从而

$$(A+B-kI)T=I,\quad BT-I=-(A-kI)T.$$

设 $(BT-I)x=0$,则 $(A-kI)T(x)=0$. 由于 $k\notin\sigma_c(A)$,故有 $Tx=0$. 所以 $x=T^{-1}Tx=0$. 这说明 1 不为 BT 的特征值. 但 BT 为紧算子,从而 1 不为 BT 的谱值. 因此 $BT-I$ 为可逆的. 所以有

$$A-kI=(I-BT)T^{-1}$$

为可逆的，即 $k\notin\sigma(A)$. 因此，

$$k\in\sigma(A),\quad k\notin\sigma_e(A)\Rightarrow k\in\sigma(A+B).$$

类似地，将 A 由 $A+B$ 代替，将 B 由 $-B$ 代替，重复上面的论证则有

$$k\in\sigma(A+B),\quad k\notin\sigma_e(A+B)\Rightarrow k\notin\sigma(A).$$

而这正是需要证明的. ■

问题 4.2.21 设 $X=l^p$，其中 $1\leqslant p\leqslant\infty$，$\{k_n\}$ 为有界纯量列. 对 $x\in X$，定义 $A(x)$ 为

$$A(x)(j)=k_jx(j),\quad j\geqslant 1.$$

求证：$A\in BL(X)$，求 A 的特征值，证明 A 为紧算子当且仅当 $k_n\to 0$.

解答 设任取 n 有 $|k_n|\leqslant\alpha$. 若 $1\leqslant p<\infty$，则

$$\sum_{j=1}^{\infty}|Ax(j)|^p\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\alpha^p|x(j)|^p;$$

因此 $A(x)\in l^p$ 且

$$\|Ax\|_p\leqslant\alpha\|x\|_p,\quad x\in X.\tag{13}$$

若 $p=\infty$，则

$$|A(x)(j)|\leqslant\alpha|x(j)|\leqslant\alpha\|x\|_\infty,\quad j\geqslant 1.$$

因此有 $Ax\in l^\infty$ 且(13)式对 $p=\infty$ 也成立. 由于 A 显然为线性的，故有 $A\in BL(X)$.

正如问题 4.2.5 的证明一样，有

$$\sigma_e(A)=\{k_j:j\geqslant 1\}.$$

若 $k_n\to 0$，则由问题 4.1.13 知 A 为紧算子.

反之，设 A 为紧算子. 为证 $k_n\to 0$，设 $\varepsilon>0$ 固定. 若 $k\in\sigma_e(A)$，$|k|\geqslant\varepsilon$ 且 $k=k_{n_1}=k_{n_2}=\cdots$，则 $e_{n_1},e_{n_2},\cdots$ 均为对应于 k 的特征向量，但对应于 k 的特征空间为有限维的，且 $e_{n_1},e_{n_2},\cdots$ 为线性无关的，所以只存在有限个 n 使得 $k=k_n$. 由于 $\sigma_e(A)$ 为有界集且仅可能以 0 为极限点，所有最多只能有有限个 $k\in\sigma_e(A)$ 使得 $|k|\geqslant\varepsilon$. 因此仅有有限个 n 使得 $|k_n|\geqslant\varepsilon$. 这就说明 $k_n\to 0$. ■

问题 4.2.22 设 $X=l^p$，其中 $1\leqslant p\leqslant\infty$，$\{k_n\}$ 为有界纯量列. 对 $x\in X$，定义 $A(x)$ 为

$$A(x)(1)=0,\quad A(x)(i)=k_{i-1}x(i-1),\quad i\geqslant 2.$$

求证：$A\in BL(X)$ 且 A 为紧算子当且仅当 $k_n\to 0$.

解答 在 X 上定义 B，S 和 T 如下：

$$(Bx)(i)=k_ix(i),\quad i\geqslant 1,$$

$$(Sx)(1)=0,\quad (Sx)(i)=x(i-1),\quad i\geqslant 2,$$

$$(Tx)(i)=x(i+1),\quad i\geqslant 1.$$

则由问题 4.2.21 知 $B\in BL(X)$. 若 $x\in l^p$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，则

$$\|Sx\|_p=\|x\|_p,\quad \|Tx\|_p\leqslant\|x\|_p.$$

因此 $S,T\in BL(X)$. 若 $x\in X$ 且 $y=Bx$，则

$$(Sy)(1)=0=(Ax)(1),$$

$$(Sy)(i) = y(i-1) = k_{i-1}x(i-1) = (Ax)(i)$$

对 $i \geqslant 2$ 成立. 所以 $SBx = Sy = Ax$, 即 $SB = A$. 这就证明了 $A \in BL(X)$, 且若 B 为紧的, 则 A 也为紧的. 若 $x \in X$, $z = Ax$, 则

$$(Tz)(i) = z(i+1) = k_i x_i = (Bx)(i)$$

对 $i \geqslant 1$ 成立. 因此 $TAx = Tz = Bx$, 即 $TA = B$. 这说明若 A 为紧的, 则 B 为紧的. 但由问题 4.2.21 知 B 为紧的当且仅当 $k_n \to 0$. 从而 A 为紧的当且仅当 $k_n \to 0$. ■

问题 4.2.23 设 $A: C[0,1] \to C[0,1]$ 定义为

$$A(x) = vx, \quad x \in C[0,1],$$

其中 v 为 $C[0,1]$ 中一固定非零元. 求证: A 不为紧算子.

解答 设 $X = C[0,1]$. 由问题 4.2.7 知 $\sigma(A)$ 为 v 的值域. 若此值域仅包含一点 c, 则 $c \neq 0$, 这是由于 v 不恒为 0. 在这种情况下有 $A = cI$. 由于 X 为无穷维空间, $c \neq 0$, 所以由问题 4.1.1 知 A 不为紧算子.

若 v 的值域至少含有两个点 a 和 b, 则由于 v 为连续的, 故其值域为连通的, 从而 v 的值域包含整个闭区间 $[a,b]$. 所以 $[a,b]$ 中的每一点都为 $\sigma(A)$ 的极限点. 若 A 为紧算子, 则 $\sigma(A)$ 不可能有非零的极限点, 这里我们用到了 X 为 Banach 空间这个假设. 这就证明了 A 不为紧的. ■

问题 4.2.24 设 X 为 Banach 空间, $A \in BL(X)$, A' 为 A 的共轭算子. 求证 $\sigma(A) = \sigma_a(A) \cup \sigma_e(A')$.

解答 设 $\sigma_r(A)$ 为所有的纯量 $k \in \mathbb{K}$ 使得 $R(A-kI)$ 在 X 中不为稠密的. 由问题 4.2.14 知

$$\sigma(A) = \sigma_a(A) \cup \sigma_r(A).$$

设 $k \in \sigma_r(A)$, $Y = R(A-kI)$. 若 $x_1 \in X$, $x_1 \notin Y$, 则存在 $x' \in X'$ 使得

$$x'(x_1) = d(x_1, Y) > 0,$$
$$x'(y) = 0, \quad y \in Y.$$

因此任取 $x \in X$,

$$(A'x')(x) - kx'(x) = x'(Ax) - kx'(x) = x'(Ax - kx) = 0,$$

这是由于 $y = Ax - kx \in Y$. 故有

$$Ax' - kx' = 0.$$

由于 $x'(x_1) \neq 0$, 故 $x' \neq 0$, 这说明 k 为 A' 的特征值.

另外, 若 k 为 A' 的特征值, 则存在 $x' \in X'$, $x' \neq 0$, $A'x' - kx' = 0$. 对所有 $x \in X$

$$0 = (A'x' - kx')(x) = A'x'(x) - kx'(x) = x'(Ax - kx).$$

因此 $Ax - kx \in Z(x')$. 由于这对任取的 $x \in X$ 都成立, 故有 $R(A-kI) \subset Z(x')$. 又 $x' \neq 0$, 故 $Z(x')$ 为 X 的真闭子空间, 所以

$$\overline{R(A-kI)} \subset Z(x') \neq X.$$

因此 $k \in \sigma_r(A)$.

我们证明了 $\sigma_r(A) = \sigma_e(A')$. 所以有

$$\sigma(A) = \sigma_a(A) \cup \sigma_e(A').$$

■

CHAPTER 5

第5章 Hilbert空间

这一章我们讨论其上可以自然地定义内积的线性空间. 这样的空间被称为内积空间,是欧几里得空间最自然的推广. 如以前一样,数域$\mathbb{K}$可以是实数域$\mathbb{R}$或是复数域$\mathbb{C}$.

在5.1节中我们讨论内积空间的基本性质. 若由内积导出的范数使该内积空间成为完备的,则称这个内积空间为Hilbert空间. 内积使我们可以自然地定义正交性,而正交性又与最小距离有密切联系. 在5.2节中我们讨论标准正交集及Riesz-Fischer定理. 关于Hilbert空间的另外一个重要定理,即Riesz表示定理,将在5.3节中讨论.

5.1 内积空间

设X为数域$\mathbb{K}$(可以是$\mathbb{R}$或是$\mathbb{C}$)上的线性空间. 我们用$\bar{k}$表示$\mathbb{K}$中元k的共轭复数. 因此,$\bar{k}=k$当且仅当$k\in\mathbb{R}$. X上的内积是一个函数,这个函数将X中的元x,y映为$\langle x,y\rangle$,使得任取$x,y,z\in X$及$k\in\mathbb{K}$有

$$\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle,\qquad \langle kx,y\rangle=k\langle x,y\rangle,$$
$$\langle y,x\rangle=\overline{\langle x,y\rangle},\quad \langle x,x\rangle\geqslant 0,$$
$$\langle x,x\rangle=0\Leftrightarrow x=0.$$

一个线性空间上定义了一个内积,则称此线性空间为**内积空间**. 由内积导出的范数定义为

$$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle},\quad x\in X.$$

若此范数使 X 成为完备度量空间，则称 X 为 **Hilbert 空间**.

在研究两个或多个内积空间时，我们可能用相同的记号来表示不同的内积. 为了不考虑平凡情形，总是假设每一个 Hilbert 空间都包含非零元.

由内积的定义容易得到：

$$\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle,$$

$$\langle x, ky\rangle = \bar{k}\langle x, y\rangle,$$

$$\langle 0, y\rangle = 0 = \langle y, 0\rangle,$$

其中 $x, y, z \in X, k \in \mathbb{K}$.

$\mathbb{K}^n$ 空间：对于 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{K}^n$，令

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x(j)\,\overline{y(j)}.$$

这给出了 $\mathbb{K}^n$ 上的一个内积，其导出的范数为 $\|\cdot\|_2$. 这个内积使 $\mathbb{K}^n$ 成为 Hilbert 空间.

l^2 空间：对于 $x, y \in l^2$，令

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x(j)\,\overline{y(j)}.$$

这给出了 l^2 上的一个内积，这个内积使 l^2 成为 Hilbert 空间，其导出的范数为 $\|\ \|_2$.

$L^2(T)$ 空间：设 μ 为测度空间 T 上的测度，对于 $x, y \in L^2(T)$，令

$$\langle x, y\rangle = \int_T x\,\bar{y}\,\mathrm{d}\mu.$$

这个内积使 $L^2(T)$ 成为 Hilbert 空间，其导出的范数为 $\|\ \|_2$.

内积空间的乘积：设 X 和 Y 为内积空间，则在 $X \times Y$ 上可以定义内积如下：

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = \langle x_1, x_2\rangle + \langle y_1, y_2\rangle,$$

其中 $x_1, x_2 \in X, y_1, y_2 \in Y$.

设 X 为内积空间，则有

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \tag{1}$$

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|. \tag{2}$$

公式(1)被称为**平行四边形等式**，而公式(2)则被称为 **Schwarz 不等式**. 若数域 $\mathbb{K}$ 为 $\mathbb{R}$，则

$$4\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2.$$

若数域 $\mathbb{K}$ 为 $\mathbb{C}$，则

$$4\mathrm{Re}\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2, \qquad \mathrm{Im}\langle x, y\rangle = \mathrm{Re}\langle x, \mathrm{i}y\rangle.$$

这些等式称为**极化恒等式**.

利用 Schwarz 不等式，容易看出内积是 $X \times X$ 上的连续函数. 因此，若 $x_n \to x$ 且 $y_n \to y$，则

$$\langle x_n, z\rangle \to \langle x, z\rangle, \quad \langle z, y_n\rangle \to \langle z, y\rangle, \qquad \langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle.$$

若$\langle x,y\rangle=0$,则称 x 与 y **正交**,记为 $x\perp y$. 若对集合 E 中任意元 y 都有$\langle x,y\rangle=0$,则记为 $x\perp E$. 若对集合 E 中任意元 x 及集合 F 中任意元 y 都有$\langle x,y\rangle=0$,则称 E 与 F 正交,记为 $E\perp F$. 所有满足 $x\perp E$ 的 x 之集称为 E 的**正交补**,记为 $E^{\perp}$.

若 E 为 X 的子集且 $x\in X, y\in E$ 称为 x 在 E 上的**最佳逼近元**,若任取 $z\in E$ 都有

$$\|x-y\|\leqslant\|x-z\|.$$

练习

1. 考虑数域$\mathbb{R}$ 上的内积空间 $X=\mathbb{R}^2$. 令 $\boldsymbol{x}=(1,1)$. 找出所有的 $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2$ 使得 $\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$ 且 $\|\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{y}\|$.

2. 设 $X=\mathbb{R}$, $Y=\mathbb{R}^2$ 及 $Z=\mathbb{R}^3$. 比较 Z 上的内积及上面定义的乘积空间 $X\times Y$ 上的内积.

3. 证明平行四边形等式.

4. 证明对于内积空间中的元 x,y 有

$$\mathrm{Re}\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\{\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\}.$$

5. 证明若数域为$\mathbb{C}$,则任取 x,y 有

$$\mathrm{Im}\langle x,y\rangle=\mathrm{Re}\langle x,\mathrm{i}y\rangle.$$

6. 设 $x_n\to x$ 及 $y_n\to y$. 求证:任取 z 有

$$\langle x_n,z\rangle\to\langle x,z\rangle,\quad\langle z,y_n\rangle\to\langle z,y\rangle,\quad\langle x_n,y_n\rangle\to\langle x,y\rangle.$$

问题

问题 5.1.1 设 X 为内积空间及 $x,y\in X$. 求证:

(a) $x\perp y$ 当且仅当对于任意的 $k\in\mathbb{K}$ 有

$$\|kx+y\|^2=\|kx\|^2+\|y\|^2. \tag{3}$$

(b) **勾股定理**:若 $x\perp y$ 则有

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2. \tag{4}$$

(c) 若 X 为实空间,则(4)可以推出 $x\perp y$.

(d) 若 X 为复空间,则(4)不能推出 $x\perp y$.

解答 (a) 由内积的定义可知

$$\begin{aligned}\|kx+y\|^2&=\langle kx+y,kx+y\rangle\\&=\langle kx,kx+y\rangle+\langle y,kx+y\rangle\\&=\langle kx,kx\rangle+\langle kx,y\rangle+\langle y,kx\rangle+\langle y,y\rangle\\&=\|kx\|^2+k\langle x,y\rangle+\overline{k}\,\overline{\langle x,y\rangle}+\|y\|^2.\end{aligned}$$

这就证明了(3)式成立当且仅当对于任意的 $k\in\mathbb{K}$，

$$k\langle x,y\rangle+\bar{k}\,\overline{\langle x,y\rangle}=0. \tag{5}$$

若 $x\perp y$，则 $\langle x,y\rangle=0$，从而(5)式成立. 反之，若(5)式成立，取 $k=\overline{\langle x,y\rangle}$，则有

$$|\langle x,y\rangle|^2+|\langle x,y\rangle|^2=0,$$

因此 $\langle x,y\rangle=0$. 所以 $x\perp y$ 当且仅当(5)式成立，这就证明了(a).

(b) 仅需在(a)中取 $k=1$ 即可.

(c) 若 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$，且(3)在 $k=1$ 时成立，则(5)式在 $k=1$ 时成立，因此

$$\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle=0.$$

所以若 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$，则(4)可以推出 $\langle x,y\rangle=0$. 这就证明了(c).

(d) 考虑 $X=\mathbb{K}=\mathbb{C}$. 则有 $\langle x,y\rangle=x\bar{y}$. 设 $x=1,y=\mathrm{i}$，则

$$\langle x,y\rangle+\overline{\langle x,y\rangle}=-\mathrm{i}+\mathrm{i}=0,$$

即(5)式在 $k=1$ 时成立. 因此(4)成立，但 $\langle x,y\rangle=-\mathrm{i}\neq 0$. 这就完成了证明. ■

问题 5.1.2 证明在内积空间中下述命题相互等价：

(a) $x\perp y$.

(b) 对于所有的 $k\in\mathbb{K}$ 有 $\|x+ky\|=\|x-ky\|$.

(c) 对于所有的 $k\in\mathbb{K}$ 有 $\|x+ky\|\geqslant\|x\|$.

解答 对于 $x,y\in X$ 及 $k\in\mathbb{K}$ 有

$$\begin{aligned}\|x+ky\|^2&=\langle x+ky,x+ky\rangle\\&=\langle x,x\rangle+\langle x,ky\rangle+\langle ky,x\rangle+\langle ky,ky\rangle\\&=\langle x,x\rangle+\bar{k}\langle x,y\rangle+k\,\overline{\langle x,y\rangle}+k\bar{k}\langle y,y\rangle\\&=\|x\|^2+2\mathrm{Re}\,\bar{k}\langle x,y\rangle+|k|^2\|y\|^2.\end{aligned}\tag{6}$$

若用 $-k$ 代替 k 则有

$$\|x-ky\|^2=\|x\|^2-2\mathrm{Re}\,\bar{k}\langle x,y\rangle+|k|^2\|y\|^2. \tag{7}$$

若(a)成立，则 $\langle x,y\rangle=0$. 由(6)式及(7)式有

$$\|x+ky\|^2=\|x-ky\|^2,$$

$$\|x+ky\|^2=\|x\|^2+|k|^2\|y\|^2\geqslant\|x\|^2.$$

这就证明了(a)⇒(b)及(a)⇒(c).

若(b)成立，则由(6)式和(7)式有

$$\mathrm{Re}\,\bar{k}\langle x,y\rangle=0$$

对所有的 $k\in\mathbb{K}$ 成立. 取 $k=\langle x,y\rangle$ 则有

$$|\langle x,y\rangle|^2=0,$$

从而 $\langle x,y\rangle=0$，即(a)成立.

最后若(c)成立，则由(6)式知对于任意的 $k\in\mathbb{K}$ 有

$$2\mathrm{Re}\,\bar{k}\langle x,y\rangle+|k|^2\|y\|^2\geqslant 0.$$

若 $y=0$，则显然有 $\langle x,y\rangle=0$. 若 $y\neq 0$，令

$$k=\frac{-\langle x,y\rangle}{\|y\|^2},$$

则有

$$0\leqslant 2\mathrm{Re}\,\bar{k}\langle x,y\rangle+|k|^2\|y\|^2=-2\mathrm{Re}\,\frac{\overline{\langle x,y\rangle}}{\|y\|^2}\langle x,y\rangle+\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^4}\|y\|^2$$
$$=-\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}.$$

这可以推出$\langle x,y\rangle=0$,即(a)成立. ■

问题 5.1.3 设 x,y,z 为内积空间 X 中的元. 求证 **Appolonius 等式**:

$$t\|x-y\|^2+(1-t)\|x-z\|^2=\|x-u\|^2+t(1-t)\|y-z\|^2,$$

其中 $u=ty+(1-t)z,t\in\mathbb{R}$. 由此推出

$$\frac{1}{2}\|x-y\|^2+\frac{1}{2}\|x-z\|^2=\left\|x-\frac{y+z}{2}\right\|^2+\frac{1}{4}\|y-z\|^2.$$

解答 任取 $v,w\in X$ 有

$$\|v+w\|^2=\langle v+w,v+w\rangle=\langle v,v\rangle+\langle v,w\rangle+\langle w,v\rangle+\langle w,w\rangle$$
$$=\|v\|^2+2\mathrm{Re}\langle v,w\rangle+\|w\|^2.$$

因此

$$\|x-y\|^2=\|x-u+u-y\|^2$$
$$=\|x-u\|^2+2\mathrm{Re}\langle x-u,u-y\rangle+\|u-y\|^2 \tag{8}$$
$$\|x-z\|^2=\|x-u\|^2+2\mathrm{Re}\langle x-u,u-z\rangle+\|u-z\|^2. \tag{9}$$

将(8)式乘以 t,(9)式乘以 $1-t$,然后求和得

$$t\|x-y\|^2+(1-t)\|x-z\|^2$$
$$=\|x-u\|^2+t\|u-y\|^2+(1-t)\|u-z\|^2+2t\mathrm{Re}\langle x-u,u-y\rangle$$
$$+2(1-t)\mathrm{Re}\langle x-u,u-z\rangle. \tag{10}$$

由 t 为实数及

$$u-y=(1-t)(z-y),\quad u-z=-t(z-y).$$

有

$$t\langle x-u,u-y\rangle=t(1-t)\langle x-u,z-y\rangle,$$
$$(1-t)\langle x-u,u-z\rangle=-t(1-t)\langle x-u,z-y\rangle.$$

因此,由(10)式得

$$t\|x-y\|^2+(1-t)\|x-z\|^2-\|x-u\|^2$$
$$=t(1-t)^2\|z-y\|^2+(1-t)t^2\|z-y\|^2+0$$
$$=t(1-t)\|z-y\|^2.$$

这样我们就证明了 Appolonius 等式. 要证明第二个等式仅需在 Appolonius 等式中取 $k=\frac{1}{2}$ 即可. ■

问题 5.1.4 设 X 为赋范空间. 求证:

(a) 若 X 的范数满足平行四边形等式,则 X 为内积空间,即 X 的范数可以由一个内积导出.

(b) 若 X 的每一个二维子空间均为内积空间,则 X 也为内积空间.

解答 (a) 若$\mathbb{K}=\mathbb{R}$,令

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\{\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\},$$

若$\mathbb{K}=\mathbb{C}$,定义$\langle x,y\rangle$为

$$\mathrm{Re}\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\{\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\},\tag{11}$$

$$\mathrm{Im}\langle x,y\rangle=\mathrm{Re}\langle x,\mathrm{i}y\rangle.$$

容易验证无论$\mathbb{K}=\mathbb{R}$还是$\mathbb{K}=\mathbb{C}$都有:

$$\langle x,0\rangle=0=\langle 0,y\rangle,\tag{12}$$

$$\mathrm{Re}\langle y,x\rangle=\mathrm{Re}\langle x,y\rangle.\tag{13}$$

若$\mathbb{K}=\mathbb{C}$,则

$$\mathrm{Im}\langle y,x\rangle=\mathrm{Re}\langle y,\mathrm{i}x\rangle=\frac{1}{4}\{\|y+\mathrm{i}x\|^2-\|y-\mathrm{i}x\|^2\}$$

$$=\frac{1}{4}\{\|x-\mathrm{i}y\|^2-\|x+\mathrm{i}y\|^2\}$$

$$=-\mathrm{Re}\langle x,\mathrm{i}y\rangle=-\mathrm{Im}\langle x,y\rangle,$$

从而

$$\langle y,x\rangle=\overline{\langle x,y\rangle}.$$

若$\mathbb{K}=\mathbb{R}$,这与(13)式是相同的. 取 $y=x$,则$\langle x,x\rangle$为实数,从而由(11)式知$\langle x,x\rangle=\|x\|^2$. 仅需证明对于 $x,y,z\in X$ 及 $k\in\mathbb{K}$ 有

$$\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle,\tag{14}$$

$$\langle kx,z\rangle=k\langle x,z\rangle.\tag{15}$$

由平行四边形等式有

$$\left\|\left(x+\frac{z}{2}\right)+\left(y+\frac{z}{2}\right)\right\|^2+\left\|\left(x+\frac{z}{2}\right)-\left(y+\frac{z}{2}\right)\right\|^2=2\left\|x+\frac{z}{2}\right\|^2+2\left\|y+\frac{z}{2}\right\|^2,$$

$$\left\|\left(x-\frac{z}{2}\right)+\left(y-\frac{z}{2}\right)\right\|^2+\left\|\left(x-\frac{z}{2}\right)-\left(y-\frac{z}{2}\right)\right\|^2=2\left\|x-\frac{z}{2}\right\|^2+2\left\|y-\frac{z}{2}\right\|^2.$$

由于(11)式无论$\mathbb{K}=\mathbb{R}$或$\mathbb{C}$均成立,上述两式相减后除 4 得

$$\mathrm{Re}\langle x+y,z\rangle=2\mathrm{Re}\left\langle x,\frac{z}{2}\right\rangle+2\mathrm{Re}\left\langle y,\frac{z}{2}\right\rangle.\tag{16}$$

在上式中取 $x=0$ 或 $y=0$,由(12)式则有

$$\mathrm{Re}\langle x,z\rangle=2\mathrm{Re}\left\langle x,\frac{z}{2}\right\rangle,\qquad\mathrm{Re}\langle y,z\rangle=2\mathrm{Re}\left\langle y,\frac{z}{2}\right\rangle.$$

所以由(16)式知

$$\mathrm{Re}\langle x+y,z\rangle = \mathrm{Re}\langle x,z\rangle + \mathrm{Re}\langle y,z\rangle.$$

若$\mathbb{K}=\mathbb{R}$,这就是(14).若$\mathbb{K}=\mathbb{C}$,用 $\mathrm{i}z$ 代替 z,则有

$$\mathrm{Im}\langle x+y,z\rangle = \mathrm{Im}\langle x,z\rangle + \mathrm{Im}\langle y,z\rangle.$$

因此(14)式在$\mathbb{K}=\mathbb{C}$时也成立.

由(14)式及归纳法知任取正整数 n 有

$$\langle nx,z\rangle = n\langle x,z\rangle. \tag{17}$$

若 $n=0$,由(12)式知上式依然成立.若 $n=-m$ 为负整数,则

$$\langle nx,z\rangle + \langle mx,z\rangle = \langle nx+mx,z\rangle = \langle 0,z\rangle,$$

$$\langle nx,z\rangle + m\langle x,z\rangle = 0.$$

因此对于所有整数 n,(17)式均成立.若 $r=p/q$,其中 p,q 为整数,则

$$q\langle rx,z\rangle = \langle qrx,z\rangle = \langle px,z\rangle = p\langle x,z\rangle,$$

因此$\langle rx,z\rangle = r\langle x,z\rangle$对所有有理数 r 成立.

若 α 为任意实数,存在有理数列$\{r_n\}$,使得 $r_n\to\alpha$.则有 $r_nx\to\alpha x$.利用范数的连续性知

$$\langle r_nx,z\rangle \to \langle \alpha x,z\rangle.$$

但$\langle r_nx,z\rangle = r_n\langle x,z\rangle$,故

$$\langle \alpha x,z\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle r_nx,z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle. \tag{18}$$

若$\mathbb{K}=\mathbb{R}$,则(15)式由上式给出.

若$\mathbb{K}=\mathbb{C}$,则

$$\mathrm{Re}\langle \mathrm{i}x,z\rangle = \mathrm{Re}\langle z,\mathrm{i}x\rangle = \mathrm{Im}\langle z,x\rangle = -\mathrm{Im}\langle x,z\rangle,$$

$$\mathrm{Im}\langle \mathrm{i}x,z\rangle = \mathrm{Re}\langle \mathrm{i}x,\mathrm{i}z\rangle = \mathrm{Re}\langle x,z\rangle,$$

其中最后一个等式是由(11)式得到的.从而

$$\langle \mathrm{i}x,z\rangle = \mathrm{i}\langle x,z\rangle.$$

上式与(14)式及(18)式一起证明了任取 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 则

$$\langle(\alpha+\mathrm{i}\beta)x,z\rangle = (\alpha+\mathrm{i}\beta)\langle x,z\rangle.$$

这就完成了(15)式的证明,因此也就证明了(a).

(b) 若 X 的维数小于 2,则结论是显然成立的.现设 X 的维数大于等于 2.设 x,y 为 X 中任意两个元,则存在 X 的二维子空间 Y 使得 $x,y\in Y$.由假设知 Y 上的范数是由一个内积导出的,因此平行四边形等式在 Y 中成立.从而

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \tag{19}$$

既然 Y 中的范数是由 X 的范数给出的,因此对于 X 中的任意元 x,y,(19)式均成立.由(a)知 X 的范数是由一个内积导出的,即 X 为内积空间. ■

问题 5.1.5 设 Y 为内积空间 X 的闭子空间.求证在商空间 X/Y 上存在一个内积,使得由此内积导出的范数为商范数:

$$\|x+Y\| = \inf\{\|x+y\| : y\in Y\}, \qquad x+Y\in X/Y.$$

解答 设 x_1+Y 及 x_2+Y 为 X/Y 中任意两元. 则存在 Y 中序列 $\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 使得当 $n\to\infty$ 有

$$\|x_1+y_n\|\to\|x_1+Y\|,\quad \|x_2+z_n\|\to\|x_2+Y\|.$$

由 $y_n\pm z_n\in Y$ 知

$$\|x_1+x_2+Y\|\leqslant\|x_1+x_2+y_n+z_n\|,$$
$$\|x_1-x_2+Y\|\leqslant\|x_1-x_2+y_n-z_n\|.$$

因此由 X 中的平行四边形等式有

$$\begin{aligned}\|x_1+x_2+Y\|^2+\|x_1-x_2+Y\|^2&\leqslant\|(x_1+y_n)+(x_2+z_n)\|^2\\&\quad+\|(x_1+y_n)-(x_2+z_n)\|^2\\&=2\|x_1+y_n\|^2+2\|x_2+z_n\|^2.\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$ 得

$$\|x_1+x_2+Y\|^2+\|x_1-x_2+Y\|^2\leqslant 2\|x_1+Y\|^2+2\|x_2+Y\|^2. \tag{20}$$

设 $\{u_n\}$ 及 $\{v_n\}$ 为 Y 中序列使得当 $n\to\infty$ 有

$$\|x_1+x_2+u_n\|\to\|x_1+x_2+Y\|,$$
$$\|x_1-x_2+v_n\|\to\|x_1-x_2+Y\|.$$

由 $\frac{1}{2}(u_n\pm v_n)\in Y$ 及 X 中的平行四边形等式知

$$\begin{aligned}2\|x_1+Y\|^2+2\|x_2+Y\|^2&\leqslant 2\left\|x_1+\frac{u_n+v_n}{2}\right\|^2+2\left\|x_2+\frac{u_n-v_n}{2}\right\|^2\\&=\|x_1+x_2+u_n\|^2+\|x_1-x_2+v_n\|^2.\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$ 得

$$2\|x_1+Y\|^2+2\|x_2+Y\|^2\leqslant\|x_1+x_2+Y\|^2+\|x_1-x_2+Y\|^2. \tag{21}$$

由(20)式及(21)式得

$$\begin{aligned}&\|(x_1+Y)+(x_2+Y)\|^2+\|(x_1+Y)-(x_2+Y)\|^2\\&=2\|x_1+Y\|^2+2\|x_2+Y\|^2.\end{aligned}$$

因此 X/Y 上的商范数满足平行四边形等式. 由问题 5.1.4 知 X/Y 上的商范数是由某个内积导出的. ■

问题 5.1.6 (a) 设 $\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ 为有限维线性空间 X 的基. 求证 X 上的内积由 $k_{ij}=\langle u_i,u_j\rangle$ 唯一确定. 若 $n=2$ 且 X 为实空间,找出一个 2×2 矩阵 (k_{ij}) 要满足的条件使得由 $k_{ij}=\langle u_i,u_j\rangle$ 可以确定 X 上的一个内积.

(b) 求证在任意线性空间上均可以定义一个内积.

解答 (a) X 中任意元 x 均可以唯一地表示为 X 的基的线性组合. 若

$$x=\sum_{i=1}^{n}a_iu_i,\quad y=\sum_{j=1}^{n}b_ju_j,$$

其中 $a_i,b_j\in\mathbb{K}$,则

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \left\langle \boldsymbol{x}, \sum_{j=1}^{n} b_j \boldsymbol{u}_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle \boldsymbol{x}, b_j \boldsymbol{u}_j \rangle,$$

$$\langle \boldsymbol{x}, b_j \boldsymbol{u}_j \rangle = \overline{b}_j \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j \right\rangle = \overline{b}_j \sum_{i=1}^{n} a_i k_{ij},$$

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b}_j k_{ij}.$$

这说明若 k_{ij} 已知，则$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$是唯一确定的.

若 $n=2$ 且 X 为实空间. 给定 2×2 矩阵(k_{ij}). 定义$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$为

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = k_{11} a_1 b_1 + k_{12} a_1 b_2 + k_{21} a_2 b_1 + k_{22} a_2 b_2. \tag{22}$$

其中

$$\boldsymbol{x} = a_1 \boldsymbol{u}_1 + a_2 \boldsymbol{u}_2, \quad \boldsymbol{y} = b_1 \boldsymbol{u}_1 + b_2 \boldsymbol{u}_2.$$

这可以保证内积定义中的前两个性质，即

$$\langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle,$$

$$\langle k\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle = k \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle.$$

要使$\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1 \rangle = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$成立，必须有 $k_{21}=k_{12}$. 另外若假设 $k_{21}=k_{12}$，则由(22)式知对于 X 中的任意元 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 均有$\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$. 因此设 $k_{12}=k_{21}$，则

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = k_{11} a_1^2 + 2k_{12} a_1 a_2 + k_{22} a_2^2.$$

除非 $a_1=a_2=0$，上式应为正数. 取 $a_1=1, a_2=0$ 或 $a_1=0, a_2=1$ 得

$$k_{11} > 0, \quad k_{22} > 0,$$

因此

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \left(\sqrt{k_{11}}\, a_1 + \frac{k_{12}}{\sqrt{k_{11}}} a_2 \right)^2 + \left(k_{22} - \frac{k_{12}^2}{k_{11}} \right) a_2^2.$$

从而$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle > 0$ 对所有 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 成立当且仅当

$$k_{22} - \frac{k_{12}^2}{k_{11}} > 0.$$

因此 2×2 矩阵(k_{ij})可以确定 X 上一个内积的充分必要条件是

$$k_{12} = k_{21}, \quad k_{11} > 0, \quad k_{22} > 0, \quad k_{11} k_{22} > k_{12}^2.$$

(b) 任意线性空间均有基存在. 设 S 为 X 的基. 若

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{u}_i, \quad \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} b_i \boldsymbol{u}_i,$$

其中 $a_i, b_i \in \mathbb{K}$，$\boldsymbol{u}_i \in S$. 令

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b}_i.$$

则上式定义了 X 上一个内积.

问题 5.1.7 若 $p \neq 2$，求证：l^p 上通常的范数不能由 l^p 上某个内积导出.

解答 假设 l^p 上通常的范数是由 l^p 上某一内积导出，则 l^p 上的范数必满足平行四边

形等式. 设 e_1, e_2 为 l^p 中前两个单位向量,则

$$\| e_1 \| = \| e_2 \| = 1,$$

$$e_1 + e_2 = (1,1,0,\cdots), \quad e_1 - e_2 = (1,-1,0,\cdots),$$

$$\| e_1 + e_2 \| = (1+1)^{1/p} = 2^{1/p}, \qquad \| e_1 - e_2 \| = (1+1)^{1/p} = 2^{1/p}.$$

由平行四边形等式有

$$\| e_1 + e_2 \|^2 + \| e_1 - e_2 \|^2 = 2\| e_1 \|^2 + 2\| e_2 \|^2,$$

即 $2^{2/p}+2^{2/p}=2+2$. 因此 $p=2$. 所以若 $p\neq 2$, l^p 上通常的范数不能由 l^p 上某个范数导出. ■

问题 5.1.8 设 X 为由所有次数不大于 2 的实系数多项式及零多项式组成的实线性空间. 设$[a,b]$为一有限区间,令

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t, \quad x, y \in X.$$

设 Y 为所有 X 中的元 x 使得 $x(a)=0$. 求证: X 为完备内积空间, Y 为 X 的子空间. X 中次数为 2 的元组成的集合是否为 X 的子空间?

解答 考虑 Hilbert 空间 $H=L^2[a,b]$,其中$\mathbb{K}=\mathbb{R}$. 则 X 为 H 的一个三维子空间,且 H 在 X 上诱导的内积与 X 上的内积一致. 由于有限维子空间总是闭集,故 X 在 H 中为闭集. 又 H 为完备的,从而 X 为完备的.

若 $x, y\in Y, k\in\mathbb{K}$,则

$$(kx+y)(a) = kx(a) + y(a) = 0,$$

从而 $kx+y\in Y$. 因此 Y 为 X 的子空间.

由于 X 中的零元不是一个次数为 2 的多项式,故最后一问的答案是“否”. ■

问题 5.1.9 设$\{x_n\}$为内积空间 X 中一列元. 求证:

(a) 若$\langle x_n, x\rangle \to \langle x, x\rangle$且 $\| x_n \| \to \| x \|$,则 $x_n \to x$.

(b) 若 $x_n \xrightarrow{w} x$ 且 $\| x_n \| \to \| x \|$,则 $x_n \to x$.

解答 (a) 由于

$$\| x_n - x \|^2 = \langle x_n - x, x_n - x\rangle = \langle x_n, x_n\rangle - \langle x_n, x\rangle - \langle x, x_n\rangle + \langle x, x\rangle,$$

$$\langle x_n, x_n\rangle = \| x_n \|^2 \to \| x \|^2, \qquad \langle x, x_n\rangle = \overline{\langle x_n, x\rangle} \to \langle x, x\rangle,$$

所以

$$\| x_n - x \|^2 \to \| x \|^2 - \langle x, x\rangle - \langle x, x\rangle + \langle x, x\rangle = 0.$$

即 $x_n \to x$.

(b) 设 $z\in X$. 令 $f: X\to\mathbb{K}$ 为

$$f(x) = \langle x, z\rangle, \quad x \in X.$$

则 f 为 X 上的线性泛函且

$$| f(x) | = | \langle x, z\rangle | \leqslant \| z \| \, \| x \|.$$

因此 $f\in X'$. 若 $x_n \xrightarrow{w} x$,则 $f(x_n)\to f(x)$,即$\langle x_n, z\rangle \to \langle x, z\rangle$. 取 $z=x$,则由(a)知 $x_n \to x$. ■

问题 5.1.10 设 D 为$\mathbb{C}$中的域且其边界 Γ 由简单光滑曲线组成. 设 X 为所有函数 $u\in C(D\cup\Gamma)$使得 u 在 D 中有连续有界的偏导数 u_x,u_y. 若 $u,v\in X$,令

$$\langle u,v\rangle=\iint_D(u_x\bar{v}_x+u_y\bar{v}_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_\Gamma u\bar{v}\mathrm{d}s,$$

其中 ds 为弦长度微分. 求证上式定义了 X 上的一个内积.

解答 由于

$$(v+w)_x=u_x+w_x,\quad (u+w)_y=u_y+w_y,\qquad (ku)_x=ku_x,\quad (ku)_y=ku_y,$$

所以有

$$\begin{aligned}\langle u+w,v\rangle&=\iint_D(u_x\bar{v}_x+w_x\bar{v}_x+u_y\bar{v}_y+w_y\bar{v}_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_\Gamma(u\bar{v}+w\bar{v})\mathrm{d}s\\&=\langle u,v\rangle+\langle w,v\rangle,\\\langle ku,v\rangle&=\iint_D(ku_x\bar{v}_x+ku_y\bar{v}_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_\Gamma ku\bar{v}\mathrm{d}s=k\langle u,v\rangle.\end{aligned}$$

我们显然有$\langle v,w\rangle=\overline{\langle w,v\rangle}$. 又

$$\langle u,u\rangle=\iint_D(|u_x|^2+|u_y|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_\Gamma|u|^2\mathrm{d}s.$$

上式显然为非负的. 上式为 0 当且仅当在 D 上 $u_x^2+u_y^2$ 几乎处处为 0 且在 Γ 上 $|u|$ 几乎处处为 0,由于 u_x,u_y 在 D 上连续,u 在 Γ 上连续,这等价于说在 D 上 $u_x=u_y=0$,且在 Γ 上 $u=0$. 又由于 D 为连通的,故在 D 上 $u_x=u_y=0$ 当且仅当在 D 上 $u=0$. 因此

$$\langle u,u\rangle=0\Leftrightarrow\text{在 }D\cup\Gamma\text{ 上 }u=0.$$

■

问题 5.1.11 设 X,Y 为内积空间,$F:X\to Y$ 为线性算子. 求证:任取 $x\in X$ 有

$$\|F(x)\|=\|x\|\tag{23}$$

当且仅当任取 $x_1,x_2\in X$ 有

$$\langle F(x_1),F(x_2)\rangle=\langle x_1,x_2\rangle.\tag{24}$$

解答 由于在(24)式中取 $x_1=x_2=x$ 可以得到(23)式,所以仅需证(23)式⇒(24)式.

假设(23)式成立,令 $y_1=F(x_1),y_2=F(x_2)$. 则

$$\begin{aligned}y_1\pm y_2&=F(x_1\pm x_2),\\4\mathrm{Re}\langle y_1,y_2\rangle&=\|y_1+y_2\|^2-\|y_1-y_2\|^2\\&=\|F(x_1+x_2)\|^2-\|F(x_1-x_2)\|^2\\&=\|x_1+x_2\|^2-\|x_1-x_2\|^2=4\mathrm{Re}\langle x_1,x_2\rangle.\end{aligned}\tag{25}$$

无论数域$\mathbb{K}$为$\mathbb{R}$或$\mathbb{C}$,上式均成立. 若$\mathbb{K}=\mathbb{R}$,则(25)式可以给出(24)式. 若$\mathbb{K}=\mathbb{C}$,则 $\mathrm{i}y_2=F(\mathrm{i}x_2)$,故由(25)式得

$$\mathrm{Im}\langle y_1,y_2\rangle=\mathrm{Re}\langle y_1,\mathrm{i}y_2\rangle=\mathrm{Re}\langle x_1,\mathrm{i}x_2\rangle=\mathrm{Im}\langle x_1,x_2\rangle.$$

上式与(25)式一起给出

$$\langle F(x_1),F(x_2)\rangle=\langle x_1,x_2\rangle.$$

■

问题 5.1.12 设 D 为$\mathbb{C}$中的域且 $A^2(D)$为所有 D 上的解析函数 $f\in L^2(D)$. 求证：
(a) 若在 $L^2(D)$中 $f_n\to f$ 且 $f_n\in A^2(D)$，则在 D 的每一紧子集上 f_n 一致地收敛到 f.
(b) $L^2(D)$上的内积使 $A^2(D)$成为 Hilbert 空间.

解答 (a) 设 $z_0\in D$ 及 $r>0$ 使得

$$E=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|\leqslant r\}\subset D.$$

设 $f\in A^2(D)$，则

$$\iint_E f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^r\int_{-\pi}^{\pi}f(z_0+te^{i\theta})t\mathrm{d}t\mathrm{d}\theta.$$

由平均值性质，对于 $0\leqslant t\leqslant r$ 有

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(z_0+te^{i\theta})\mathrm{d}\theta.$$

从而若 $\mathrm{d}\mu=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则

$$\iint_E f(z)\mathrm{d}\mu=\int_0^r t2\pi f(z_0)\mathrm{d}t=\pi r^2 f(z_0). \tag{26}$$

利用 Schwarz 不等式，有

$$\left|\int_E f\mathrm{d}\mu\right|\leqslant\left(\int_E|f|^2\mathrm{d}\mu\right)^{1/2}\left(\int_E 1\mathrm{d}\mu\right)^{1/2}$$

$$\leqslant\left(\int_D|f|^2\mathrm{d}\mu\right)^{1/2}(\mu(E))^{1/2}=\|f\|(\pi r^2)^{1/2}. \tag{27}$$

由(26)式及(27)式得

$$|f(z_0)|\leqslant\frac{\|f\|}{\sqrt{\pi}r}. \tag{28}$$

上式对所有满足

$$\|z-z_0\|\leqslant r\Rightarrow z\in D \tag{29}$$

的 $r>0$ 均成立.

设 f_n 为 $A^2(D)$中一列元且在 $L^2(D)$中 $f_n\to f$. 设 S 为 D 的紧子集，又设 ρ 为从 S 到 D 的余集的距离. 则 $\rho>0$. 若 $0<r<\rho$ 且 z_0 为 S 中任意一点，则(29)式成立. 从而若在(28)式中用 f_n-f_m 代替 f，则有

$$|f_n(z_0)-f_m(z_0)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi}r}\|f_n-f_m\|.$$

由于 r 与 n,m 及 $z_0\in S$ 无关，这就证明了$\{f_n\}$满足关于一致收敛性的柯西准则. 这就证明了(a).

(b) 我们知道若 f_n 在 D 的任意紧子集上一致收敛到 f 且每一个 f_n 均在 D 上解析，则 f 也在 D 上解析. 从而(a)中的极限 f 属于 $A^2(D)$. 因此由(a)知 $A^2(D)$为 $L^2(D)$的闭子空间. 由于 $L^2(D)$为 Hilbert 空间，所以 $A^2(D)$也为 Hilbert 空间. ■

问题 5.1.13 设 m 为正整数，X 为所有$[a,b]$上的纯量函数 x，使得 x 的 $m-1$ 阶导数

$x^{(m-1)}$ 在 $[a,b]$ 上为绝对连续的且 x 的 m 阶导数 $x^{(m)}$ 属于 $L^2[a,b]$. 若 $x,y\in X$, 令

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=0}^{m}\int_a^b x^{(i)}(t)\,\overline{y^{(i)}(t)}\,\mathrm{d}t.$$

求证:

(a) 上式定义了 X 上的一个内积且在这个内积意义下 X 为 Hilbert 空间.

(b) $C^m[a,b]$ 在 X 为稠密的.

解答 (a) 对于 $x\in X$, 有

$$\langle x,x\rangle = \sum_{i=0}^{m}\int_a^b |x^{(i)}(t)|^2\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{m}\|x^{(i)}\|_2^2. \tag{30}$$

从而 $\langle x,x\rangle\geqslant 0$ 且 $\langle x,x\rangle=0$ 仅在 $\|x\|_2=\|x^{(0)}\|_2=0$ 时成立, 即仅在 x 几乎处处为 0 时成立. 由于 x 为连续函数, 所以 $\langle x,x\rangle=0\Leftrightarrow x=0$. 内积定义中的其他性质很容易从 $\langle x,y\rangle$ 的定义得到.

为证 X 为完备的, 假设 $\{x_n\}$ 为 X 中的柯西列, 由(30)式知对于 $0\leqslant i\leqslant m$ 有

$$\|x_n-x_r\|^2 \geqslant \|x_n^{(i)}-x_r^{(i)}\|_2^2.$$

这说明 $\{x_n^{(i)}\}$ 为 $L^2[a,b]$ 的柯西列. 由于 $L^2[a,b]$ 为完备的, 所以存在 $y_i\in L^2[a,b]$ 使得在 $L^2[a,b]$ 有 $x_n^{(i)}\to y_i$.

若 $x\in L^2[a,b]$, 由 Schwarz 不等式有

$$\int_a^b |x|\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_a^b |x|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_a^b 1\mathrm{d}t\right)^{1/2}. \tag{31}$$

因此 $x\in L^1[a,b]$ 且在 $L^2[a,b]$ 的收敛性可以推出在 $L^1[a,b]$ 中的收敛性.

由于 $\{x_n^{(i)}\}$ 在 $L^2[a,b]$ 中收敛到 y_i, 它的某个子列几乎处处收敛到 y_i. 因此, 对于每一个 i, 存在 $c_i\in[a,b]$ 使得 $\{x_n^{(i)}(c_i)\}$ 的某一子列收敛到 $y_i(c_i)$. 逐次定义 $z_m,z_{m-1},\cdots,z_0$ 为

$$z_m = y_m,$$

$$z_i(t) = y_i(c_i)+\int_a^t z_{i+1}(s)\mathrm{d}s-\int_a^{c_i} z_{i+1}(s)\mathrm{d}s,\quad 0\leqslant i\leqslant m-1. \tag{32}$$

由于对于 $0\leqslant i\leqslant m-1$ 有

$$x_n^{(i)}(t) = x_n^{(i)}(c_i)+\int_a^t x_n^{(i+1)}(s)\mathrm{d}s-\int_a^{c_i} x_n^{(i+1)}(s)\mathrm{d}s,$$

所以利用(32)式得

$$\begin{aligned}|x_n^{(i)}(t)-x_n^{(i)}(c_i)-z_i(t)+y_i(c_i)| &\leqslant \int_a^t |x_n^{(i+1)}-z_{i+1}|\,\mathrm{d}s+\int_a^{c_i}|x_n^{(i+1)}-z_{i+1}|\,\mathrm{d}s\\ &\leqslant 2\|x_n^{(i+1)}-z_{i+1}\|_1.\end{aligned}$$

假设 z_{i+1} 与 y_{i+1} 几乎处处相等, 这在 $i=m-1$ 时是成立的. 则当 $n\to\infty$ 时, 有

$$\|x_n^{(i+1)}-z_{i+1}\|_1\to 0,\qquad x_n^{(i)}-x_n^{(i)}(c_i)\to z_i(t)-y_i(c_i),$$

且上式为一致收敛的, 从而也在 $L^2[a,b]$ 中收敛. 但 $\{x_n^{(i)}(c_i)\}$ 有一子列 $\{x_{n_j}^{(i)}(c_i)\}$ 收敛到 $y_i(c_i)$, 故若令 $n_j\to\infty$, 则

$$y_i - y_i(c_i) = z_i - y_i(c_i)$$

几乎处处成立. 由此推知对于 $i=m,m-1,\cdots,0$, $y_i=z_i$ 几乎处处成立.

进一步地,由(32)式知 z_i 在$[a,b]$上为绝对连续的且对 $0\leqslant i\leqslant m-1$, $z_i'=z_{i+1}$ 几乎处处成立. 因此,若 z_{i+1} 为连续的,则 $z_i'=z_{i+1}$. 从而当 $i+1\leqslant m-1$ 时, $z_i'=z_{i+1}$. 由此推知对于 $i=0,1,\cdots,m-1$ 有 $z_0^{(i)}=z_i$ 且 $z_0^{(m)}=z_m$ 几乎处处成立. 设 $x=z_0$,则 $x\in X$ 且对于 $i=0,1,\cdots,m$ 有

$$x^{(i)} = z_i = y_i$$

几乎处处成立. 由(30)式有当 $n\to\infty$时,

$$\| x_n - x \|^2 = \sum_{i=0}^{m} \| x_n^{(i)} - x^{(i)} \|_2^2 = \sum_{i=0}^{m} \| x_n^{(i)} - y_i \|_2^2 \to 0.$$

这就证明了 X 为完备的.

(b) 设 $x\in X$ 及 $\varepsilon>0$ 给定. 由于连续函数在 $L^2[a,b]$中稠密且 $x^{(m)}\in L^2[a,b]$,则存在 $y\in C[a,b]$使得

$$\| x^{(m)} - y \|_2 < \varepsilon.$$

令 $y_0=y$ 及

$$y_j(t) = x^{(m-j)}(a) + \int_a^t y_{j-1}(s)\mathrm{d}s, \quad 1\leqslant j\leqslant m.$$

设 $z=y_m$,则 $y_j'=y_{j-1}$,从而

$$y = y_0 = y_1' = y_2'' = \cdots = y_m^{(m)} = z^{(m)}.$$

因此 $z\in C^m[a,b]$且

$$\| x^{(m)} - z^{(m)} \|_2 = \| x^{(m)} - y \|_2 < \varepsilon. \tag{33}$$

由于

$$x^{(j-1)}(a) = y_{m-j+1}(a) = z^{(j-1)}(a),$$

由(31)式有

$$\begin{aligned} | x^{(j-1)}(t) - z^{(j-1)}(t) | &= \left| \int_a^t x^{(j)}(s)\mathrm{d}s - \int_a^t z^{(j)}(s)\mathrm{d}s \right| \leqslant \int_a^b | x^{(j)}(s) - z^{(j)}(s) | \mathrm{d}s \\ &\leqslant \| x^{(j)} - z^{(j)} \|_2 (b-a)^{1/2}. \end{aligned}$$

因此

$$\| x^{(j-1)} - z^{(j-1)} \|_2^2 \leqslant \| x^{(j)} - z^{(j)} \|_2^2 (b-a)^2.$$

上式对 $1\leqslant j\leqslant m$ 均成立. 重复利用上式及(33)式可以得到

$$\| x^{(i)} - z^{(i)} \|_2 \leqslant \| x^{(m)} - z^{(m)} \|_2 (b-a)^{m-i} < \varepsilon(b-a)^{m-i}.$$

因此由(30)式有

$$\| x - z \|^2 = \sum_{i=0}^{m} \| x^{(i)} - z^{(i)} \|_2^2 < \varepsilon^2 \sum_{i=0}^{m} (b-a)^{2(m-i)}.$$

由于 $\varepsilon>0$ 为任取的,这就完成了(b)的证明. ■

问题 5.1.14 设 S 为非空集合,$l^2(S)$为所有 S 上的纯量函数 x 满足:

(i) $\{s\in S: x(s)\neq 0\}$为可数集且

(ii) $\sum\limits_{s\in S} |x(s)|^2 < \infty$.

若 $x,y\in l^2(S)$,令

$$\langle x,y\rangle = \sum_{s\in S} x(s)\,\overline{y(s)}. \tag{34}$$

求证:$l^2(S)$为 Hilbert 空间.

解答 设 $x,y,z\in l^2(S)$. 由于三个可数集的并集仍为可数集,所以存在 S 中一列元$\{t_i\}$使得若 s 不在此序列中,则有

$$x(s) = y(s) = z(s) = 0.$$

利用关于序列的 Schwarz 不等式有

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x(t_i)\,\overline{y(t_i)}| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x(t_i)|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\overline{y(t_i)}|^2\right)^{1/2} < \infty.$$

这就证明了

$$\sum_{s\in S} x(s)\,\overline{y(s)} = \sum_{i=1}^{\infty} x(t_i)\,\overline{y(t_i)}$$

在数域$\mathbb{K}$ 中存在. 显然有$\langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle}$且若 $x\neq 0$ 有

$$\langle x,x\rangle > 0.$$

由于

$$\sum_{i=1}^{\infty}(kx(t_i)+y(t_i))\,\overline{z(t_i)} = k\sum_{i=1}^{\infty} x(t_i)\,\overline{z(t_i)} + \sum_{i=1}^{\infty} y(t_i)\,\overline{z(t_i)},$$

我们有

$$\sum_{s\in S}(kx(s)+y(s))\,\overline{z(s)} = k\sum_{s\in S} x(s)\,\overline{z(s)} + \sum_{s\in S} y(s)\,\overline{z(s)}.$$

因此

$$\langle kx+y,z\rangle = k\langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle.$$

进一步地,若任取 $i,s\neq t_i$,则有

$$kx(s)+y(s) = 0,$$

且任取 $s\in S$ 有

$$|kx(s)+y(s)|^2 = |kx(s)|^2 + kx(s)\,\overline{y(s)} + \overline{kx(s)}y(s) + |y(s)|^2.$$

从而

$$\sum_{s\in S} |kx(s)+y(s)|^2 < \infty.$$

这说明 $kx+y\in l^2(S)$. 由于 x,y,z 为任取的,这就证明了 $l^2(S)$为线性空间且(34)式定义了 $l^2(S)$上的内积.

为证 $l^2(S)$为完备的,令$\{x_n\}$为其中的一个柯西列. 设当 $n,m\geqslant n_0$ 时有

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

由于可数个可数集的并集仍为可数集，所以存在 S 中的一列元$\{s_i\}$使得任取 $n\geqslant 1$ 及不在此序列中 S 中的元 s，都有 $x_n(s)=0$. 设 j 为某一正整数，则若 $N\geqslant j$ 且 $n,m\geqslant n_0$，有

$$|x_n(s_j)-x_m(s_j)|^2\leqslant\sum_{i=1}^{N}|x_n(s_i)-x_m(s_i)|^2\leqslant\sum_{s\in S}|x_n(s)-x_m(s)|^2$$
$$=\|x_n-x_m\|^2<\varepsilon^2. \tag{35}$$

这说明$\{x_n(s_j):n\geqslant 1\}$为纯量柯西列. 因此对每一个 $j\geqslant 1$ 有

$$\lim_{n\to\infty}x_n(s_j)=x(s_j).$$

若 $s\in S$ 不在序列$\{s_i\}$中，则令 $x(s)=0$. 则任取 $s\in S$ 都有

$$x_n(s)\to x(s).$$

在(35)式中取定 n 和 N，再令 $m\to\infty$有

$$\sum_{i=1}^{N}|x_n(s_i)-x(s_i)|^2\leqslant\varepsilon^2$$

对 $n\geqslant n_0$ 成立. 在上式中令 $N\to\infty$有

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_n(s_i)-x(s_i)|^2\leqslant\varepsilon^2$$

对 $n\geqslant n_0$ 成立. 因此

$$\sum_{s\in S}|x_n(s)-x(s)|^2\leqslant\varepsilon^2$$

对 $n\geqslant n_0$ 成立. 由此推知 $x_n-x\in l^2(S)$且当 $n\geqslant n_0$ 时

$$\|x_n-x\|\leqslant\varepsilon.$$

因此 $x=x_n-(x_n-x)\in l^2(S)$且在 $l^2(S)$中 $x_n\to x$. 因此 $l^2(S)$为完备的. ■

问题 5.1.15 设 $X=C[a,b]$，若 $x,y\in X$，令

$$\langle x,y\rangle_0=\int_a^b\int_a^b x(s)\,\overline{y(t)}\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$

$$\langle x,y\rangle=\int_a^b\int_a^b\frac{\sin(s-t)}{s-t}x(s)\,\overline{y(t)}\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

求证：$\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ 不是 X 上的内积，$\langle\cdot,\cdot\rangle$为 X 上的内积.

解答：很容易可以找到$[a,b]$上的非零连续函数 x 使得

$$\int_a^b x(s)\mathrm{d}s=0.$$

对于这个 x 我们有$\langle x,x\rangle_0=0$. 这说明$\langle\cdot,\cdot\rangle$不为 X 上的内积.

由积分的线性性，易知

$$\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle,\qquad\langle kx,y\rangle=k\langle x,y\rangle,$$

其中 $x,y,z\in X,k\in\mathbb{K}$. 易证$\langle y,x\rangle=\overline{\langle x,y\rangle}$.

为证$\langle\cdot,\cdot\rangle$为 X 上的内积，仅需证$\langle x,x\rangle\geqslant 0$ 且$\langle x,x\rangle=0$ 当且仅当 $x=0$. 由于

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta u}\mathrm{d}u=2\,\frac{\sin\theta}{\theta},$$

所以

$$\begin{aligned}\langle x,x\rangle &= \int_a^b\int_a^b x(s)\,\overline{x(t)}\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(s-t)u}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\int_a^b x(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}su}\,\mathrm{d}s\int_a^b\overline{x(t)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tu}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mid z(u)\mid^2\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

其中

$$z(u)=\int_a^b x(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}su}\,\mathrm{d}s.$$

这就证明了任取 $x\in X$ 都有 $\langle x,x\rangle\geqslant 0$ 且 $\langle x,x\rangle=0$ 当且仅当在 $[-1,1]$ 上 z 几乎处处为 0. 我们有

$$\mid \mathrm{e}^{\mathrm{i}su}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}sv}\mid=\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}sv}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(u-v)}-1}{s(u-v)}s(u-v)\right|\leqslant M\mid u-v\mid,$$

这是由于

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1}{\theta}\right|=\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\,\frac{2\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}}{\theta}\right|\leqslant 1$$

对所有的 $\theta\in\mathbb{R}$ 成立. 因此

$$\mid z(u)-z(v)\mid=\left|\int_a^b x(s)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}su}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}sv})\mathrm{d}s\right|\leqslant M\mid u-v\mid\int_a^b\mid x(s)\mid\mathrm{d}s.$$

这就证明了 z 在 $[-1,1]$ 上为一致连续的. 从而由 z 在 $[-1,1]$ 上几乎处处为 0 可以推知任取 $-1<u<1$ 有 $z(u)=0$. 因此它的导数 $z',z'',\cdots$ 也在 $(-1,1)$ 上为 0. 由于

$$z^{(n)}(u)=\int_a^b x(s)(\mathrm{i}s)^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}su}\,\mathrm{d}s,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

我们有

$$\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\right)^n z^{(n)}(0)=\int_a^b s^n x(s)\mathrm{d}s=0$$

对 $n=0,1,2,\cdots$ 成立. 若 $p(t)$ 为任意多项式,则有

$$\int_a^b p(t)x(t)\mathrm{d}t=0.$$

若 $x\in X$,则 x 在 $[a,b]$ 上连续. 因此存在一列多项式 $p_n(t)$ 使得在 $[a,b]$ 上 $p_n(t)$ 一致地收敛到 $x(t)$. 从而在 $[a,b]$ 上 $p_n(t)x$ 一致地收敛到 $|x|^2$. 从而

$$\int_a^b\mid x(t)\mid^2\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\int_a^b p_n(t)x(t)\mathrm{d}t=0.$$

这说明 x 几乎处处为 0. 但由于 x 为连续函数,故任取 $t\in[a,b]$ 有 $x(t)=0$. 这就完成了证明. ■

问题 5.1.16 设 Y 为内积空间 X 的子空间,求证:

(a) $y\in Y$ 为 x 在 Y 上的最佳逼近元当且仅当 $x-y\perp Y$.

(b) 若 x 在 Y 上的最佳逼近元存在,则它必是唯一的.

解答:(a) 假设 $x-y\perp Y$,任取 $z\in Y$,则有 $y-z\in Y$ 且 $x-y\perp y-z$. 从此由勾股定理知

$$\begin{aligned}\|x-z\|^2&=\|(x-y)+(y-z)\|^2\\&=\|x-y\|^2+\|y-z\|^2\\&\geqslant\|x-y\|^2.\end{aligned}\tag{36}$$

这说明 y 为 x 在 Y 上的最佳逼近元.

反之,若 y 为 x 在 Y 上的最佳逼近元,对任意的 $z\in Y$,若 $z\neq 0$,令

$$k=\frac{\langle x-y,z\rangle}{\|z\|^2}.$$

由 $y+kz\in Y$ 得

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2\leqslant\|x-y-kz\|^2&=\langle x-y-kz,x-y-kz\rangle\\&=\langle x-y,x-y\rangle-\bar{k}\langle x-y,z\rangle-k\langle z,x-y\rangle+k\bar{k}\langle z,z\rangle\\&=\|x-y\|^2-k\bar{k}\|z\|^2-k\bar{k}\|z\|^2+k\bar{k}\|z\|^2.\end{aligned}$$

从而

$$\|x-y\|^2\leqslant\|x-y\|^2-|k|^2\|z\|^2,$$

由此推知 $|k|^2\|z\|^2\leqslant 0$. 因此 $k=0$,即 $\langle x-y,z\rangle=0$. 又当 $z=0$ 时显然有 $\langle x-y,z\rangle=0$,故任取 $z\in Y$ 均有 $\langle x-y,z\rangle=0$. 这就说明 $x-y\perp Y$.

(b) 设 y 为 x 在 Y 上的一个最佳逼近元,则有 $x-y\perp Y$. 由(36)式知任取 $z\in Y$,$z\neq y$,有

$$\|x-z\|^2>\|x-y\|^2.$$

从而不会有另外一个 x 在 Y 上的最佳逼近元存在. ■

问题 5.1.17 求证 $L^2[-\pi,\pi]$ 中使得 $\|x\|_2$ 最小且满足

$$\int_{-\pi}^{\pi}x(t)t\mathrm{d}t=1,\quad\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\sin t\mathrm{d}t=2$$

的元 x 由下式给出:

$$x(t)=\frac{1}{\pi(6-\pi^2)}\left[\frac{9t}{2}+(3-2\pi^2)\sin t\right].$$

解答 令 $x_1(t)=t,x_2(t)=\sin t,x=ax_1+bx_2$,其中

$$a=\frac{9}{2\pi(6-\pi^2)},\quad b=\frac{3-2\pi^2}{\pi(6-\pi^2)}.$$

则

$$\langle x_1,x_1\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}x_1(t)\,\overline{x_1(t)}\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}t^2\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\pi^3,$$

$$\langle x_2,x_1\rangle=\langle x_1,x_2\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}t\sin t\mathrm{d}t=2\pi,$$

$$\langle x_2, x_2\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t\mathrm{d}t = \pi.$$

因此利用 a,b 给定的值得

$$\langle x, x_1\rangle = a\langle x_1, x_1\rangle + b\langle x_2, x_1\rangle = 1,$$
$$\langle x, x_2\rangle = a\langle x_1, x_2\rangle + b\langle x_2, x_2\rangle = 2.$$

故 x 满足条件

$$\int_{-\pi}^{\pi} x(t)t\mathrm{d}t = 1, \quad \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin t\mathrm{d}t = 2.$$

现设 $y\in L^2[-\pi,\pi]$为任意一元也满足上式,即

$$\langle y, x_1\rangle = 1, \quad \langle y, x_2\rangle = 2. \tag{37}$$

则

$$\langle y-x, x_1\rangle = 0 = \langle y-x, x_2\rangle.$$

因此由勾股定理知

$$\langle x, y-x\rangle = a\langle x_1, y-x\rangle + b(x_2, y-x) = 0,$$
$$\|y\|^2 = \|x+(y-x)\|^2 = \|x\|^2 + \|y-x\|^2.$$

这就证明了 $\|y\|\geqslant\|x\|$,即任取 $y\in L^2[-\pi,\pi]$满足(37)式,都有 $\|x\|_2\leqslant\|y\|_2$. ■

问题 5.1.18 设 X 为内积空间,x_1 为 X 的非零元且 c 为一纯量. 求证:X 中使得 $\langle x,x\rangle$最小且满足$\langle x,x_1\rangle=c$ 的元 x 由 $cx_1/\langle x_1,x_1\rangle$给出.

解答 令 $y=c_1x_1$,其中

$$c_1 = c/\langle x_1, x_1\rangle.$$

则

$$\langle y, x_1\rangle = \langle c_1x_1, x_1\rangle = c_1\langle x_1, x_1\rangle = c.$$

现设 x 为 X 任意元满足$\langle x,x_1\rangle=c$,则

$$\langle x-y, x_1\rangle = \langle x, x_1\rangle - \langle y, x_1\rangle = 0.$$

因此由勾股定理有

$$\langle x-y, y\rangle = \langle x-y, c_1x_1\rangle = 0,$$
$$\|x\|^2 = \|(x-y)+y\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y\|^2 \geqslant \|y\|^2.$$

从而任取 X 中元 x 满足$\langle x,x_1\rangle=c$ 均有 $\|y\|^2\leqslant\|x\|^2$. ■

问题 5.1.19 设 H 为 Hilbert 空间,E 为 H 的非空闭凸子集. 求证:对于 H 中任意元 x,均存在唯一的 $y\in E$ 使得任取 $z\in E$ 有

$$\|x-y\| \leqslant \|x-z\|.$$

由此推出若 F 为 H 的闭子空间,则存在唯一的 x 在 F 上的最佳逼近元.

解答:令 $d=\inf\{\|x-z\|:z\in E\}$,则存在 E 中一列元$\{z_n\}$使得当 $n\to\infty$时有 $\|x-z_n\|\to d$. 由 E 为凸子集知$\frac{1}{2}(z_n+z_m)\in E$ 对所有 n,m 成立. 从而

$$\left\| x-\frac{1}{2}(z_n+z_m)\right\| \geqslant d,$$

$$\| (x-z_n)+(x-z_m) \|^2 \geqslant 4d^2.$$

在上式左边加上 $\| (x-z_n)-(x-z_m) \|^2$，再利用平行四边形等式得

$$2\| x-z_n \|^2+2\| x-z_m \|^2 \geqslant 4d^2+\| z_m-z_n \|^2$$

对所有的 n,m 成立. 由于当 m 和 n 收敛到∞时，上式左侧收敛到 $4d^2$，所以$\{z_n\}$为 H 中的柯西列. 又由于 H 为完备的，故存在 $y\in H$ 使得 $z_n\to y$. 但 E 为 H 的闭子集且 $z_n\in E$，故 $y\in E$. 因此

$$\inf\{\| x-z \| : z\in E\}=d=\lim_{n\to\infty}\| x-z_n \| = \| x-y \|.$$

这表明任取 $z\in E$，均有 $\| x-y \|\leqslant \| x-z \|$.

为证唯一性，假定 $y_1\in E$ 使得任取 $z\in E$ 有

$$\| x-y_1 \| \leqslant \| x-z \|.$$

则有 $\| x-y_1 \|=\| x-y \|$. 因而由平行四边形等式知

$$\begin{aligned}&\| (x-y)+(x-y_1) \|^2+\| (x-y)-(x-y_1) \|^2\\ &=2\| x-y \|^2+2\| x-y_1 \|^2=4\| x-y \|^2.\end{aligned}$$

从而

$$\left\| x-\frac{y_1+y}{2}\right\|^2+\left\| \frac{y_1-y}{2}\right\|^2=\| x-y \|^2\leqslant\left\| x-\frac{y_1+y}{2}\right\|^2,$$

在上式中用到了$(y+y_1)/2\in E$ 这个事实. 这就证明了 $y=y_1$. 这就证明了第一部分.

第二部分可以由第一部分直接推出，事实上，H 的每一子空间均为非空凸子集. ■

问题 5.1.20 设 $X=\mathbb{R}^n$，其上赋予欧几里得范数. 令

$$E=\left\{ x\in\mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n}\alpha_j x(j)=1\right\},$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为固定的实数且其中至少有一个非零. 求证：E 中存在唯一范数最小的元，并求这个元.

解答 若

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x(j),\quad x\in X,$$

则 $f:X\to\mathbb{R}$ 为有界线性算子且 $E=\{x\in X: f(x)=1\}$. 这说明 E 为 $X=\mathbb{R}^n$ 的闭凸子集. 从而由问题 5.1.19，存在唯一的 $y\in E$ 使得任取 $z\in E$ 有

$$\| \mathbf{0}-\mathbf{y} \|\leqslant \| \mathbf{0}-\mathbf{z} \|,$$

即 $\mathbf{y}$ 为 E 中范数最小元.

为了求出 $\mathbf{y}$，设 c 由下式给出

$$c\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^2=1,$$

且 $y(j)=ca_j$, $1\leqslant j\leqslant n$. 则

$$\sum_{j=1}^{n}a_jy(j)=\sum_{j=1}^{n}ca_j^2=1.$$

因此 $y\in E$. 任取 $z\in E$ 有

$$\langle y,z\rangle=\sum_{j=1}^{n}y(j)z(j)=c\sum_{j=1}^{n}a_jz(j)=c.$$

特别地有 $\langle y,y\rangle=c$, 因而 $\langle y,y-z\rangle=\langle y,y\rangle-\langle y,z\rangle=0$. 因此由勾股定理有

$$\|z\|^2=\|z-y+y\|^2=\|z-y\|^2+\|y\|^2\geqslant\|y\|^2.$$

这说明任给 $z\in E$, 都有 $\|y\|\leqslant\|z\|$. 从而 $y=c(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 为所求元. ■

问题 5.1.21 设 E 为 Hilbert 空间 H 的非空闭凸子集且 $x\in H$. 求证 $y\in E$ 为 x 在 E 上的最佳逼近元当且仅当任取 $z\in E$ 有

$$\mathrm{Re}\langle x-y,z\rangle\leqslant\mathrm{Re}\langle x-y,y\rangle.$$

解答 考虑 E 中任意两元 y 和 z. 令

$$y_t=(1-t)y+tz=y+t(z-y),\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

则

$$\begin{aligned}\|x-y_t\|^2&=\langle x-y+t(y-z),x-y+t(y-z)\rangle\\&=\langle x-y,x-y\rangle+t\langle x-y,y-z\rangle\\&\quad+t\langle y-z,x-y\rangle+t^2\langle y-z,y-z\rangle.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\|x-y_t\|^2&=t^2\|y-z\|^2+2t\mathrm{Re}\langle x-y,y-z\rangle+\|x-y\|^2\\&=at^2+2bt+c,\end{aligned}\tag{38}$$

其中

$$a=\|y-z\|^2,\quad c=\|x-y\|^2,$$

$$b=\mathrm{Re}\langle x-y,y-z\rangle=\mathrm{Re}\langle x-y,y\rangle-\mathrm{Re}\langle x-y,z\rangle.$$

现假设 y 为 x 在 E 上的最佳逼近元, 我们需要证明 $b\geqslant 0$. 若 $b<0$, 则可以选取 $0<t<1$ 足够小使得 $at+2b<0$. 从而对某个 $0<t<1$, 有 $at^2+2bt<0$, 从而由(38)式知

$$\|x-y_t\|^2=at^2+2bt+c<c=\|x-y\|^2.\tag{39}$$

但由于 E 为凸子集, 故对于 $0<t<1$ 有 $y_t\in E$. 因此(39)式与 y 是 x 在 E 上的最佳逼近元矛盾. 这说明 $b\geqslant 0$.

反之, 假设 $y\in E$ 使得任取 $z\in E$ 有

$$\mathrm{Re}\langle x-y,y-z\rangle\geqslant 0.$$

在(38)式中取 $t=1$ 得

$$\|x-z\|^2=\|y-z\|^2+2\mathrm{Re}\langle x-y,y-z\rangle+\|x-y\|^2\geqslant\|x-y\|^2$$

对任意的 $z\in E$ 成立. 因此 y 为 x 在 E 上的最佳逼近元. ■

问题 5.1.22 设 Y 为 Hilbert 空间 H 的真闭子空间. 求证: 存在 $x_1\in H$ 使得 $\|x_1\|=$

1 且 $d(x_1,Y)=1$.

解答 设 $x\in H$ 且 $x\notin Y$. 由问题 5.1.19 知存在一个 x 在 Y 上的最佳逼近元,设为 y. 则由于 $x\notin Y$ 有 $x\neq y$. 令

$$x_1=\frac{x-y}{\|x-y\|}.$$

则 $\|x_1\|=1$. 任取 $z\in Y$ 有

$$\|x_1-z\|=\left\|\frac{x-y}{\|x-y\|}-z\right\|=\frac{1}{\|x-y\|}\|x-y_1\|,$$

其中 $y_1=y+\|x-y\|z$. 由于 y 为 x 在 Y 上的最佳逼近元及 $y_1\in Y$,必有

$$\|x_1-z\|=\frac{\|x-y_1\|}{\|x-y\|}\geqslant 1.$$

因为上式对 Y 中任意元 z 均成立,故有 $d(x_1,Y)\geqslant 1$. 但 $\|x_1-0\|=1$ 及 $0\in Y$,故有 $d(x_1,Y)=1$. ■

5.2 标准正交集

设 X 为内积空间,X 的非空子集 S 称为**正交集**,若任取 S 中两个不同元 x,y,均有 $\langle x,y\rangle=0$. 若 S 为正交集且 S 中任意元的范数均为 1,则称 S 为**标准正交集**. X 中的极大标准正交集称为**标准正交基**,或**完全标准正交集**,也称为**完备标准正交集**. 换言之,一个标准正交集为完全的,如果不存在严格包含它的标准正交集.

标准正交集的子集必为标准正交集. 每一由非零元组成的正交集必是线性无关的.

l^2 中的单位向量 $e_1,e_2,\cdots$ 为 l^2 的标准正交集. 集合

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}:n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\right\},\qquad\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt:n=1,2,\cdots\right\}$$

均为 $L^2[-\pi,\pi]$的标准正交集.

给定线性无关的元素 $x_1,x_2,x_3,\cdots$,我们可以找到标准正交序列 $u_1,u_2,\cdots$使得

$$\operatorname{span}\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}=\operatorname{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\},\quad n=1,2,\cdots$$

其构造过程称为 Gram-Schmidt **标准正交化方法**,其构造过程由下面给出:

令 $y_1=x_1,u_1=y_1/\|y_1\|$. 若 $u_1,u_2,\cdots,u_{n-1}$ 已找到,则令

$$y_n=x_n-\sum_{i=1}^{n}\langle x_n,u_i\rangle u_i,\quad u_n=\frac{y_n}{\|y_n\|}.$$

这个构造方法将在问题 5.2.3 及问题 5.2.4 中举例说明.

若$\{u_n\}$为可数标准正交集,则任取 $x\in X$,有

$$\sum_{n\geqslant 1}|\langle x,u_n\rangle|^2\leqslant\|x\|^2.$$

上式被称为 **Bessel 不等式**. 若 E 为标准正交集,则任取 $x\in X$,集合

$$E_x = \{u \in E : \langle x, u\rangle \neq 0\}$$

为可数集.

Riesz-Fischer 定理断言：若$\{u_n\}$为 Hilbert 空间 H 的标准正交序列，且$\{k_n\}$为纯量序列使得$\sum |k_n|^2 < \infty$，则$\sum k_n u_n$ 在 H 中收敛.

设 E 为 Hilbert 空间 H 的标准正交基，则任取 H 中元 x，都有

(i) Fourier 展开式：$x = \sum_{u\in E} \langle x, u\rangle u$.

(ii) Parseval 公式：$\|x\|^2 = \sum_{u\in E} |\langle x, u\rangle|^2$.

(iii) 对任意的 $u\in E$ 都有$\langle x, u\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

若 E 为标准正交集，但不为标准正交基，则存在 $x\neq 0$ 使得任给 $u\in E$，$\langle x, u\rangle = 0$. 因此(i)，(ii)(iii)在这种情形是不成立的.

每一非零 Hilbert 空间必有标准正交基. 为了不讨论平凡情形，我们将总是假设每一个 Hilbert 空间均包含非零元. 一个 Hilbert 空间为可分的当且仅当它有可数的标准正交基(见问题 5.2.11 及问题 5.2.13).

若$\{u_n\}$为 Hilbert 空间 H 的标准正交序列，F 为 span$\{u_1, u_2, \cdots\}$的闭包，则 H 中任一元 x 在 F 上的最佳逼近元由下式给出

$$y = \sum \langle x, u_n\rangle u_n.$$

练习

1. 考虑内积空间 $X = \mathbb{R}^3$. 设 $x_1 = (1,1,0)$，$x_2 = (1,0,0)$及 $x_3 = (1,1,1)$. 求证 x_1, x_2, x_3 为线性无关的. 用 Gram-Schmidt 标准正交化方法标准正交化 x_1, x_2, x_3.

2. 设 E 为内积空间 X 的标准正交集，$x\in X$. 对于 $n = 1, 2, \cdots$，令

$$E_{x,n} = \left\{u \in E : |\langle x, u\rangle| \geqslant \frac{1}{n}\right\}.$$

求证：$E_{x,n}$包含至多有限个元素[提示：利用 Bessel 不等式].

3. 设 E 及 x 如上一问题. 求证：

$$E_x = \{u \in E : \langle x, u\rangle \neq 0\}$$

为可数集. [提示：$E_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{x,n}$，其中 $E_{x,n}$如上面定义.]

问题

问题 5.2.1 设$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$为内积空间 X 由非零元组成的正交集. 求证：若与每一

x_i 均正交的元仅有 X 中的零元，则 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 X 的代数基.

解答 设 $k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n=0$. 两端与 x_i 作内积得

$$k_i\langle x_i, x_i\rangle = 0.$$

但由于 $x_i\neq 0$，故有 $\langle x_i, x_i\rangle\neq 0$. 从而 $k_i=0$. 这就证明了 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为线性无关的.

设 x 为 X 中任意元，$y=c_1x_1+\cdots+c_nx_n$，其中 c_i 由下式给出：

$$c_i\langle x_i, x_i\rangle = \langle x, x_i\rangle, \quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

由于对于 $i\neq j$ 有 $\langle x_i, x_j\rangle=0$，故有

$$\langle y, x_j\rangle = c_j\langle x_j, x_j\rangle = \langle x, x_j\rangle.$$

因此 $\langle x-y, x_j\rangle=0$. 这对任意的 $1\leqslant j\leqslant n$ 均成立. 所以必有 $x-y=0$，即

$$x = y \in \operatorname{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}.$$

■

问题 5.2.2 设 X 为由所有 $[-1,1]$ 上的实连续函数组成的实空间，其上定义内积：

$$\langle x, y\rangle = \int_{-1}^{1} x(t)y(t)\mathrm{d}t, \quad x, y \in X.$$

若 Y 为所有 X 中的奇函数之集，求它的正交补 $Y^{\perp}$.

解答 函数 x 为奇函数若任取 t 有 $x(-t)=-x(t)$，它为偶函数若任给 t 有 $x(-t)=x(t)$. Y 的正交补为

$$Y^{\perp} = \{x \in X: \text{任取 } y \in Y \text{ 有} \langle x, y\rangle = 0\}.$$

设 x 为任意偶函数且 $y\in Y$. 则 $x(t)y(t)$ 为 t 的奇函数，因此

$$\langle x, y\rangle = \int_{-1}^{1} x(t)y(t)\mathrm{d}t = 0.$$

这说明任取 $y\in Y$ 有 $\langle x, y\rangle=0$，即 $x\in Y^{\perp}$.

若 $x\in Y^{\perp}$，令 $y(t)=x(t)-x(-t)$，则 $y(-t)=x(-t)-x(t)=-y(t)$，故 $y\in Y$. 从而 $\langle x, y\rangle=0$. 由于

$$y(t)^2 = (x(t)-x(-t))y(t) = x(t)y(t)+x(-t)y(-t),$$

所以

$$\int_{-1}^{1} y(t)^2\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} x(t)y(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} x(-t)y(-t)\mathrm{d}t = \langle x, y\rangle + \langle x, y\rangle = 0.$$

由于 y 为连续函数，故任给 t 有 $y(t)=0$，即 $x(-t)=x(t)$. 因此若 $x\in Y^{\perp}$，则 x 必为偶函数. 这就说明 $Y^{\perp}$ 为由所有 X 中的偶函数组成. ■

问题 5.2.3 对 $t\in[-1,1]$，定义 $x_n(t)=t^n$，$n=0,1,2,\cdots$. 标准正交化 $\{x_n\}$ 的前三项，其中的内积由下式给出：

$$\langle x, y\rangle = \int_{-1}^{1} x(t)y(t)\mathrm{d}t.$$

解答 我们要找的标准正交序列的前三项 u_0, u_1, u_2 如下得到：由于 $x_0(t)=1$ 对所有 t 成立，

$$\| x_0 \|^2 = \int_{-1}^{1} 1\mathrm{d}t = 2.$$

因此我们取

$$u_0 = \frac{x_0}{\| x_0 \|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

令

$$y_1 = x_1 - \langle x_1, u_0 \rangle u_0.$$

则$\langle y_1, u_0 \rangle = 0$，又

$$\langle x_1, u_0 \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{2}} \mathrm{d}t = 0,$$

故 $y_1 = x_1$，因而

$$\| y_1 \|^2 = \int_{-1}^{1} t^2 \mathrm{d}t = \frac{2}{3}.$$

令

$$u_1 = \frac{y_1}{\| y_1 \|} = \sqrt{\frac{3}{2}} x_1.$$

设

$$y_2 = x_2 - \langle x_2, u_1 \rangle u_1 - \langle x_2, u_0 \rangle u_0.$$

则$\langle y_2, u_1 \rangle = 0 = \langle y_2, u_0 \rangle$，由于

$$\langle x_2, u_1 \rangle = \int_{-1}^{1} t^2 \sqrt{\frac{3}{2}} t \mathrm{d}t = 0, \qquad \langle x_2, u_0 \rangle = \int_{-1}^{1} t^2 \sqrt{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

故有

$$y_2 = x_2 - \frac{\sqrt{2}}{3} u_0 = x_2 - \frac{1}{3},$$

$$\| y_2 \|^2 = \int_{-1}^{1} y_2(t)^2 \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{1}{3} \right)^2 \mathrm{d}t = \frac{8}{45}.$$

令

$$u_2 = \frac{y_2}{\| y_2 \|} = \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x_2 - \frac{1}{3} \right).$$

因此

$$u_0(t) = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad u_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} t, \quad u_2(t) = \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{3t^2 - 1}{2} \right). \qquad \blacksquare$$

问题 5.2.4 设 $x_1(t) = t^2$，$x_2(t) = t$ 及 $x_3(t) = 1$. 按此顺序标准正交化 x_1, x_2, x_3. 其中的内积由下式给出：

$$\langle x, y \rangle = \int_{-1}^{1} x(t) y(t) \mathrm{d}t.$$

解答 我们将用问题 5.2.3 的方法来找标准正交函数 u_1, u_2, u_3. 由于

$$\| x_1 \|^2 = \int_{-1}^{1} x_1(t)^2 \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} t^4 \mathrm{d}t = \frac{2}{5},$$

我们取

$$u_1 = \frac{x_1}{\| x_1 \|} = \sqrt{\frac{5}{2}} x_1.$$

令

$$y_2 = x_2 - \langle x_2, u_1 \rangle u_1.$$

则$\langle y_2, u_1 \rangle = 0$. 由于

$$\langle x_2, u_1 \rangle = \int_{-1}^{1} t \sqrt{\frac{5}{2}} t^2 \mathrm{d}t = 0,$$

故有 $y_2 = x_2$,

$$\| y_2 \|^2 = \int_{-1}^{1} x_2(t)^2 \mathrm{d}t = \frac{2}{3}.$$

因此我们取

$$u_2 = \frac{y_2}{\| y_2 \|} = \sqrt{\frac{3}{2}} x_2.$$

设

$$y_3 = x_3 - \langle x_3, u_2 \rangle u_2 - \langle x_3, u_1 \rangle u_1.$$

则有$\langle y_3, u_1 \rangle = 0 = \langle y_3, u_2 \rangle$. 由于

$$\langle x_3, u_2 \rangle = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{3}{2}} x_2(t) \mathrm{d}t = 0,$$

$$\langle x_3, u_1 \rangle = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{5}{2}} x_1(t) \mathrm{d}t = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{5}{2}},$$

我们有

$$y_3 = x_3 - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{5}{2}} u_1 = x_3 - \frac{5}{3} x_1,$$

$$\| y_3 \|^2 = \int_{-1}^{1} y_3(t)^2 \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \left(1 - \frac{5}{3} t^2\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{8}{9}.$$

令

$$u_3 = \frac{y_3}{\| y_3 \|} = \sqrt{\frac{9}{8}} \left(x_3 - \frac{5}{3} x_1\right).$$

因此

$$u_1(t) = \sqrt{\frac{5}{2}} t^2, \quad u_2(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} t, \quad u_3(t) = \sqrt{\frac{1}{2}} \frac{3 - 5t^2}{2}. \quad \blacksquare$$

问题 5.2.5 设 H 为 Hilbert 空间，$\{x_n\}$为 H 的正交序列. 求证：$\sum x_n$ 在 H 中收敛当且仅当$\sum \| x_n \|^2 < \infty$.

解答 令

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad t_n = \| x_1 \|^2 + \| x_2 \|^2 + \cdots + \| x_n \|^2.$$

则对于 $n>m$ 由正交性有

$$\| s_n - s_m \|^2 = \left\langle \sum_{i=m+1}^{n} x_i, \sum_{i=m+1}^{n} x_i \right\rangle = \sum_i \sum_j \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{i=m+1}^{n} \langle x_i, x_i \rangle.$$

因此

$$\| s_n - s_m \|^2 = \sum_{i=m+1}^{n} \| x_i \|^2 = t_n - t_m.$$

这就证明了$\{s_n\}$为 H 的柯西列当且仅当$\{t_n\}$为$\mathbb{R}$ 的柯西列. 又由于 H 为 Hilbert 空间，所以$\{s_n\}$在 H 中收敛当且仅当$\{t_n\}$在$\mathbb{R}$ 中收敛. 这就完成了证明. ■

问题 5.2.6 设 H 为 Hilbert 空间 l^2 或 $L^2[-\pi,\pi]$. 在上述两种情形，分别找出 H 的一个标准正交基，一个标准正交集但不为标准正交基.

解答：首先考虑 $H=l^2$ 情形. 设 e_n 为 l^2 的第 n 个单位向量. 则任取 $i\neq j$ 有$\langle e_i, e_j \rangle=0$且$\langle e_i, e_i \rangle=1$. 从而$\{e_n\}$为 l^2 的标准正交集. 由于$\langle x, e_n \rangle=x(n)$，故若任取 n 都有$\langle x, e_n \rangle=0$，则任取 n 有 $x(n)=0$，即 $x=0$. 由此推知$\{e_n\}$为 l^2 的标准正交基.

从$\{e_n\}$中去掉几个向量，则可以得到 l^2 的标准正交集但不为标准正交基.

再来考虑 $H=L^2[-\pi,\pi]$情形. 对于整数 n,m，我们有

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{-imt} dt = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 2\pi, & n = m. \end{cases}$$

因此我们令

$$u_n(t) = (2\pi)^{-1/2} e^{int}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

则$\{u_n : n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$在 $L^2[-\pi,\pi]$中为标准正交的. 为证它为 $L^2[-\pi,\pi]$的标准正交基，我们利用 Fejer 定理，其表述如下：设 x 为周期为 2π 的连续函数，令

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{-int} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle x, u_n \rangle,$$

$$s_N(t) = \sum_{-N}^{N} \hat{x}(n) e^{int}, \quad N = 0, 1, 2, \cdots,$$

则$(1/N)(s_0 + s_1 + \cdots + s_{N-1})$一致收敛到 x.

设 $u \in L^2[-\pi,\pi]$使得任取整数 n 有$\langle u, u_n \rangle=0$，即任取整数 n 都有$\hat{u}(n)=0$. 令

$$x(t) = \int_{-\pi}^{t} u(s) ds, \quad -\pi \leqslant t \leqslant \pi.$$

则 x 为绝对连续的，$x' = u$ 几乎处处成立，且

$$x(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} u(s) ds = 2\pi \hat{u}(0) = 0 = x(-\pi).$$

若 $n\neq 0$，则利用分部积分有

$$2\pi \hat{x}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{-int} dt = \frac{1}{-in}[x(\pi) e^{-in\pi} - x(-\pi) e^{in\pi}] + \frac{2\pi}{in} \hat{u}(n) = 0.$$

故任取 $n\neq 0$ 有 $\hat{x}(n)=0$，且

$$s_N(t)=\hat{x}(0),\quad \frac{1}{N}(s_0+\cdots+s_{N-1})=\hat{x}(0)$$

对所有 N 成立. 由 Fejer 定理知任取 t 有 $x(t)=\hat{x}(0)$. 因此 $u=x'=0$ 几乎处处成立. 从而仅当 u 为 $L^2[-\pi,\pi]$中的零元时有任取 n，$\langle u,u_n\rangle=0$ 成立. 从而$\{u_n\}$为完全的.

从$\{u_n\}$中去掉几个向量，则可以得到 $L^2[-\pi,\pi]$的不完全标准正交集. ■

问题 5.2.7 设$\{u_n\}$为 Hilbert 空间 H 的标准正交序列，$Y=\mathrm{span}\{u_n\}$及 $x\in H$. 求证下述命题相互等价：

(a) $x\in\bar{Y}$.

(b) $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\langle x,u_n\rangle u_n$.

(c) $\|x\|^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\langle x,u_n\rangle|^2$.

解答 令

$$y_n=\sum_{i=1}^{n}\langle x,u_i\rangle u_i,\quad n=1,2,\cdots, \tag{1}$$

则 $y_n\in Y$. 由 Bessel 不等式有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,u_n\rangle|^2\leqslant\|x\|^2<\infty.$$

因此由 Riesz-Fischer 定理知

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,u_n\rangle u_n$$

在 H 中存在. 从而在 H 中 $y_n\to y$，$y\in\bar{Y}$. 进一步地，由$\{u_n\}$的标准正交性，任取 $n\geqslant j$ 有

$$\langle y_n,u_j\rangle=\langle x,u_j\rangle,$$

从而令 $n\to\infty$有$\langle y,u_j\rangle=\langle x,u_j\rangle$. 因此对 $j=0,1,\cdots$，有$\langle y-x,u_j\rangle=0$. 若 $z=k_1u_1+k_2u_2+\cdots+k_nu_n$ 为 Y 中任一元，则

$$\langle y-x,z\rangle=\sum_{j=1}^{n}\langle y-x,k_ju_j\rangle=0.$$

若 z 为 $\bar{Y}$ 中任意元，则存在 Y 中序列$\{z_n\}$使得 $z_n\to z$. 我们有$\langle y-x,z_n\rangle=0$ 且

$$\langle y-x,z_n\rangle\to\langle y-x,z\rangle.$$

因此对于 $\bar{Y}$ 中任意元 z 均有$\langle y-x,z\rangle=0$.

首先假设(a)成立，则 $y-x\in\bar{Y}$，从而

$$\langle y-x,y-x\rangle=0,\qquad x=y=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,u_n\rangle u_n.$$

故(b)成立.

若(b)成立，则 $x=y\in\bar{Y}$. 从而(a)成立，且由(1)式知

$$\langle y_n, x\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle x, u_i\rangle\langle u_i, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, u_i\rangle|^2. \tag{2}$$

由于$\langle y_n, x\rangle \to \langle y, x\rangle$，由(2)式可以推知(c)成立.

最后，我们假设(c)成立. 由$\{u_n\}$的标准正交性得

$$\langle y_n, y_n\rangle = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, u_i\rangle|^2.$$

因此利用(2)式有

$$\begin{aligned}\| x - y_n \|^2 &= \langle x - y_n, x - y_n\rangle \\ &= \langle x, x\rangle - \langle x, y_n\rangle - \langle y_n, x\rangle + \langle y_n, y_n\rangle \\ &= \| x \|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, u_i\rangle|^2.\end{aligned}$$

若(c)成立，则上式收敛到0，从而 $y_n \to x$. 这说明 $x = y \in \bar{Y}$. 从而(b)和(a)成立. ■

问题 5.2.8 设 H 为 Hilbert 空间，$\{u_n\}$和$\{v_n\}$为 H 的标准正交序列. 令

$$Y_1 = \operatorname{span}\{u_n\}, \quad Y_2 = \operatorname{span}\{v_n\}.$$

求证：$\bar{Y}_1 = \bar{Y}_2$ 当且仅当

$$u_n = \sum_{m=1}^{\infty} k_{nm} v_m, \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{3}$$

$$v_n = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{k}_{mn} u_m, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{4}$$

其中 $k_{nm} = \langle u_n, v_m\rangle$.

解答 设 $\bar{Y}_1 = \bar{Y}_2$，则 $v_n \in \bar{Y}_1$ 及 $u_n \in \bar{Y}_2$. 从而利用问题 5.2.7 知

$$v_n = \sum_{m=1}^{\infty}\langle v_n, u_m\rangle u_m = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{k}_{mn} u_m,$$

$$u_n = \sum_{m=1}^{\infty}\langle u_n, v_m\rangle v_m = \sum_{m=1}^{\infty} k_{nm} v_m.$$

从而若 $\bar{Y}_1 = \bar{Y}_2$，则(3)式和(4)式成立.

反之，若(3)式和(4)式成立，由于对于 $N \geqslant 1$ 时有

$$\sum_{m=1}^{N} k_{nm} v_m \in Y_2,$$

故(3)式可以推知 $u_n \in \bar{Y}_2$. 类似地由(4)式可以推知 $v_n \in \bar{Y}_1$. 设 x 为 $\bar{Y}_1$ 中任一元，则由问题 5.2.7 知

$$x = \sum_{m=1}^{\infty}\langle x, u_m\rangle u_m.$$

由于每一个 $u_m \in \bar{Y}_2$，上面级数的有限和属于 $\bar{Y}_2$，从而 $x \in \bar{Y}_2$. 因此有 $\bar{Y}_1 \subset \bar{Y}_2$. 类似可证 $\bar{Y}_2 \subset \bar{Y}_1$. 这就完成了证明. ■

问题 5.2.9 设 $x_1, x_2, \cdots$ 为 Hilbert 空间 H 线性无关的向量. 令

$$Y_n = \operatorname{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$
$$Y = \overline{\operatorname{span}}\{x_1, x_2, \cdots\},$$

$x \in H$. 若 y_n 为 x 在 Y_n 上的最佳逼近元，求证：$\{y_n\}$收敛到 x 在 Y 上的唯一最佳逼近元.

解答 设$\{u_n\}$是由$\{x_n\}$通过 Gram-Schmidt 标准正交化方法得到的标准正交序列，则有

$$Y_n = \operatorname{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} = \operatorname{span}\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}.$$

由问题 5.2.7 的解答知

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle u_n$$

在 H 中存在. 设

$$z_n = \sum_{i=1}^{n} \langle x, u_i \rangle u_i.$$

则对于 $n \geqslant i$ 有$\langle z_n, u_i \rangle = \langle x, u_i \rangle$，$z_n \in Y_n \subset Y$ 且 $z_n \to z$. 因此 $z \in Y$ 且任取 $1 \leqslant i \leqslant n$ 有

$$\langle x - z_n, u_i \rangle = 0. \tag{5}$$

由于 $Y_n = \operatorname{span}\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$，由(5)式可以推知 $x - z_n \perp Y_n$. 因此由问题 5.1.16 知 z_n 为 x 在 Y_n 上的最佳逼近元. 即 $z_n = y_n$.

在(5)式中保持 i 不变，令 $n \to \infty$可得

$$\langle x - z, u_i \rangle = 0$$

对 $i = 1, 2, \cdots$成立. 由于 $x_n \in \operatorname{span}\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$，这就证明了任取 $n \geqslant 1$ 有$\langle x - z, x_n \rangle = 0$. 设 $Z = \operatorname{span}\{x_n\}$. 则 $x - z \perp Z$. 若 y 为 Y 中任一元，则存在 Z 中一列元$\{w_n\}$使得 $w_n \to y$. 因此

$$\langle x - z, y \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle x - z, w_n \rangle = 0.$$

这说明 $x - z \perp Y$. 由问题 5.1.16 知 z 为 x 在 Y 上的最佳逼近元. 由于 $y_n = z_n \to z$，这就完成了证明. ■

问题 5.2.10 求证：一个 Hilbert 空间为有限维的当且仅当其任一完全标准正交集都为它的代数基.

解答 设 H 为有限维 Hilbert 空间，E 为 H 的完全标准正交集. 由于由非零元组成的正交集都是线性无关的[见问题 5.2.1 的解答]，故 E 为线性无关的. 因此 E 必然为有限集 $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$. 又因为 E 为完全的，H 中唯一与所有 u_i 都正交的元为 H 的零元. 由问题 5.2.1 知E 为 H 的代数基.

若 H 为无穷维的，我们将证明 H 的任一标准正交集 E 均不为 H 的代数基，即 $\operatorname{span} E \neq H$. 若 E 为有限集，则上述结论显然成立. 故不妨假设 E 含有两两不等的序列$\{u_n\}$. 由于级数 $\sum n^{-2}$ 收敛，由 Riesz-Fischer 定理知

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$$

在 H 中存在且任取 n 有 $\langle x,u_n\rangle=\dfrac{1}{n}$. 假设 $x\in \mathrm{span}E$,则

$$x = k_1 v_1 + \cdots + k_m v_m,$$

其中 $v_i\in E, k_i$ 为纯量. 因此对 E 中与每一个 v_i 都不相等的元 u 有 $\langle x,u\rangle=0$. 这说明集合

$$\{u \in E:\langle x,u\rangle \neq 0\}$$

为有限的. 但这个集合显然包含每一个 u_n. 这说明 $x\notin \mathrm{span}E$,因此 $\mathrm{span}E\neq H$. ■

问题 5.2.11 设 H 为可分 Hilbert 空间,求证:

(a) H 的每一标准正交集必为可数的.

(b) H 有 Schauder 基.

解答 (a) 设 E 为 H 的标准正交集,F 为 H 的可数稠密子集. 任取 $x\in E$,存在 $y\in F$ 使得 $\|x-y\|<1/2$. 因此我们可以定义一个从 E 到 F 的映射将 x 映到 y. 若 E 中不同元 x_1 和 x_2 映到 F 中同一元 y,则

$$\|x_1-x_2\| \leqslant \|x_1-y\| + \|y-x_2\| < \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

但 $\langle x_1-x_2,x_1-x_2\rangle=2$,这里我们用到了 E 的标准正交性. 所以

$$\|x_1-x_2\| = \sqrt{2} > 1.$$

这个矛盾说明上面定义的从 E 到 F 的映射为单射. 由于 F 为可数的,E 必为可数的.

(b) 每一 Hilbert 空间 H 均有标准正交基 E. 若 H 为可分的. 则由(a)知 E 必为可数的,设 $E=\{u_n\}$. H 中的每一元 x 均有 Fourier 展开式

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} k_n u_n. \tag{6}$$

其中

$$k_n = \langle x,u_n\rangle. \tag{7}$$

若(6)式中的级数在 H 中收敛,则其系数 k_n 由(7)式唯一确定. 从而 $\{u_n\}$ 为 H 的 Schauder 基. ■

问题 5.2.12 设 E 为 Hilbert 空间 H 的标准正交基,S 为与 E 等势的集合,求证:H 与问题 5.1.14 中定义的 Hilbert 空间 $l^2(S)$ 线性等距同构.

解答 设 $\phi:S\to E$ 为一一映射,$\psi:E\to S$ 为其逆映射. 对于 $x\in H$,定义 $y:S\to \mathbb{K}$ 为

$$y(s) = \langle x,\phi(s)\rangle. \tag{8}$$

设

$$E_x = \{u \in E:\langle x,u\rangle \neq 0\}, \qquad S_x = \{s \in S:\phi(s) \in E_x\} = \phi(E_x).$$

则 E_x 为可数集,从而 S_x 也为可数集. 进一步地有

$$s \in S_x \Leftrightarrow \phi(s) \in E_x \Leftrightarrow \langle x,\phi(s)\rangle \neq 0 \Leftrightarrow y(s) \neq 0.$$

所以 $\{s\in S:y(s)\neq 0\}$ 为可数集且由 Parseval 公式有:

$$\sum_{s\in S} |y(s)|^2 = \sum_{s\in S} |\langle x,\phi(s)\rangle|^2 = \sum_{u\in E} |\langle x,u\rangle|^2 = \|x\|^2.$$

这就证明了 $y\in l^2(S)$ 且 $\|y\|^2=\|x\|^2$.

若 $x\in H$,记 $T(x)=y$,其中 y 由(8)式定义.这样就定义了一个映射 $T:H\to l^2(S)$ 使得 $\|T(x)\|=\|x\|$.若 $x_1,x_2\in H$ 且 k 为纯量,则

$$\langle kx_1+x_2,\phi(s)\rangle=k\langle x_1,\phi(s)\rangle+\langle x_2,\phi(s)\rangle,$$

即有 $y(s)=ky_1(s)+y_2(s)$,其中

$$y=T(kx_1+x_2),\quad y_1=T(x_1),\quad y_2=T(x_2).$$

这就证明了 T 为线性等距.

最后我们来证明 T 为满射.为此设 $y\in l^2(S)$.则

$$\{s\in S:y(s)\neq 0\}$$

为可数集,设为 $\{s_n\}$.令 $u_n=\phi(s_n)$.由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}|y(s_n)|^2<\infty,$$

故由 Riesz-Fischer 定理知

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}y(s_n)u_n$$

在 H 中存在.对于这个元 x 我们有

$$\langle x,u_n\rangle=y(s_n),$$

且对 $u\neq u_n$ 有

$$\langle x,u\rangle=0.$$

若 $s\neq s_n$,则 $y(s)=0$ 且 $\phi(s)\neq\phi(s_n)$.由此推知任取 $s\in S$ 有

$$y(s)=\langle x,\phi(s)\rangle.$$

所以 $y=T(x)$.从而 T 为满射. ■

问题 5.2.13 设 H 为 Hilbert 空间.H 的标准正交基的势被称为 H 的**正交维数**.求证:

(a) 两个 Hilbert 空间为线性等距同构的当且仅当它们有相同的正交维数.

(b) 若一个 Hilbert 空间有可数的标准正交基,则它必为可分的.

解答 (a) 设 H_1 和 H_2 为 Hilbert 空间,又设 E_1 和 E_2 分别为 H_1 和 H_2 的完全标准正交集.

假设 H_1 和 H_2 具有相同的正交维数,则 E_1 与 E_2 等势.由问题 5.2.12 知 H_1 和 H_2 均线性等距同构与 $l^2(S)$,其中 $S=E_1$.从而 H_1 与 H_2 为线性等距同构的.

反之,假设存在线性算子 $T:H_1\to H_2$,T 为满射且任取 $x\in H_1$ 有 $\|T(x)\|=\|x\|$.则由问题 5.1.11 知任取 $x_1,x_2\in H$ 有

$$\langle Tx_1,Tx_2\rangle=\langle x_1,x_2\rangle. \tag{9}$$

设 $T(E_1)=E_3$,则 E_3 为 H_2 的标准正交集,这是由于(a)式成立且 E_1 为标准正交的.假设 $y\in H_2$ 使得任取 $v\in E_3$ 都有 $\langle y,v\rangle=0$,若 $x=T^{-1}(y)$,则对所有 $u\in E_1$ 有

$$\langle x,u\rangle=\langle Tx,Tu\rangle=\langle y,Tu\rangle=0.$$

因此 $x=0$，这是由于 E_1 为完全的. 从而 $y=T(x)=0$. 这就证明了 E_3 为 H_2 的完全标准正交集. 因此 E_3 和 E_2 为等势的. 又 $T:E_1\to E_3$ 为一一映射，故 E_1 与 E_3 等势，从而 E_1 与 E_2 等势. 这就证明了(a).

(b) 若 Hilbert 空间 H 有可数的标准正交基 E. 则 E 与 S 等势，其中 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 或 $\{1,2,\cdots\}$. 利用问题 5.2.12 可知 H 与 $l^2(S)$ 线性等距同构，其中 $l^2(S)$ 或者为 $\mathbb{K}^n$ 或者为 l^2. 由于 $\mathbb{K}^n$ 及 l^2 均为可分的，故 H 也为可分的. ■

问题 5.2.14 设 H 为 Hilbert 空间，$\{u_\alpha\}$ 为 H 的标准正交集. 求证：下述命题相互等价：

(a) $\{u_\alpha\}$ 为 H 的标准正交基

(b) $H=\overline{\operatorname{span}}\{u_\alpha\}$

(c) 任取 $x,y\in H$，有

$$\langle x,y\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,u_n\rangle\langle u_n,y\rangle,$$

其中

$$\{u_n:n=1,2,\cdots\}=\{u_\alpha:\langle x,u_\alpha\rangle\neq 0\text{ 或者}\langle y,u_\alpha\rangle\neq 0\}.$$

解答 假设(a)成立，则任取 $x\in H$ 有

$$\{u_\alpha:\langle x,u_\alpha\rangle\neq 0\}\subset\{u_n:n=1,2,\cdots\}.$$

x 有 Fourier 展开式：

$$x=\sum\langle x,u_\alpha\rangle u_\alpha=\sum_{n\geqslant 1}\langle x,u_n\rangle u_n.$$

令

$$x_m=\sum_{n=1}^{m}\langle x,u_n\rangle u_n,$$

则 $x_m\in\operatorname{span}\{u_n\}\subset\operatorname{span}\{u_\alpha\}$ 且 $x_m\to x$. 因此 $x\in\overline{\operatorname{span}}\{u_\alpha\}$. 由于 $x\in H$ 为任取的，故(b)成立.

进一步地，H 中任意两元 x,y 的 Fourier 展开式可以写为

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,u_n\rangle u_n,\quad y=\sum_{n=1}^{\infty}\langle y,u_n\rangle u_n,$$

其中 $\{u_n\}$ 如(c)所设. 设 x_m 和 y_m 分别为上面两个级数的前 m 项和. 由内积的线性性及 $\{u_n\}$ 的标准正交性有

$$\langle x_m,y_m\rangle=\sum_{n=1}^{m}\langle x,u_n\rangle\langle u_n,y\rangle.$$

令 $m\to\infty$，由内积的连续性可以推知(c)成立. 这样我们就证明了若(a)成立，则(b)和(c)均成立.

现设(b)成立，设任取 α 均有 $\langle x,u_\alpha\rangle=0$. 存在 $\operatorname{span}\{u_\alpha\}$ 中一列元 $\{y_n\}$ 使得 $y_n\to x$. 由于

每一 y_n 均为有限个 u_α 的线性组合且任取 α 有 $\langle x,u_\alpha\rangle=0$，我们有 $\langle x,y_n\rangle=0$，令 $n\to\infty$ 再由内积的连续性知 $\langle x,x\rangle=0$，即 $x=0$. 因此 $\{u_\alpha\}$ 为完全的，即(a)成立.

若(c)成立，设任取 α 都有 $\langle x,u_\alpha\rangle=0$. 在(c)中取 $y=x$ 则有

$$\langle x,x\rangle=\sum\langle x,u_n\rangle\langle u_n,x\rangle=0,$$

所以 $x=0$. 从而 $\{u_\alpha\}$ 为完全的，即(a)成立. 这就证明了(a)，(b)和(c)的等价性. ■

问题 5.2.15 设 Y 为 Hilbert 空间 H 的闭子空间，$\{u_\alpha\}$ 为 Y 的标准正交基. 若 $x\in H$，求证：x 在 Y 上唯一的最佳逼近元为

$$y=\sum\langle x,u_\alpha\rangle u_\alpha.$$

解答 集合 $\{u_\alpha:\langle x,u_\alpha\rangle\neq0\}$ 为可数的，设为 $\{u_n:n=1,2,\cdots\}$. 由 Bessel 不等式有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,u_n\rangle|^2\leqslant\|x\|^2<\infty.$$

再由 Riesz-Fischer 定理知

$$y=\sum\langle x,u_n\rangle u_n=\sum\langle x,u_\alpha\rangle u_\alpha \tag{10}$$

在 H 中存在. 进一步地有

$$\langle y,u_\alpha\rangle=\langle x,u_\alpha\rangle$$

对任意的 α 成立. 故任取 α 有 $\langle x-y,u_\alpha\rangle=0$，设 z 为 Y 中任一元，由于 $\{u_\alpha\}$ 为 Y 的标准正交基，由问题 5.2.14 知 $Y=\overline{\operatorname{span}}\{u_\alpha\}$. 从而存在 $\operatorname{span}\{u_\alpha\}$ 中一列元 $\{z_n\}$ 使得 $z_n\to z$. 由于每一 z_n 都为有限个 u_α 的线性组合且任取 α 有 $\langle x-y,u_\alpha\rangle=0$，所以对任意的 n 有 $\langle x-y,z_n\rangle=0$. 因此

$$\langle x-y,z\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle x-y,z_n\rangle=0.$$

由于上式对 Y 中的任意元 z 均成立，故 $x-y\perp Y$. 由(10)式可以推出

$$y\in\overline{\operatorname{span}}\{u_n\}\subset Y,$$

由问题 5.1.16 知 y 为 x 在 Y 上的最佳逼近元. ■

问题 5.2.16 设 H 为 Hilbert 空间，$F_1,F_2,\cdots$ 为 H 的闭子空间且对于 $n\neq m$ 有 $F_n\perp F_m$. 设

$$F=\overline{\operatorname{span}}\{F_n:n=1,2,\cdots\}.$$

求证：任取 $x\in F$，对 $n=1,2,\cdots$，存在唯一的 $x_n\in F_n$，使得 $x=\sum_{n\geqslant1}x_n$.

解答 设

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}x_n,\quad x=\sum_{n=1}^{\infty}y_n,$$

其中 $x_n,y_n\in F_n$. 令 $z_n=x_n-y_n$，则对于 $n\neq m$ 有 $\langle z_n,z_m\rangle=0$. 因此由勾股定理若 $n\geqslant m$，则

$$\|z_1+z_2+\cdots+z_n\|^2=\|z_1\|^2+\|z_2\|^2+\cdots+\|z_n\|^2\geqslant\|z_m\|^2. \tag{11}$$

但是当 $n\to\infty$ 时，有

$$z_1+z_2+\cdots+z_n=\sum_{j=1}^{n}(x_j-y_j)\to x-x=0,$$

故若在(11)式中令 $n\to\infty$ 则有 $z_m=0$，即 $x_m=y_m$. 这对任意的 m 都是对的，这样我们就证明了唯一性.

由于 F_n 为 H 的闭子空间，所以 F_n 为 Hilbert 空间. 因此 F_n 有标准正交基

$$E_n=\{u_{n,\alpha}:\alpha\in A_n\}.$$

令

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,$$

则 E 为标准正交集且 E 中每一元均在 $\operatorname{span}\{F_n:n=1,2,\cdots\}$ 中. 显然有 $\operatorname{span}E_n\subset\operatorname{span}E$，$\overline{\operatorname{span}E_n}=F_n$. 因此 $F_n\subset\overline{\operatorname{span}E}$，从而

$$F=\overline{\operatorname{span}}\{F_n:n=1,2,\cdots\}\subset\overline{\operatorname{span}}E.$$

但我们有 $E\subset F$，故 E 为 F 的标准正交基. 因此 F 中任一元 x 有 Fourier 展开式

$$x=\sum_{u\in E}\langle x,u\rangle u=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\alpha\in A_n}\langle x,u_{n,\alpha}\rangle u_{n,\alpha}.$$

令

$$x_n=\sum_{\alpha\in A_n}\langle x,u_{n,\alpha}\rangle u_{n,\alpha},$$

则 $x_n\in F_n$ 且 $x=\sum_{n\geqslant 1}x_n$. 这就完成了证明. ■

问题 5.2.17 对于 $0\leqslant t\leqslant 1$，令 $u_{0,0}(t)=1$，

$$u_{1,0}(t)=\begin{cases}1, & t\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right),\\ -1, & t\in\left(\dfrac{1}{2},1\right],\\ 0, & t=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

若 $n=1,2,\cdots,j=1,2,\cdots,2^n$，设

$$u_{n,j}(t)=\begin{cases}\sqrt{2^n}, & t\in\left[\dfrac{j-1}{2^n},\dfrac{j-1/2}{2^n}\right),\\ -\sqrt{2^n}, & t\in\left(\dfrac{j-1/2}{2^n},\dfrac{j}{2^n}\right],\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求证：函数族 $u_{n,j}$ 定义了 $L^2[0,1]$ 的标准正交基.

解答 直接计算可得：

$$\int_0^1(u_{n,j}(t))^2\,\mathrm{d}t=1,$$

且

$$\int_0^1 u_{0,0}(t)u_{1,0}(t)\mathrm{d}t = 0.$$

若 x 在 $((j-1)/2^n, j/2^n)$ 上为常数，则

$$\int_0^1 x(t)u_{n,j}(t)\mathrm{d}t = 0.$$

因此对 $n\geqslant 1, j\geqslant 1$ 有

$$\int_0^1 u_{0,0}(t)u_{n,j}(t)\mathrm{d}t = 0 = \int_0^1 u_{1,0}(t)u_{n,j}(t)\mathrm{d}t.$$

设 $n=m+r, r\geqslant 1$，由于 $u_{m,i}$ 在

$$\left[\frac{i-1}{2^m}, \frac{i-1/2}{2^m}\right) = \left[\frac{2^r(i-1)}{2^n}, \frac{2^r(i-1/2)}{2^n}\right),$$

$$\left(\frac{(i-1/2)}{2^m}, \frac{i}{2^m}\right] = \left(\frac{2^r(i-1/2)}{2^n}, \frac{2^r i}{2^n}\right]$$

上分别为常数，所以 $u_{m,i}$ 在 $((j-1)/2^n, j/2^n)$ 上为常数，其中 $1\leqslant j\leqslant 2^n$. 因此

$$\int_0^1 u_{m,i}(t)u_{n,j}(t)\mathrm{d}t = 0.$$

上式在 $n=m, i\neq j$ 情形也成立. 这样就证明了 $\{u_{n,j}\}$ 为标准正交集.

为证 $\{u_{n,j}\}$ 为 $L^2[0,1]$ 的标准正交基，设 $x\in L^2[0,1]$ 使得对所有 n, j 有 $\langle x, u_{n,j}\rangle = 0$. 令

$$y(s) = \int_0^s x(t)\mathrm{d}t, \quad 0\leqslant s\leqslant 1.$$

则 y 为绝对连续的且 $y' = x$ 几乎处处成立. 我们有

$$y(1) = \int_0^1 x(t)\mathrm{d}t = \langle x, u_{0,0}\rangle = 0,$$

$$0 = \langle x, u_{1,0}\rangle = \int_0^{1/2} x(t)\mathrm{d}t - \int_{1/2}^1 x(t)\mathrm{d}t = y(1/2) - [y(1) - y(1/2)]$$

$$= 2y(1/2) - y(1).$$

因此 $y(1/2) = y(2/2) = 0$. 现假设对某一正整数 n 及所有的 $1\leqslant j\leqslant 2^n$ 都有

$$y(j/2^n) = 0. \tag{12}$$

注意到上述命题对 $n=1$ 成立. 由(12)式知对 $j=1,2,\cdots,2^n$ 有

$$y\left(\frac{2j}{2^{n+1}}\right) = 0. \tag{13}$$

又由(12)式有

$$\langle x, u_{n,j}\rangle = \int_{(j-1)/2^n}^{(j-\frac{1}{2})/2^n} x(t)\sqrt{2^n}\,\mathrm{d}t - \int_{(j-\frac{1}{2})/2^n}^{j/2^n} x(t)\sqrt{2^n}\,\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{2^n}\left\{y\left[\frac{j-\frac{1}{2}}{2^n}\right] - y\left(\frac{j-1}{2^n}\right) - y\left(\frac{j}{2^n}\right) + y\left[\frac{j-\frac{1}{2}}{2^n}\right]\right\}$$

$$= \sqrt{2^n}\,2y\left(\frac{j-1/2}{2^n}\right).$$

由于$\langle x,u_{n,j}\rangle=0$,故当$j=1,2,\cdots,2^n$时

$$y\left(\frac{2j-1}{2^{n+1}}\right)=0. \tag{14}$$

联合(13)式和(14)式,对$i=1,2,\cdots,2^{n+1}$有

$$y\left(\frac{i}{2^{n+1}}\right)=0.$$

这样用数学归纳法就证明了任取正整数n,及$1\leqslant j\leqslant 2^n$,(12)式均成立.由于$y$在$[0,1]$上连续且形如$j/2^n$的数在$[0,1]$中稠密,所以任取$0\leqslant s\leqslant 1$有$y(s)=0$.因此$x=y^1=0$几乎处处成立.这就证明了$\{u_{n,j}\}$在$L^2[0,1]$中为完全的. ■

问题 5.2.18 设D为$\mathbb{C}$的单位开圆盘,对于$|z|<1$及$n=1,2,\cdots$,令

$$u_n(z)=\sqrt{n/\pi}\,z^{n-1}.$$

求证:$\{u_n:n=1,2,\cdots\}$为问题 5.1.12 中定义的 Hilbert 空间$A^2(D)$的标准正交基.

解答 $A^2(D)$中的内积与$L^2(D)$中的内积是一致的,所以

$$\begin{aligned}\langle u_n,u_m\rangle&=\iint_D u_n(z)\,\overline{u_m(z)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_D\frac{\sqrt{nm}}{\pi}z^{n-1}(\bar{z})^{m-1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{\sqrt{mn}}{\pi}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^{n-1}(r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})^{m-1}r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=\frac{\sqrt{mn}}{\pi}\int_0^1 r^{m+n-1}\,\mathrm{d}r\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\theta}\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

由于

$$\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\theta}\,\mathrm{d}\theta=\begin{cases}0, & n\neq m,\\ 2\pi, & n=m,\end{cases}$$

故有

$$\langle u_n,u_m\rangle=\begin{cases}0, & n\neq m,\\ 1, & n=m.\end{cases}$$

因此$\{u_n\}$为$A^2(D)$的标准正交集.

若$f\in A^2(D)$,我们有

$$\begin{aligned}\langle f,u_n\rangle&=\iint_D f(z)\,\overline{u_n(z)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\left(\frac{n}{\pi}\right)^{1/2}(r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})^{n-1}r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=\left(\frac{n}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^1 r^{2n-1}\,\mathrm{d}r\int_{-\pi}^{\pi}f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n}\mathrm{d}\theta\\&=\left(\frac{n}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^1 r^{2n-1}\,\mathrm{d}r\int_{|z|=r}f(z)\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z^n}.\end{aligned}$$

但 f 在 D 上为解析的，从而

$$\langle f,u_n\rangle=\left(\frac{n}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^1 r^{2n-1}\,\mathrm{d}r\,\frac{2\pi}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)=\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{1/2}.$$

因此若任取 $n\geqslant 1$ 有 $\langle f,u_n\rangle=0$，则任取 $n\geqslant 1$ 有 $f^{(n-1)}(0)=0$. 从而任取 $z\in D$ 有

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}z^{n-1}=0.$$

这就证明了 $\{u_n\}$ 为完全的. ■

问题 5.2.19 对于 $n=0,1,\cdots$，令 $x_n(t)=t^n$，$\{u_n\}$ 为由 $\{x_n\}$ 出发在 $L^2[-1,1]$ 中由 Gram-Schmidt 标准正交化方法得到的标准正交序列. 求证：

(a) $\{u_n\}$ 为 $L^2[-1,1]$ 的标准正交基.

(b) $L^2[-1,1]$ 为可分的.

(c) $u_n(t)=((2n+1)/2)^{1/2}\mathrm{P}_n(t)$，其中 $\mathrm{P}_0(t)=1$，若 $n\geqslant 1$

$$\mathrm{P}_n(t)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}((t^2-1)^n). \tag{15}$$

[$\mathrm{P}_n(t)$ 被称为 n 阶 Legendre 多项式.]

解答 由构造过程知 $\{u_n\}$ 为 $L^2[-1,1]$ 的标准正交序列且

$$Y_n=\mathrm{span}\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}=\mathrm{span}\{u_1,\cdots,u_n\}.$$

由于 $x_n(t)=t^n$，故 Y_n 为所有次数不大于 n 的多项式之集. 为证 $\{u_n\}$ 为 $L^2[-1,1]$ 的标准正交基，假设 $x\in L^2[-1,1]$ 使得任取 $n\geqslant 0$ 有 $\langle x,u_n\rangle=0$. 则对于 $m\geqslant 0$，$y\in Y_m$ 有 $\langle x,y\rangle=0$.

若 y 为任一 $[-1,1]$ 上的连续函数，则存在多项式序列 $\{y_n\}$ 使得在 $[-1,1]$ 上 y_n 一致地收敛到 y. 因此在 $L^2[-1,1]$ 中也有 $y_n\to y$. 所以 $\langle x,y_n\rangle\to\langle x,y\rangle$. 但每一多项式 y_n 必在某一个 Y_m 中，故 $\langle x,y_n\rangle=0$. 从而 $\langle x,y\rangle=0$.

由于 $[-1,1]$ 上的连续函数的全体在 $L^2[-1,1]$ 中为稠密的，所以存在 $[-1,1]$ 上的连续函数列 $\{z_n\}$ 使得在 $L^2[-1,1]$ 中 z_n 依范数收敛到 x. 因此 $\langle x,z_n\rangle\to\langle x,x\rangle$. 但任取 n 有 $\langle x,z_n\rangle=0$，故有 $\langle x,x\rangle=0$，即 $x=0$. 这就证明了(a). (b)由问题 5.2.13(b)可以直接得到.

为证(c)成立，设 $v_n(t)=((2n+1)/2)^{1/2}\mathrm{P}_n(t)$，其中 $\mathrm{P}_n(t)$ 由(15)式定义. 对固定的 $n\geqslant 1$ 令

$$y(t)=y_0(t)=(t^2-1)^n,$$

$y^{(j)}$ 表示 y 的第 j 阶导数. n 次分部积分后可得：

$$\int_{-1}^{1}y^{(n)}y^{(n)}\,\mathrm{d}t=[y^{(n)}y^{(n-1)}-y^{(n+1)}y^{(n-2)}+\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}y^{(2n-1)}y^{(0)}]_{-1}^{1}+(-1)^n\int_{-1}^{1}y^{(2n)}y^{(0)}\,\mathrm{d}t.$$

易见 $y^{(0)},y^{(1)},\cdots,y^{(n-1)}$ 都含有因子 t^2-1，所以被积出的那部分在 1 和 -1 处都为 0. 由于

$$y^{(2n)}=\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}t^{2n}}(t^2-1)^n=(2n)!,$$

$$y^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^2-1)^n = 2^n n!\mathrm{P}_n(t),$$

故有

$$\int_{-1}^{1}(2^n n!\mathrm{P}_n(t))^2\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1}(2n)!(1-t^2)^n\mathrm{d}t = (2n)!\int_0^1(1-u)^n u^{-1/2}\mathrm{d}u$$
$$= (2n)!\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(1/2)}{\Gamma(n+3/2)} = 2^{2n+1}\frac{(n!)^2}{2n+1}.$$

因此

$$\int_{-1}^{1}v_n^2\mathrm{d}t = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_n^2(t)\mathrm{d}t = 1.$$

上式对 $n=0$ 也成立. 从而任取 $n=0,1,2,\cdots$,有 $\|v_n\|=1$.

若 $n>m\geqslant 1$,如以前一样做 m 次分部积分后可得:

$$\int_{-1}^{1}t^m y^{(n)}\mathrm{d}t = [t^m y^{(n-1)} - mt^{m-1}y^{(n-2)} + \cdots + (-1)^m m!y^{(n-m-1)}]_{-1}^{1} = 0.$$

因此

$$\int_{-1}^{1}t^m v_n\mathrm{d}t = 0.$$

上式当 $m=0$ 时也成立. 所以任给 m 阶多项式 z,及 $n>m\geqslant 0$,有

$$\langle z, v_n\rangle = \int_{-1}^{1}z(t)v_n(t)\mathrm{d}t = 0.$$

由于 $v_n\in Y_n=\mathrm{span}\{u_0,u_1,\cdots,u_n\}$,我们有

$$v_n = \sum_{j=0}^{n}\alpha_j u_j.$$

但对 $j<n$ 有 $\alpha_j=\langle v_n,u_j\rangle=0$,故有 $v_n=\alpha_n u_n$. 又由于 $\|v_n\|=\|u_n\|=1$,故 $|\alpha_n|=1$.

$\{u_n\}$是由$\{x_n\}$由如下方法得到的:$u_n=y_n/\|y_n\|$,其中

$$y_0 = x_0, \quad y_n = x_n - \sum_{i=0}^{n-1}\langle x_n,u_i\rangle u_i.$$

由于 $x_n(t)=t^n$,这说明 u_n 为实系数多项式且其最高次系数为 $1/\|y_n\|$,而 $1/\|y_n\|$ 为正的. 由 v_n 的定义知 v_n 也为实系数多项式且其最高次系数也为正的,所以我们必有 $\alpha_n=1$,即 $u_n=v_n$. ■

问题 5.2.20 若 $n=0,1,2,\cdots$,令 $x_n(t)=t^n\mathrm{e}^{-t^2/2}$,$\{u_n\}$为从$\{x_n\}$出发在 $L^2(-\infty,\infty)$中由 Gram-Schmidt 标准正交化方法得到的标准正交序列. 求证:$\{u_n\}$为 $L^2(-\infty,\infty)$的标准正交基. [$H_n(t)=(2^n n!)^{1/2}\pi^{1/4}\mathrm{e}^{t^2/2}u_n(t)$为多项式,被称为 n 阶 **Hermite 多项式**.]

解答 我们的证明思路与问题 5.2.19 类似. 由构造过程可知$\{u_n\}$为 $L^2(-\infty,\infty)$的标准正交序列. 为证它为 $L^2(-\infty,\infty)$的标准正交基,我们假设 $x\in L^2(-\infty,\infty)$使得任给$n\geqslant 0$ 有$\langle x,u_n\rangle=0$. 令

$$Y_n = \mathrm{span}\{u_0,u_1,\cdots,u_n\} = \mathrm{span}\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}.$$

则任取 $y\in Y_n$ 有$\langle x,y\rangle=0$,特别地对所有 $n\geqslant 0$ 有$\langle x,x_n\rangle=0$. 若 u 为实数,则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|x(t)|\mathrm{e}^{-t^2/2}\frac{|-\mathrm{i}tu|^n}{n!}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|\mathrm{e}^{-t^2/2+|tu|}\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\left(\int_{-\infty}^{\infty}|x|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2/2+2|tu|}\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

上式右端对任给的 u 都是有限的，所以为了求级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-t^2/2}\frac{(-\mathrm{i}tu)^n}{n!}=x(t)\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tu}$$

的积分，我们可以逐项积分. 因此

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tu}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i}u)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-t^2/2}t^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i}u)^n}{n!}\langle x,x_n\rangle=0,$$

上式对任意的 u 均成立. 这说明 $L^1(-\infty,\infty)$ 中的元 $x(t)\mathrm{e}^{-t^2/2}$ 的 Fourier 变换为 0. 因此 $x=0$ 几乎处处成立. 这就证明了 $\{u_n\}$ 为完全的. ■

问题 5.2.21 对于 $n=0,1,2,\cdots$，令 $x_n(t)=\mathrm{e}^{-t/2}t^n$. 设 $\{u_n\}$ 为由 $\{x_n\}$ 出发在 $L^2(0,\infty)$ 上由 Gram-Schmidt 标准正交化方法得到的 $L^2(0,\infty)$ 的标准正交序列. 求证：$\{u_n\}$ 为 $L^2(0,\infty)$ 的标准正交基. [$L_n(t)=\mathrm{e}^{t/2}u_n(t)$ 为多项式，称为 n 阶 **Laguerre 多项式**.]

解答 我们的证明思想与问题 5.2.20 类似. 由于 $\{u_n\}$ 为 $L^2(0,\infty)$ 的标准正交集，所以仅需证若 $x\in L^2(0,\infty)$ 使得任取 $n\geqslant 0$ 有 $\langle x,u_n\rangle=0$，则 $x=0$ 几乎处处成立. 假设 $x\in L^2(0,\infty)$ 满足任取 $n\geqslant 0$ 有 $\langle x,u_n\rangle=0$，则如在问题 5.2.20 中一样我们对任取 $n\geqslant 0$ 有 $\langle x,x_n\rangle=0$. 若 u,v 为实数，$m\geqslant 0$，则

$$\int_0^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left|x(t)\mathrm{e}^{-t/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tu}t^m\frac{(-\mathrm{i}tv)^n}{n!}\right|\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}|x(t)|\mathrm{e}^{-t/2}\mathrm{e}^{|tv|}\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\left(\int_0^{\infty}|x(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_0^{\infty}t^{2m}\mathrm{e}^{-t+2t|v|}\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

上式右端当 $2|v|<1$ 时为有限的. 所以当 $2|v|<1$ 时，为求级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-t/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tu}t^m\frac{(-\mathrm{i}tv)^n}{n!}=x(t)\mathrm{e}^{-t/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(u+v)}t^m$$

的积分，我们可以逐项积分. 从而若 $|v|<1/2$ 且

$$g_m(u)=\int_0^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-t/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tu}t^m\mathrm{d}t,$$

则

$$g_m(u+v)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-t/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tu}t^m\frac{(-\mathrm{i}tv)^n}{n!}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i}v)^n}{n!}g_{m+n}(u).$$

因此，若任取 $n\geqslant 0$ 有 $g_n(u)=0$，则任取 $m\geqslant 0$ 及 $|v|<1/2$ 有 $g_m(u+v)=0$. 但是若 $n\geqslant 0$ 有

$$g_n(0)=\int_0^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-t/2}t^n\mathrm{d}t=\langle x,x_n\rangle=0.$$

由此推知任取实数 u 及 $m\geqslant 0$ 有 $g_m(u)=0$. 由于 $g_0(u)$ 为函数 $x(t)\mathrm{e}^{-t/2}$ 限制在 $(0,\infty)$ 上的

Fourier 变换，从而 $x(t)e^{-t/2}=0$ 对几乎所有的 t 成立. 因此 $x=0$ 几乎处处成立. ■

5.3 正交补及泛函的表示

设 H 为 Hilbert 空间，F 为 H 的闭子空间，$F^{\perp}$ 为所有与 F 正交元素的全体，则 H 中每一元 x 可以唯一地表示为

$$x=y+z,\quad y\in F,\quad z\in F^{\perp}.$$

事实上，y 为 x 在 F 上的最佳逼近元，且 y 为 x 在 F 上的投影.

设 $y\in H$，定义 $f:H\to\mathbb{K}$ 为

$$f(x)=\langle x,y\rangle,\quad x\in H. \tag{1}$$

则 f 为 H 上的有界线性泛函且 $\|f\|=\|y\|$ [见问题 5.3.8]. 另外，任取 H 上的有界线性泛函 f，存在 H 中的唯一元 y 使得(1)式成立. 这个结果被称为 Riesz **表示定理**，存在的唯一元 y 称为 f 的**表示**.

作为 Riesz 表示定理的推论，对于 Hilbert 空间我们有：

(i) $x_n\xrightarrow{w}x$ 当且仅当任取 $y\in H$ 有 $\langle x_n,y\rangle\to\langle x,y\rangle$.

(ii) H 的非空子集 E 的零化子为

$$\{x'\in H':T(x')\in E^{\perp}\},$$

其中 $T(x')$ 为 x' 的表示.

练习

1. 设 $H=\mathbb{R}^3$，F 为所有 H 中的元 $x=(x(1),x(2),x(3))$ 使得 $x(3)=0$. 求 $F^{\perp}$. 验证 H 中每一元 x 可以表示为 $x=y+z$，其中 $y\in F,z\in F^{\perp}$.

2. 设 $H=\mathbb{R}^2$，F 为所有 H 中的元 $x=(x(1),x(2))$ 使得 $x(1)+2x(2)=0$. 求 $F^{\perp}$. 验证 H 中每一元 x 可以表示成 $x=y+z$，其中 $y\in F,z\in F^{\perp}$.

3. 给出在 3.2 节定义的弱收敛性. 设 H 为 Hilbert 空间，利用 Riesz 表示定理证明：$x_n\xrightarrow{w}x$ 当且仅当任取 $y\in H$ 有 $\langle x_n,y\rangle\to\langle x,y\rangle$.

4. 给出在问题 3.1.9 中关于赋范空间子集零化 z 的定义. 设 E 为 Hilbert 空间 H 的非空子集，求证：E 的零化子为集合 $\{x'\in H':T(x')\in E^{\perp}\}$，其中 $T(x')$ 为泛函 x' 的表示.

5. 设 $H=\mathbb{R}^3$. 定义 $f\in H'$ 为

$$f(x)=2x(1)+x(2)-x(3),$$
$$x=(x(1),x(2),x(3)).$$

求 f 的表示.

问题

问题 5.3.1 若 M 为内积空间 X 的非空子集. 求证：M 的正交补为 X 的闭子空间.

解答 若 $x,y\in M^{\perp}$ 及 $k\in\mathbb{K}$，对任意的 $z\in M$ 有

$$\langle kx+y,z\rangle = k\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle = 0,$$

其中我们用到了 $\langle x,z\rangle=0=\langle y,z\rangle$. 故有 $kx+y\in M^{\perp}$. 所以 $M^{\perp}$ 为 X 的子空间.

设 x 为 z 空间 $M^{\perp}$ 的闭包中一元，则存在 $M^{\perp}$ 中一列元 x_n 使得 $x_n\to x$. 因此任取 z 有 $\langle x_n,z\rangle\to\langle x,z\rangle$. 若 $z\in M$，则任取 n 有 $\langle x_n,z\rangle=0$，从而有 $\langle x,z\rangle=0$. 因此 $x\in M^{\perp}$，从而 $M^{\perp}$ 为闭子空间. ■

问题 5.3.2 设 A,B 为内积空间 X 的非空子集且 $A\subset B$. 求证：

(a) $B^{\perp}\subset A^{\perp}$；

(b) $A\subset A^{\perp\perp}$；

(c) $A^{\perp\perp\perp}=A^{\perp}$.

举例说明(a)和(b)中的包含关系可以是等式，也可以是严格的包含关系.

解答 设 $x\in B^{\perp}$ 及 $y\in A$. 则 $y\in B$，从而 $\langle x,y\rangle=0$. 因此若 $x\in B^{\perp}$，则任取 $y\in A$ 有 $\langle x,y\rangle=0$，从而 $x\in A^{\perp}$，这就证明了(a).

设 $x\in A$ 及 $y\in A^{\perp}$，则 $\langle x,y\rangle=0$. 因此，若 $x\in A$，则任取 $y\in A^{\perp}$ 都有 $\langle x,y\rangle=0$，从而 $x\in A^{\perp\perp}$. 这就证明了(b).

利用(a)再利用(b)得 $A^{\perp\perp\perp}\subset A^{\perp}$. 在(b)中用 $A^{\perp}$ 代替 A 则可以得到反方向包含关系. 这说明(c)成立.

设 B 为 X 的非零子空间及 $A=\{0\}$. 由于任取 x 有 $\langle x,0\rangle=0$，故任取 x 有 $x\in A^{\perp}$，即 $A^{\perp}=X$. 若 $x\in B$ 且 $x\in B^{\perp}$，则 $\langle x,x\rangle=0$，即 $x=0$. 因此若 $x\in B$ 且 $x\neq 0$，则有 $x\notin B^{\perp}$. 从而有 $B^{\perp}\subsetneq X=A^{\perp}$. 这说明(a)的包含关系可以是严格的.

如上面一样，设 B 为 X 的非零子空间，A 为从 B 中去掉一个非零元 u 所得到的集合. 则有 $A\subsetneq B$. 若 $x\in A^{\perp}$，则

$$\langle x,u\rangle = -\langle x,-u\rangle = 0$$

这是由于 $-u\in A$. 因此任取 $y\in B$ 有 $\langle x,y\rangle=0$，即 $x\in B^{\perp}$. 因此 $A^{\perp}\subset B^{\perp}$. 由(a)知 $A^{\perp}=B^{\perp}$. 所以(a)中可以是等式. 若 $x\in B^{\perp}$，则由于 $u\in B$ 有 $\langle x,u\rangle=0$. 因此，对于所有的 $x\in B^{\perp}=A^{\perp}$ 有 $u\perp x$. 从而 $u\in A^{\perp\perp}$，但 $u\notin A$. 这说明(b)中的包含关系可以是严格的.

最后，若 $A=E^{\perp}$，其中 $E\subset X$. 则由(c)知

$$A^{\perp\perp}=E^{\perp\perp\perp}=E^{\perp}=A.$$

故(b)中的包含关系可以是等式. ■

问题 5.3.3 设 Y 和 Z 为内积空间 X 的两个子空间，求证：

$$Y^{\perp\perp}+Z^{\perp\perp}\subset(Y+Z)^{\perp\perp}.$$

解答 由于 Y 和 Z 为子空间，故若 $y\in Y$，则

$$y=y+0\in Y+Z.$$

因此 $Y\subset Y+Z$，类似地有 $Z\subset Y+Z$. 若 $A\subset B$，由问题 5.3.2 知有 $B^{\perp}\subset A^{\perp}$ 及 $A^{\perp\perp}\subset B^{\perp\perp}$. 从而

$$Y^{\perp\perp}\subset(Y+Z)^{\perp\perp},\qquad Z^{\perp\perp}\subset(Y+Z)^{\perp\perp}.$$

由于非空子集 M 的正交补 $M^{\perp}$ 总为子空间，所以 $(Y+Z)^{\perp\perp}$ 为包含 $Y^{\perp\perp}$ 及 $Z^{\perp\perp}$ 的子空间. 因此

$$Y^{\perp\perp}+Z^{\perp\perp}\subset(Y+Z)^{\perp\perp}.$$

这就完成了证明. ■

问题 5.3.4 设 Y 为内积空间的完备子空间，求证：

(a) $X=Y\oplus Y^{\perp}$，即 X 中任一元 x 可以唯一地表示为

$$x=y+z,\quad y\in Y,\quad z\in Y^{\perp}.$$

(b) $Y^{\perp\perp}=Y$.

证明在(a)和(b)中 Y 的完备性是必要的.

解答 (a) 设 $x\in X$，$d=\inf\{\|x-z\|:z\in Y\}$. 则存在 Y 中序列 $\{z_n\}$ 使得 $\|x-z_n\|\to d$. 由于 Y 为凸子集，由问题 5.1.19 的证明过程知 $\{z_n\}$ 为 Y 中的柯西列. 由于 Y 为完备的，故存在 $y\in Y$ 使得 $z_n\to y$. 因此

$$d=\lim_{n\to\infty}\|x-z_n\|=\|x-y\|.$$

这说明 y 为 x 在 Y 上的最佳逼近元. 由问题 5.1.16(a)知 $x-y\perp Y$，因此若 $z=x-y$，则有

$$x=y+z,\quad y\in Y,\quad z\in Y^{\perp}.$$

为证唯一性，设 $x=y_1+z_1$ 为 x 的另外一个表示，$y_1\in Y$，$z_1\in Y^{\perp}$. 则 $y-y_1=z_1-z$. 但 $y-y_1\in Y$，$z_1-z\in Y^{\perp}$，这是因为 Y 和 $Y^{\perp}$ 都为 X 的子空间. 从而

$$0=\langle y-y_1,z_1-z\rangle=\langle y-y_1,y-y_1\rangle.$$

所以 $y=y_1$ 及 $z=z_1$. 这就证明了(a).

(b) 由问题 5.3.2，我们有 $Y\subset Y^{\perp\perp}$. 为证反方向包含关系，设 $x\in Y^{\perp\perp}$. 则有

$$x=y+z,\quad y\in Y,\quad z\in Y^{\perp}.$$

因此有 $\langle y,z\rangle=0$ 及 $\langle x,z\rangle=0$. 从而

$$\langle z,z\rangle=\langle x-y,z\rangle=0.$$

这说明 $z=0$，$x=y\in Y$. 这证明了(b).

为证 Y 的完备性不可以去掉，设 $X=l^2$，$Y=c_{00}$. 则 Y 不为闭子集从而 Y 不为完备的. 若 $x\in Y^{\perp}$，e_j 为第 j 个单位向量，则 $e_j\in Y$. 因而

$$x(j)=\langle x,e_j\rangle=0$$

对所有的 $j\geqslant 1$ 成立. 因此 $x=0$. 这就证明了 $Y^{\perp}=\{0\}$. 从而

$$Y^{\perp\perp}=\{0\}^{\perp}=X\neq Y.$$

这说明在这种情况下(b)不成立. 若 $x\in X, x\notin Y$. 则 x 不可能写成 $x=y+z$, 其中 $y\in Y, z\in Y^{\perp}=\{0\}$, 这说明(a)也不成立. ■

问题 5.3.5 求证:

(a) 若 S 为内积空间 X 的非空子集且 $Y=\overline{\text{span}}S$, 则 $S^{\perp}=Y^{\perp}$.

(b) 若 M 为 Hilbert 空间 H 的非空子集, 则有 $M^{\perp\perp}=\overline{\text{span}}M$.

解答 (a) 设 $Z=\text{span}S$, 则有 $S\subset Z\subset Y$, 由问题 5.3.2(a)知 $Y^{\perp}\subset S^{\perp}$. 为证反方向包含关系, 设 $x\in S^{\perp}$, 则任取 $u\in S$ 有 $\langle x,u\rangle=0$. 若 $z\in Z$,

$$z=k_1u_1+\cdots+k_nu_n,\quad u_i\in S,$$

则必有 $\langle x,z\rangle=0$. 设 $y\in Y$, 则存在 Z 中序列 $\{z_n\}$ 使得 $z_n\to y$. 所以 $\langle x,z_n\rangle\to\langle x,y\rangle$, 但对所有 n 有 $\langle x,z_n\rangle=0$, 故有 $\langle x,y\rangle=0$. 这对所有的 $y\in Y$ 成立, 从而有 $x\in Y^{\perp}$. 所以有 $S^{\perp}\subset Y^{\perp}$. (a)得证.

(b) 设 $Y=\overline{\text{span}}M$, 则由(a)有 $Y^{\perp}=M^{\perp}$. 由于 Y 为 Hilbert 空间 H 的闭子空间, 所以 Y 为完备的. 利用问题 5.3.4(b)得 $Y^{\perp\perp}=Y$. 因此 $M^{\perp\perp}=Y^{\perp\perp}=Y$. 这就完成了证明. ■

问题 5.3.6 设 F_1, F_2 为 Hilbert 空间 H 的闭子空间. 求证:

(a) $(F_1\cap F_2)^{\perp}$ 等于 $F_1^{\perp}+F_2^{\perp}$ 的闭包.

(b) 若 $F_1\perp F_2$, 则 F_1+F_2 为闭子空间.

证明即使 F_1 和 F_2 为闭子空间, F_1+F_2 也不一定为闭的.

解答 (a) 由于 $F_1\cap F_2\subset F_1, F_1\cap F_2\subset F_2$, 由问题 5.3.2 知

$$F_1^{\perp}\subset(F_1\cap F_2)^{\perp},\quad F_2^{\perp}\subset(F_1\cap F_2)^{\perp}.$$

因此 $(F_1\cap F_2)^{\perp}$ 为包含 $F_1^{\perp}$ 及 $F_2^{\perp}$ 的闭子空间, 从而 $(F_1\cap F_2)^{\perp}$ 包含 $F_1^{\perp}+F_2^{\perp}$. 所以若 F 为 $F_1^{\perp}+F_2^{\perp}$ 的闭包, 则有

$$F\subset(F_1\cap F_2)^{\perp}. \tag{2}$$

另外

$$F_1^{\perp}\subset F,\quad F_2^{\perp}\subset F;\quad F^{\perp}\subset F_1^{\perp\perp},\quad F^{\perp}\subset F_2^{\perp\perp}.$$

但是 F_1, F_2 及 F 都为 Hilbert 空间的闭子空间, 故由问题 5.3.4(b)知

$$F_1^{\perp\perp}=F_1,\quad F_2^{\perp\perp}=F_2,\quad F^{\perp\perp}=F.$$

因此

$$F^{\perp}\subset F_1,\quad F^{\perp}\subset F_2,\quad F^{\perp}\subset F_1\cap F_2,$$
$$(F_1\cap F_2)^{\perp}\subset F^{\perp\perp}=F.$$

上式和(2)式一起证明了(a).

(b) 设 x 为 F_1+F_2 闭包中一元. 则存在 F_1+F_2 中一列元 $\{x_n\}$ 使得 $x_n\to x$. 而

$$x_n=y_n+z_n,\quad y_n\in F_1,\quad z_n\in F_2.$$

由假设 $F_1\perp F_2$, 故对所有 m,n 有:

$$\|x_n-x_m\|^2=\|(y_n-y_m)+(z_n-z_m)\|^2=\|y_n-y_m\|^2+\|z_n-z_m\|^2.$$

这证明了 $\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$ 分别为 F_1 和 F_2 的柯西列. 但 F_1 和 F_2 在 H 中为闭的, 故 F_1 和 F_2 均

完备. 因此存在 $y\in F_1, z\in F_2$ 使得 $y_n\to y, z_n\to z$. 从而 $x_n\to y+z$. 所以 $x=y+z\in F_1+F_2$. 这就证明了 F_1+F_2 为闭集.

为证此问题的最后一部分,取 $H=l^2$. 设

$$F_1=\{x\in l^2: x(2j)=0, j\geqslant 1\},$$

$$F_2=\{x\in l^2: x(2j-1)=jx(2j), j\geqslant 1\}.$$

易见 F_1 和 F_2 为 l^2 的子空间. 若在 l^2 中 $x_n\to x$,则对每一个 $j, x_n(j)\to x(j)$. 由此易知 F_1 和 F_2 为闭的. 设 l_n 为第 n 个单位向量,

$$y_n=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2j-1}-\frac{1}{2}\right)e_{2j-1},$$

$$z_n=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}e_{2j-1}+\frac{1}{2j}e_{2j}\right).$$

则 $y_n\in F_1$,

$$z_n(2j-1)=\frac{1}{2},\quad z_n(2j)=\frac{1}{2j},\quad 1\leqslant j\leqslant n,$$

$$z_n(2j-1)=0=z_n(2j),\quad j>n.$$

故有 $z_n\in F_2$. 易见

$$y_n+z_n=\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{i}e_i.$$

因此若任取 m 取 $x(m)=\frac{1}{m}$,则 $x\in l^2$ 且 $y_n+z_n\to x$. 从而 $x\in\overline{F_1+F_2}$. 假设 $x=y+z, y\in F_1, z\in F_2$. 则

$$\frac{1}{2j}=x(2j)=y(2j)+z(2j)=z(2j),\qquad z(2j-1)=jz(2j)=\frac{1}{2}.$$

由于 $z\in l^2$,故这是不可能的. 这样我们就证明了 F_1+F_2 不为闭集. ■

问题 5.3.7 设 Y 为 Hilbert 空间 H 的闭子空间. 求证 X/Y 线性等距同构于 $Y^{\perp}$.

解答 设 $Z=Y^{\perp}$. 定义 $T: Z\to X/Y$ 为

$$T(z)=z+Y,\quad z\in Z.$$

关系式

$$k(z_1+Y)+(z_2+Y)=kz_1+z_2+Y$$

说明 T 为线性算子. 若 $z\in Z$ 使得 $T(z)$ 为 X/Y 的零元,则有 $z\in Y$,从而 $z=0$,这是由于 $Y\cap Z=Y\cap Y^{\perp}=\{0\}$. 这证明了 T 为单射. 若 $x+Y$ 为 X/Y 中任一元,则有

$$x=y+z,\quad y\in Y,\quad z\in Y^{\perp}=Z,$$

我们有

$$x+Y=y+z+Y=z+Y=T(z).$$

因此 T 为满射.

若 $z\in Z$. 任取 $y\in Y$ 有 $\langle y,z\rangle=0$,从而

$$\| y+z \|^2 = \| y \|^2 + \| z \|^2 \geqslant \| z \|^2.$$

所以

$$\inf\{ \| z+y \| : y \in Y \} = \| z \|,$$

即 $\| z+Y \| = \| z \|$. 这说明 T 为等距. 所以 T 为从 Z 到 X/Y 的一一线性等距. ■

问题 5.3.8 设 z 为内积空间 X 一固定元. 求证:

$$f(x) = \langle x, z \rangle, \quad x \in X$$

定义了 X 上范数为 $\| z \|$ 的有界线性泛函. 证明若映射 $X \to X'$, $z \mapsto f$ 为满射,则 X 必为 Hilbert 空间.

解答 f 的线性性由下式给出:

$$\langle kx+y, z \rangle = k\langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.$$

由 Schwarz 不等式有

$$| f(x) | = | \langle x, z \rangle | \leqslant \| z \| \| x \|, \quad x \in X.$$

因此 f 为有界线性泛函且 $\| f \| \leqslant \| z \|$. 又 $f(z) = \langle z, z \rangle$,故有

$$\| z \|^2 = | f(z) | \leqslant \| f \| \| z \|.$$

这可以推出 $\| z \| \leqslant \| f \|$. 从而有 $\| f \| = \| z \|$. 这就证明了问题的第一部分.

为证第二部分,设映射 $z \mapsto f$ 为满射. 设 $\{z_n\}$ 为 X 的柯西列. 任取 $m, n \geqslant N$ 有 $\| z_n - z_m \| < \varepsilon$. 则任取 $x \in X$,只要 $m, n \geqslant N$ 就有

$$| \langle x, z_n \rangle - \langle x, z_m \rangle | = | \langle x, z_n - z_m \rangle | \leqslant \| x \| \| z_n - z_m \| \leqslant \varepsilon \| x \|. \tag{3}$$

这说明任取 $x \in X$, $\{\langle x, z_n \rangle\}$ 为纯量柯西列,故这个序列收敛. 设

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \langle x, z_n \rangle, \quad x \in X.$$

由于

$$\langle kx+y, z_n \rangle = k\langle x, z_n \rangle + \langle y, z_n \rangle$$

所以 f 为线性的. 又由于任意柯西列均有界,从而存在 α,对所有的 n 有 $\| z_n \| \leqslant \alpha$. 则

$$| \langle x, z_n \rangle | \leqslant \| x \| \| z_n \| \leqslant \alpha \| x \|.$$

令 $n \to \infty$ 有

$$| f(x) | \leqslant \alpha \| x \|, \quad x \in X.$$

故有 $f \in X'$. 由题设知存在 $z \in X$ 使得 $f(x) = \langle x, z \rangle$ 对所有 $x \in X$ 成立.

在(3)式中固定 x 和 n,令 $m \to \infty$ 有

$$| \langle x, z_n \rangle - f(x) | \leqslant \varepsilon \| x \|.$$

因此只要 $n \geqslant N$ 就有

$$| \langle z_n, z_n \rangle - f(z_n) | \leqslant \varepsilon \| z_n \| \leqslant \alpha\varepsilon,$$

$$| \langle z, z_n \rangle - f(z) | \leqslant \varepsilon \| z \|.$$

又

$$\begin{aligned} \langle z_n - z, z_n - z \rangle &= \langle z_n, z_n \rangle - \langle z_n, z \rangle - \langle z, z_n \rangle + \langle z, z \rangle \\ &= \langle z_n, z_n \rangle - f(z_n) - \langle z, z_n \rangle + f(z), \end{aligned}$$

所以当 $n\geqslant N$ 时

$$\| z_n - z \|^2 \leqslant | \langle z_n, z_n \rangle - f(z_n) | + | \langle z, z_n \rangle - f(z) | \leqslant \alpha\varepsilon + \varepsilon \| z \| .$$

由于 $\varepsilon>0$ 为任意的，这说明 $z_n \to z$. 从而 X 中任意柯西列均收敛，所以 X 为 Hilbert 空间.

■

问题 5.3.9 求证：Riesz 表示定理对一般的内积空间不成立.

解答 设 $H=l^2$，$X=c_{00}$. 则 X 为 H 的子空间. l^2 上的内积使 X 成为内积空间. 对 $x\in X$，

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x(n)$$

在 $\mathbb{K}$ 中存在. 它给出了 X 上的线性泛函 f. 由 Schwanz 不等式：

$$| f(x) | \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} | x(n) | \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \| x \|_2 ,$$

故 f 为有界线性泛函. 假设 Riesz 表示定理对 X 成立，则存在 $y\in X$，使得任取 $x\in X$ 有 $f(x)=\langle x, y\rangle$. 若 e_j 为 X 的第 j 个单位向量，则 $e_j \in X$，故

$$y(j) = \langle y, e_j \rangle = \overline{f(e_j)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_j(n) = \frac{1}{j}.$$

因此对所有的 $j=1,2,\cdots$，有 $y(j)=\frac{1}{j}$. 这样的 y 不在 X 中，矛盾. 所以 Riesz 表示定理对 X 不成立.

■

问题 5.3.10 设 X 为内积空间，求证：$x_n \to x$ 当且仅当 $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ 对 $y\in X$，$\| y \| =1$ 是一致的.

解答 若 $x_n \to x$，则对于 $y\in X$，$\| y \| =1$ 有

$$| \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle | = | \langle x_n - x, y\rangle | \leqslant \| x_n - x \| \, \| y \| = \| x_n - x \| .$$

这说明 $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ 对 $y\in X$，$\| y \| =1$ 为一致的.

反之，若 $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ 对 $y\in X$，$\| y \| =1$ 为一致的. 任给 $\varepsilon>0$，存在 N 使得任取 $n\geqslant N$，$y\in X$，$\| y \| =1$ 有

$$| \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle | < \varepsilon. \tag{4}$$

对于固定的 n，令

$$f_n(z) = \langle z, x_n - x\rangle, \quad z\in X.$$

则 f_n 为 X 上的有界线性泛函且 $\| f_n \| = \| x_n - x \|$，此处我们用到了问题 5.3.8. 若 $n\geqslant N$ 且 $z\neq 0$，则由(4)式有

$$| f_n(z) | = | \langle x_n - x, z\rangle | = \| z \| \left| \left\langle x_n - x, \frac{z}{\| z \|} \right\rangle \right|$$

$$= \| z \| \left| \left\langle x_n, \frac{z}{\| z \|} \right\rangle - \left\langle x, \frac{z}{\| z \|} \right\rangle \right| < \| z \| \varepsilon.$$

从而有 $\| f_n \| \leqslant \varepsilon$. 这说明若 $n \geqslant N$ 则有

$$\| x_n - x \| \leqslant \varepsilon.$$

所以 $x_n \to x$. ■

问题 5.3.11 设 H 为 Hilbert 空间. 求证 H' 也为 Hilbert 空间且 H 为自反的.

解答 Riesz 表示定理说明对每一个 $x' \in H'$, 存在唯一的 $y \in H$ 使得 $\| y \| = \| x' \|$ 且

$$x'(x) = \langle x, y \rangle, \quad x \in H.$$

这个 y 就是 x' 的表示 $T(x')$. 因此 $\| T(x') \| = \| x' \|$ 且

$$x'(x) = \langle x, T(x') \rangle, \quad x \in H, \quad x' \in H'.$$

若 $x', y' \in H'$, 则任取 $x \in H$,

$$\begin{aligned} \langle x, T(kx' + y') \rangle &= (kx' + y')(x) \\ &= kx'(x) + y'(x) \\ &= k\langle x, T(x') \rangle + \langle x, T(y') \rangle \\ &= \langle x, \bar{k}T(x') + T(y') \rangle. \end{aligned}$$

这证明了

$$T(kx' + y') = \bar{k}T(x') + T(y'). \tag{5}$$

对于 $x', y' \in H'$, 令

$$\langle x', y' \rangle = \langle T(y'), T(x') \rangle. \tag{6}$$

利用(5)式得

$$\begin{aligned} \langle kx' + y', z' \rangle &= \langle T(z'), T(kx' + y') \rangle \\ &= \langle T(z'), \bar{k}T(x') + T(y') \rangle \\ &= k\langle T(z'), T(x') \rangle + \langle T(z'), T(y') \rangle \\ &= k\langle x', z' \rangle + \langle y', z' \rangle. \end{aligned}$$

显然有

$$\langle y', x' \rangle = \langle T(x'), T(y') \rangle = \overline{\langle x', y' \rangle},$$
$$\langle x', x' \rangle = \langle T(x'), T(x') \rangle = \| T(x') \|^2 = \| x' \|^2.$$

因此(6)式定义了 H' 上的一个内积且这个内积在 H' 导出的范数与 H' 上原范数一致. 又由于赋范空间 X 的对偶空间总是完备的, 所以 H' 为完备的, 从而 H' 为 Hilbert 空间.

设 $f \in H''$, 由 H' 为 Hilbert 空间及 Riesz 表示定理, 存在唯一的 $y' \in H'$ 使得 $\| y' \| = \| f \|$ 且

$$f(x') = \langle x', y' \rangle, \quad x' \in H'.$$

设 $T(y') = y \in H$, 则任取 $x' \in H'$,

$$f(x') = \langle x', y' \rangle = \langle T(y'), T(x') \rangle = \langle y, T(x') \rangle = x'(y) = (Jy)(x'),$$

其中 $J: H \to H''$ 为典范映射. 因此 $f = J(y)$. 这就完成了证明. ■

问题 5.3.12 设 Y 为 Hilbert 空间 H 的子空间, g 为 Y 上的连续线性泛函. 利用 Riesz

表示定理证明存在唯一的 $f\in H'$ 使得 $f|_Y=g$ 且 $\|f\|=\|g\|$.

解答 设 $y\in\overline{Y}$,则存在 Y 中序列 $\{y_n\}$ 使得 $y_n\to y$. 此时,$\{y_n\}$ 为柯西列且

$$|g(y_n)-g(y_m)|=|g(y_n-y_m)|\leqslant\|g\|\,\|y_n-y_m\|.$$

这说明 $\{g(y_n)\}$ 为纯量柯西列,因而必收敛. 若 $\{z_n\}$ 为 Y 中另一序列使得 $z_n\to y$,则

$$|g(y_n)-g(z_n)|=|g(y_n-z_n)|\leqslant\|g\|\,\|y_n-z_n\|,$$

因此 $\{g(y_n)\}$ 和 $\{g(z_n)\}$ 收敛到同一极限. 由此我们可以定义 $h:\overline{Y}\to\mathbb{K}$ 为

$$h(y)=\lim_{n\to\infty}g(y_n),$$

其中 $\{y_n\}$ 为 Y 中序列且 $y_n\to y$.

若 $y\in Y$,我们可以取 $y_n=y$,故有 $h(y)=g(y)$. 因此 $h|_Y=g$. 若 $y_n\to y$,$z_n\to z$,其中 y_n,$z_n\in Y$,则 $ky_n+z_n\to ky+z$ 且

$$g(ky_n+z_n)=kg(y_n)+g(z_n).$$

所以有

$$h(ky+z)=kh(y)+h(z).$$

从而 h 为 $\overline{Y}$ 上的线性泛函. 若 $y_n\to y$,则

$$|g(y_n)|\leqslant\|g\|\,\|y_n\|\to\|g\|\,\|y\|;$$

所以对 $y\in\overline{Y}$ 有 $|h(y)|\leqslant\|g\|\,\|y\|$. 因此 h 为 $\overline{Y}$ 上的有界线性泛函且 $\|h\|\leqslant\|g\|$. 另外,若 $y\in Y$,

$$|g(y)|=|h(y)|\leqslant\|h\|\,\|y\|,$$

这可以推出 $\|g\|\leqslant\|h\|$. 因此 $\|h\|=\|g\|$.

由于 H 为 Hilbert 空间,故 $\overline{Y}$ 为 Hilbert 空间. 因此由 Riesz 表示定理,存在 $z\in\overline{Y}$ 使得 $\|z\|=\|h\|$ 且

$$h(y)=\langle y,z\rangle,\quad y\in\overline{Y}.$$

令

$$f(x)=\langle x,z\rangle,\quad x\in H.$$

则 $f\in H'$,$\|f\|=\|z\|=\|h\|=\|g\|$ 且

$$f(y)=h(y)=g(y),\quad y\in Y.$$

这就证明了 f 的存在性.

为证 f 的唯一性,设 f_1 为 H' 中满足上述要求的元,若 z_1 为 f 的代表,则

$$\|z_1\|=\|f_1\|=\|g\|=\|f\|=\|z\|,$$

$$f(y)=g(y)=f_1(y),\quad y\in Y.$$

因此

$$\{x\in H:f_1(x)=f(x)\}$$

为包含 Y 的闭子空间,因此也包含 $\overline{Y}$. 由于 $z\in\overline{Y}$,故

$$f_1(z)=f(z)=\langle z,z\rangle=\|z\|^2=\|z_1\|^2.$$

因此

$$\langle z-z_1,z-z_1\rangle=\langle z,z\rangle-\langle z,z_1\rangle-\langle z_1,z\rangle-\langle z_1,z_1\rangle$$
$$=\|z\|^2-f_1(z)-\overline{f_1(z)}+\|z_1\|^2=0.$$

从而 $z=z_1$，$f=f_1$. ■

问题 5.3.13 设 F 为 Hilbert 空间的闭子空间，$a\in H$，$a\notin F$. 求证：存在唯一的 $f\in H'$，使得 $f(a)=d(a,F)$，任取 $x\in F$ 有 $f(x)=0$ 且 $\|f\|=1$.

解答 存在 b,c 使得

$$a=b+c,\quad b\in F,\quad c\in F^{\perp}.$$

由于 $a-b=c\in F^{\perp}$，故 b 为 a 在 F 上的最佳逼近元. 进一步地，由于 $a\notin F$，故 $c\neq 0$. 令

$$y=\frac{c}{\|c\|},\quad f(x)=\langle x,y\rangle,\quad x\in H.$$

则 $f\in H'$，$\|f\|=\|y\|=1$. 若 $x\in F$，则

$$f(x)=\left\langle x,\frac{c}{\|c\|}\right\rangle=0.$$

因此任取 $x\in F$ 有 $f(x)=0$. 又

$$f(a)=\left\langle a,\frac{c}{\|c\|}\right\rangle=\frac{1}{\|c\|}\langle b+c,c\rangle=\frac{1}{\|c\|}\langle c,c\rangle=\|c\|$$

且 $d(a,F)=\|a-b\|=\|c\|$，故 $f(a)=d(a,F)$.

为证 f 的唯一性，设 $f,f_1\in H'$，$\|f\|=\|f_1\|=1$ 任取 $x\in F$ 有 $f(x)=f_1(x)=0$ 且 $f_1(a)=f(a)=d(a,F)$. 由 Riesz 表示定理，存在 $y,y_1\in H$ 使得

$$f(x)=\langle x,y\rangle,\quad x\in H,$$
$$f_1(x)=\langle x,y_1\rangle,\quad x\in H.$$

由假设知 $y,y_1\in F^{\perp}$ 且 $\|y\|=\|y_1\|=1$. 若

$$a=b+c,\quad b\in F,\quad c\in F^{\perp},$$

则由 $d(a,F)=\|c\|$ 知 $f(a)=f_1(a)=\|c\|$. 而 $f(a)=\langle b+c,y\rangle=\langle c,y\rangle$，$f_1(a)=\langle b+c,y_1\rangle=\langle c,y_1\rangle$. 故 $\|c\|=\langle c,y\rangle=\langle c,y_1\rangle$. 又由于 $\|y\|=\|y_1\|=1$，故 $|\langle c,y\rangle|=\|c\|\,\|y\|$，$|\langle c,y_1\rangle|=\|c\|\,\|y_1\|$. 由 Schwarz 不等式为等式的充分必要条件知 y 与 c 线性相关，y_1 与 c 线性相关，从而 y 与 y_1 线性相关，再由 $\|c\|=\langle c,y\rangle=\langle c,y_1\rangle$ 知 $y=y_1$. 从而 $f=f_1$.[①] ■

问题 5.3.14 设 $H=L^2[-1,1]$ 且对 $|t|\neq 0,1/n,2/n,\cdots,1$，令

$$x_n(t)=\frac{\sin(\pi nt)}{|\sin(\pi nt)|}.$$

求证：即使对几乎所有的 $t\in[-1,1]$ 有 $x_n(t)=\pm 1$，也有 $x_n\xrightarrow{w}0$.

解答 由于 $\sin(\pi nt)$ 仅在对某一整数 m 有 $\pi nt=m\pi$ 时为 0，故若 t 不在集合

① 译注：原文没有证明唯一性，此唯一性证明系由译者补上的.

$$\left\{0,\pm\frac{1}{n},\pm\frac{2}{n},\cdots\right\}$$

中时有 $x_n(t)=\pm1$. 由于上述集合为零测集，故 x_n 几乎处处为 ±1.

若 y 为$[-1,1]$上的连续函数，则 y 为一致连续的. 对每一 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得若 $s,t\in[-1,1]$，$|s-t|<\delta$，则

$$|\,y(s)-y(t)\,|<\varepsilon.$$

取 n 足够大使得$\frac{2}{n}<\delta$. 若

$$\frac{m}{n}<t<\frac{m+1}{n},\quad \alpha=\pi nt-m\pi,$$

则

$$0<\alpha<\pi,\quad \sin(\pi nt)=(-1)^m\sin\alpha.$$

因此若$\frac{m}{n}<t<\frac{m+1}{n}$，则

$$x_n(t)=(-1)^m.$$

由积分中值定理知

$$\int_{m/n}^{(m+1)/n}x_n(t)y(t)\mathrm{d}t=(-1)^m\frac{1}{n}y(t_m),$$

其中 $m/n\leqslant t_m\leqslant(m+1)/n$. 因此

$$\begin{aligned}\int_{m/n}^{(m+2)/n}x_n(t)y(t)\mathrm{d}t&=(-1)^m\frac{1}{n}y(t_m)+(-1)^{m+1}\frac{1}{n}y(t_{m+1})\\&=\frac{(-1)^m}{n}[y(t_m)-y(t_{m+1})].\end{aligned}$$

由于$|t_m-t_{m+1}|\leqslant\frac{2}{n}<\delta$，故有

$$\left|\int_{m/n}^{(m+2)/n}x_n(t)y(t)\mathrm{d}t\right|=\frac{1}{n}\,|\,y(t_m)-y(t_{m+1})\,|<\frac{1}{n}\varepsilon.$$

对 $m=-n,-n+2,\cdots,n-2$ 利用上式然后求和得

$$\left|\int_{-1}^{1}x_n(t)y(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\sum_{r=0}^{n-1}\left|\int_{(-n+2r)/n}^{(-n+2r+2)/n}x_ny\,\mathrm{d}t\right|<\varepsilon.$$

因此若 $n>\frac{2}{\delta}$，则有$|\langle y,x_n\rangle|<\varepsilon$. 这就证明了若 y 为$[-1,1]$上的连续函数则当 $n\to\infty$时有 $\langle x_n,y\rangle\to0$.

设 $f\in H'$则存在 $z\in H$ 使得

$$f(x)=\langle x,z\rangle,\quad x\in H.$$

由于连续函数在 $H=L^2[-1,1]$中稠密，对给定的 $\varepsilon>0$，存在$[-1,1]$上的连续函数 y 使得 $\|y-z\|<\varepsilon$. 因此

$$|\langle x_n,z\rangle|=|\langle x_n,z-y\rangle+\langle x_n,y\rangle|\leqslant\|x_n\|\,\|z-y\|+|\langle x_n,y\rangle|.$$

但

$$\langle x_n, x_n \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \mathrm{d}t = 2,$$

所以对足够大的 n：

$$| f(x_n) | = | \langle x_n, z \rangle | \leqslant \sqrt{2}\varepsilon + | \langle x_n, y \rangle | < (\sqrt{2}+1)\varepsilon.$$

这说明当 $n \to \infty$ 时，$f(x_n) \to 0$. 即 $x_n \xrightarrow{w} 0$. ■

问题 5.3.15 不用 Baire 范畴定理，而用 Riesz-Fischer 定理证明下述一致有界性原理的特殊形式：设 H 为 Hilbert 空间，$E \subset H$，若任取 $y \in H$ 都有常数 $\alpha(y)$ 只与 y 有关，使得

$$| \langle x, y \rangle | \leqslant \alpha(y), x \in E.$$

则 $\sup\{ \| x \| : x \in E \} < \infty$. 由此推出 H 中的弱收敛列均有界.

解答 假定 E 为无界的，我们将构造一个标准正交序列如下：选取 $x_1 \in E$，$\| x_1 \| > 1$. 令

$$y_1 = x_1, u_1 = y_1 / \| y_1 \|.$$

若对某一 $n \geqslant 2$，标准正交集 $\{u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}\}$ 已经找到，我们取 $x_n \in E$ 使得

$$\| x_n \| > n^2 \left(\sum_{j=1}^{n-1} \alpha(u_j) \right)^2$$

且令

$$y_n = x_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle x_n, u_j \rangle u_j.$$

由于

$$\alpha(u_1) \geqslant | \langle x_1, u_1 \rangle | = \left| \left\langle x_1, \frac{x_1}{\| x_1 \|} \right\rangle \right| > 1,$$

故有

$$\sum_{j=1}^{n-1} \alpha(u_j) > 1.$$

因此 $\| x_n \| > n^2$. 由 $u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}$ 的标准正交性，

$$\| x_n - y_n \|^2 = \left\| \sum_{j=1}^{n-1} \langle x_n, u_j \rangle u_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{n-1} | \langle x_n, u_j \rangle |^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha(u_j))^2$$

$$\leqslant \left(\sum_{j=1}^{n-1} \alpha(u_j) \right)^2 < \frac{1}{n^2} \| x_n \| < \frac{1}{n^2} \| x_n \|^2.$$

从而

$$\| x_n \| \leqslant \| x_n - y_n \| + \| y_n \| < \frac{1}{n} \| x_n \| + \| y_n \|,$$

$$\| y_n \| > \left(1 - \frac{1}{n} \right) \| x_n \|. \tag{7}$$

特别地有 $y_n \neq 0$. 令

$$u_n = y_n / \| y_n \|.$$

由于对 $1\leqslant j\leqslant n-1$ 有

$$\langle y_n,u_j\rangle=\langle x_n,u_j\rangle-\langle x_n,u_j\rangle=0,$$

故$\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$为 H 的标准正交集. 由于 E 为无界的,这个构造过程可以继续下去.

设 $\lambda_n=\|y_n\|^{1/2}$,则由(7)式知

$$\lambda_n^2>\left(1-\frac{1}{n}\right)\|x_n\|>\left(1-\frac{1}{n}\right)n^2. \tag{8}$$

故级数 $\sum\lambda_n^{-2}$ 收敛. 因此由 Riesz-Fischer 定理

$$z=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-1}u_n$$

在 H 中存在. 对这个元 z 我们有$\langle z,u_n\rangle=\lambda_n^{-1}$. 进一步地

$$\langle y_n,z\rangle=\langle x_n,z\rangle-\sum_{j=1}^{n-1}\langle x_n,u_j\rangle\langle u_j,z\rangle. \tag{9}$$

由于 $\lambda_1^2=\|y_1\|=\|x_1\|>1$,我们知道由(8)式有 $\lambda_n>1$ 对任意 n 成立,而由(9)式有

$$\begin{aligned}|\langle y_n,z\rangle|&\leqslant|\langle x_n,z\rangle|+\sum_{j=1}^{n-1}|\langle x_n,u_j\rangle|\lambda_j^{-1}\\&\leqslant\alpha(z)+\sum_{j=1}^{n-1}\alpha(u_j)<\alpha(z)+\frac{1}{n}\|x_n\|^{1/2}\\&<\alpha(z)+\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\lambda_n,\end{aligned}$$

在上式中我们用到了(8)式. 但

$$\langle z,y_n\rangle=\langle z,\lambda_n^2u_n\rangle=\lambda_n^2\langle z,u_n\rangle=\lambda_n.$$

因此由(8)式有

$$\lambda_n=|\langle z,y_n\rangle|<\alpha(z)+\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\lambda_n,$$

$$\alpha(z)>\left(1-\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\right)\lambda_n>\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1/2}n.$$

对足够大的 n 这是不可能的. 因此 E 必为 H 的有界集.

最后,若 $x_n\xrightarrow{w}x$,则任取 $y\in H$ 有$\langle x_n,y\rangle\to\langle x,y\rangle$. 从而任取 $y\in H$,$\{\langle x_n,y\rangle\}$为有界的. 由已证结果知集合

$$E=\{x_1,x_2,\cdots\}$$

为有界的. ■

问题 5.3.16 设 H 为 Hilbert 空间,$\{x_n\}$为 H 中一列元使得任取 $y\in H$ 有$\{\langle x_n,y\rangle\}$收敛. 求证:存在唯一的 $x\in H$ 使得 $x_n\xrightarrow{w}x$.

解答 对每一 $y\in H$,序列$\{\langle x_n,y\rangle\}$收敛,从而$\{\langle x_n,z\rangle\}$有界,存在常数 $\alpha(y)$使得任取 $n\geqslant1$ 有$|\langle x_n,y\rangle|\leqslant\alpha(y)$. 利用问题 3.3.15 知集合

$$E=\{x_n:n=1,2,\cdots\}$$

为有界的. 设任取 $n\geqslant 1$ 有 $\|x_n\|\leqslant\beta$,令

$$f(y)=\lim_{n\to\infty}\langle y,x_n\rangle,\quad y\in H.$$

则 f 为 H 上的线性泛函. 由于

$$|\langle y,x_n\rangle|\leqslant\|y\|\,\|x_n\|\leqslant\beta\|y\|,$$

令 $n\to\infty$ 有

$$|f(y)|\leqslant\beta\|y\|,\quad y\in H.$$

因此 $f\in H'$. 由 Riesz 表示定理知存在 $x\in H$ 使得

$$f(y)=\langle y,x\rangle.$$

所以对所有 $y\in H$ 有

$$\langle y,x_n\rangle\to f(y)=\langle y,x\rangle,\quad \langle x_n,y\rangle\to\langle x,y\rangle.$$

若 g 为 H' 中任一元,则存在 $y\in H$ 使得对 $x\in H$ 有 $g(x)=\langle x,y\rangle$. 因此

$$g(x_n)=\langle x_n,y\rangle\to\langle x,y\rangle=g(x).$$

这就证明了 $x_n\xrightarrow{w}x$.

若 $x_0\in H$ 使得任取 $y\in H$ 有 $\langle x_n,y\rangle\to\langle x_0,y\rangle$. 则任取 $y\in H$ 有 $\langle x,y\rangle=\langle x_0,y\rangle$. 因此有 $x=x_0$. ■

问题 5.3.17 设 $\{u_\alpha\}$ 为 Hilbert 空间 H 的标准正交基. 求证: H 中的序列 $\{x_n\}$ 弱收敛到 x 当且仅当 $\{x_n\}$ 为有界的且任取 α 有

$$\langle x_n,u_\alpha\rangle\to\langle x,u_\alpha\rangle.$$

解答 若 $x_n\xrightarrow{w}x$,则任取 α

$$\langle x_n,u_\alpha\rangle\to\langle x,u_\alpha\rangle. \tag{10}$$

且由问题 5.3.15 知 $\{x_n\}$ 为有界的.

反之,设 $\{x_n\}$ 有界且(10)式对某一 x 成立. 令 Y 为所有 $y\in H$ 使得 $\langle x_n,y\rangle\to\langle x,y\rangle$. 则对每一个 α 有 $u_\alpha\in Y$. 由于

$$\langle x_n,ky_1+y_2\rangle=\bar{k}\langle x_n,y_1\rangle+\langle x_n,y_2\rangle\longrightarrow\bar{k}\langle x,y_1\rangle+\langle x,y_2\rangle=\langle x,ky_1+y_2\rangle,$$

故若 $y_1,y_2\in Y$,则 $ky_1+y_2\in Y$,从而 Y 为 H 的子空间.

若 $y\in\bar{Y}$. 由于 $\{x_n\}$ 为有界的,则存在 $\lambda>0$ 使得任取 $n\geqslant 1$ 有

$$\|x_n-x\|\leqslant\lambda.$$

给定 $\varepsilon>0$,存在 $y_1\in Y$ 使得

$$\|y-y_1\|<\frac{\varepsilon}{2\lambda}.$$

存在 N 使得任取 $n\geqslant N$

$$|\langle x_n,y_1\rangle-\langle x,y_1\rangle|<\varepsilon/2.$$

则当 $n\geqslant N$ 时

$$|\langle x_n,y\rangle-\langle x,y\rangle|=|\langle x_n-x,y\rangle|\leqslant|\langle x_n-x,y-y_1\rangle|+|\langle x_n-x,y_1\rangle|$$
$$\leqslant\|x_n-x\|\,\|y-y_1\|+|\langle x_n,y_1\rangle-\langle x,y_1\rangle|$$
$$\leqslant\lambda\|y-y_1\|+\varepsilon/2<\varepsilon.$$

这就证明了$\langle x_n,y\rangle\to\langle x,y\rangle$. 从而$y\in Y$,所以$Y$为包含所有$u_\alpha$的闭子空间. 但由假设$\{u_\alpha\}$为$H$的标准正交基,故$\overline{\text{span}}\{u_\alpha\}=H$. 因此$Y=H$. 这就完成了证明. ■

问题 5.3.18 设H为 Hilbert 空间,$\{x_n\}$为H的有界列使得任取j,序列$\{\langle x_j,x_n\rangle\}$均收敛. 求证:$\{x_n\}$在$H$中弱收敛.

解答 设Y为所有的$x\in H$使得序列$\{\langle x_n,x\rangle\}$收敛,则由假设对每一个j有$x_j\in Y$. 由于

$$\langle kx+y,x_n\rangle=k\langle x,x_n\rangle+\langle y,x_n\rangle,$$

所以若$x,y\in Y$,则$kx+y\in Y$. 故Y为H的子空间.

若$y\in\bar{Y}$. 由于$\{x_n\}$有界,则存在$\alpha>0$使得对每一个$n\geqslant1$有$\|x_n\|\leqslant\alpha$. 给定$\varepsilon>0$,存在$y_1\in Y$使得$\|y-y_1\|<\varepsilon/(4\alpha)$. 由于$\{\langle y_1,x_n\rangle\}$收敛,存在$N$使得任取$m,n\geqslant N$有

$$|\langle y_1,x_n\rangle-\langle y_1,x_m\rangle|<\varepsilon/2.$$

因此若$n,m\geqslant N$,则

$$|\langle y,x_n\rangle-\langle y,x_m\rangle|=|\langle y,x_n-x_m\rangle|\leqslant|\langle y-y_1,x_n-x_m\rangle|+|\langle y_1,x_n-x_m\rangle|$$
$$\leqslant\|y-y_1\|\,\|x_n-x_m\|+\varepsilon/2$$
$$<\frac{\varepsilon}{4\alpha}\cdot2\alpha+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

这说明$\{\langle y,x_n\rangle\}$为纯量柯西列,所以$\{\langle y,x_n\rangle\}$收敛,从而$y\in Y$. 因此Y为H的闭子空间.

若x为H中一元,则$x=y+z,y\in Y,z\in Y^\perp$. 因此

$$\langle x,x_n\rangle=\langle y,x_n\rangle+\langle z,x_n\rangle=\langle y,x_n\rangle,$$

这是由于$x_n\in Y$且$z\in Y^\perp$. 因此任取$x\in H$,序列$\{\langle x,x_n\rangle\}$均收敛. 由问题 5.3.16 知$\{x_n\}$必弱收敛. ■

问题 5.3.19 求证:Hilbert 空间的任意有界列必有弱收敛子列.

解答 设$\{x_n\}$为 Hilbert 空间H的有界列,则存在$\alpha>0$使得任取n有$\|x_n\|\leqslant\alpha$. 因此

$$|\langle x_1,x_n\rangle|\leqslant\|x_1\|\,\|x_n\|\leqslant\alpha^2.$$

这说明$\{\langle x_1,x_n\rangle\}$为纯量有界列,所以它必有收敛子列$\{\langle x_1,x_{n_j}\rangle\}$. 用$S_1$表示$\{x_n\}$的子列$\{x_{n_j}\}$,将$x_{n_j}$写为$x_{1j}$. 由于$S_1$有界,用$S_1$代替$\{x_n\}$,$x_2$代替$x_1$,可以重复上面的论证. 一般地,从$S_{j-1}$和$x_j$出发,我们可以找到$S_{j-1}$的子列$S_j$(正如由$\{x_n\}$及$x_1$出发可以找到$S_1$一样)使得序列

$$\{\langle x_j,x_{ji}\rangle:i=1,2,\cdots\}$$

收敛.

考虑对角线序列$S=\{x_{nn}\}$. 若$m<n$,则S_n为S_m的一个子列,由于x_{nn}为S_n的第n项,我们有$x_{nn}=x_{mr}$,其中$r>n$. 由于S_m为S_1的子列且有$m<n\leqslant r$,我们有

$$x_{mm} = x_{1i}, \quad x_{mr} = x_{1j},$$

其中 $i<j$. 由于 $x_{nn}=x_{nr}$，这说明 S 为 S_1 的子列，从而也是$\{x_n\}$的子列. 类似可证$\{x_{nn}:n\geqslant m\}$为 S_m 的子列. 因此$\{\langle x_m, x_{nn}\rangle:n\geqslant m\}$收敛. 从而$\{\langle x_m, x_{nn}\rangle:n\geqslant 1\}$收敛，这对任意的 m 都是对的. 因此任取 $j\geqslant 1$，$\{\langle x_{jj}, x_{nn}\rangle\}$收敛. 将问题 5.3.18 应用在序列$\{x_{nn}\}$上则可以得到要证的结论. ■

CHAPTER 6

第6章 Hilbert空间上的算子

在这一章及下一章里，我们将讨论 Hilbert 空间上的有界线性映射，也称为有界算子. 在 6.1 节中引入算子的伴随算子. 在 6.2 节中，讨论自伴算子、酉算子及正规算子这三大类算子.

6.1 有界算子及伴随算子

设 X、Y 为线性空间，映射 $\phi: X\times Y\to \mathbb{K}$ 称为**共轭双线性泛函**，或**共轭双线性型**，若它关于第一个变量为线性的，关于第二个变量为共轭线性的，即

$$\phi(kx_1+x_2,y)=k\phi(x_1,y)+\phi(x_2,y)$$

$$\phi(x,ky_1+y_2)=\bar{k}\phi(x,y_1)+\phi(x,y_2).$$

若 X,Y 为赋范空间，称 ϕ 为**有界的**，若

$$\|\phi\|=\sup\{|\phi(x,y)|:\|x\|\leqslant 1,\|y\|\leqslant 1\}<\infty.$$

设 $X=Y$，若 $\phi(y,x)=\overline{\phi(x,y)}$，则称 ϕ 为**对称的**；若 $\phi(x,x)\geqslant 0$，则称 ϕ 为**正的**.

设 ϕ 为 $X\times Y$ 上的共轭双线性泛函，且

$$f_1(x)=\phi(x,y_0),\quad x\in X,$$

$$f_2(y)=\overline{\phi(x_0,y)},\quad y\in Y,$$

其中 $x_0\in X$ 及 $y_0\in Y$ 固定. 则 f_1 和 f_2 分别为 X 和 Y 上的线性泛函.

设 X 为内积空间，$\phi(x,y)=\langle x,y\rangle$，其中 $x,y\in X$. 则 ϕ 为 X 上的有界共轭双线性泛函，它为对称的且为正的.

设 H_1 和 H_2 为 Hilbert 空间，$T:H_1\to H_2$ 为有界线性算子，则存在唯一的有界线性算子 $T^*:H_2\to H_1$ 使得

$$\langle Tx,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle,\quad x\in H_1,\quad y\in H_2,$$

(见问题 6.1.8). T^* 称为 T 的**伴随算子**.

设 $S:H_1\to H_2$ 及 $T:H_1\to H_2$ 为有界线性算子，则有

$$(S+T)^*=S^*+T^*,\quad (kT)^*=\bar{k}T^*,\quad (T^*)^*=T,$$
$$\|T^*\|=\|T\|,\quad \|T^*T\|=\|TT^*\|=\|T\|^2,$$
$$T^*T=0\Leftrightarrow T=0.$$

若 $H_1=H_2$，则 $(ST)^*=T^*S^*$，$I^*=I$，$0^*=0$，其中 I 表示 H_1 上的恒等算子. 若 T^{-1} 存在则 $(T^*)^{-1}$ 也存在且等于 $(T^{-1})^*$.

练习

1. 下列泛函哪些为共轭双线性的？

$\phi_1(s,t)=st+t$，　$\phi_2(s,t)=2st$，　$s,t\in\mathbb{R}$.

2. 若 $\boldsymbol{x}=(s,t)\in\mathbb{R}^2$，$u\in\mathbb{R}$，令

$$\phi(\boldsymbol{x},u)=(2s+t)u.$$

求证 ϕ 为 $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}$ 上的有界共轭双线性泛函.

3. 对于 $\boldsymbol{x}=(s,t)\in\mathbb{R}^2$，$\boldsymbol{y}=(u,v)\in\mathbb{R}^2$，令

$$\phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(s+2t)v+(2s-t)u.$$

求证：ϕ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的有界共轭双线性泛函.

4. 设 H_1,H_2 为 Hilbert 空间，$T\in BL(H_1,H_2)$，求证：

$$(kT)^*=\bar{k}T^*,\quad (T^*)^*=T,\quad \|T^*\|=\|T\|,$$
$$\|TT^*\|=\|T^*T\|=\|T\|^2,$$

及 $T^*T=0$ 当且仅当 $T=0$.

5. 设 H_1,H_2 为 Hilbert 空间，$S,T\in BL(H_1,H_2)$. 求证：

$$(S+T)^*=S^*+T^*,$$

且若 $H_2=H_1$，有

$$(ST)^*=T^*S^*.$$

6. 设 $H=\mathbb{R}^2$. A 定义为

$$A(\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{e}_1,\quad A(\boldsymbol{e}_2)=2\boldsymbol{e}_2$$

其中 $\boldsymbol{e}_1=(1,0)$，$\boldsymbol{e}_2=(0,1)$. 设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$. 求 A 在 $\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\}$ 下的矩阵表示 $\boldsymbol{M}$. 求证：即使 $\boldsymbol{M}$ 不为对称的，也有 $A^*=A$.

问题

问题 6.1.1 考虑无穷矩阵

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ c_2 & a_2 & b_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & c_3 & a_3 & b_3 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & c_4 & a_4 & b_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

若

$$\beta = \sup\{|c_n|+|a_n|+|b_n| : n = 1,2,\cdots\} < \infty,$$

$$\gamma = \sup\{|b_{n-1}|+|a_n|+|c_{n+1}| : n = 1,2,\cdots\} < \infty,$$

其中 $b_0 = 0 = c_1$. 求证：上述矩阵相对于 l^2 上的典范标准正交基定义了 l^2 上的有界线性算子 A，且 $\|A\| \leqslant (\beta\gamma)^{1/2}$. [这类矩阵称为 **Jacobi 矩阵**.]

解答 我们称无穷矩阵 (k_{ij}) 相对于 l^2 典范标准正交基 $\{e_n\}$ 可以表示 A，若有

$$A(x)(i) = \sum_{j=1}^{\infty} k_{ij} x(j), \quad i = 1,2,\cdots, \quad x \in l^2.$$

因此由 Schwarz 不等式

$$|A(x)(i)| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |k_{ij}|^{1/2} |k_{ij}|^{1/2} |x_j|$$

$$\leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} |k_{ij}|\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |k_{ij}| |x(j)|^2\right)^{1/2}.$$

这里对 $i = 1,2,3,\cdots$

$$k_{ii} = a_i, \quad k_{i,i+1} = b_i, \quad k_{i,i-1} = c_i,$$

$$k_{ij} = 0, \quad j < i-1 \text{ 或 } j > i+1.$$

因此

$$\sum_{j=1}^{\infty} |k_{ij}| = |c_i|+|b_i|+|a_i| \leqslant \beta, \quad i \geqslant 1,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |k_{ij}| = |b_{j-1}|+|a_j|+|c_{j+1}| \leqslant \gamma, \quad j \geqslant 1;$$

$$|A(x)(i)|^2 \leqslant \beta \sum_{j=1}^{\infty} |k_{ij}| |x(j)|^2.$$

所以有

$$\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |A(x)(i)|^2 \leqslant \beta \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |k_{ij}| |x(j)|^2$$

$$=\beta\sum_{j=1}^{\infty}|x(j)|^2\sum_{j=1}^{\infty}|k_{ij}|\leqslant\beta\gamma\|x\|^2.$$

因此任取 $x\in l^2$ 有 $\|Ax\|\leqslant(\beta\gamma)^{1/2}\|x\|$. 这说明 A 为 l^2 上的有界线性算子且 $\|A\|\leqslant(\beta\gamma)^{1/2}$. ■

问题 6.1.2 设 $\phi:X\times X\to\mathbb{K}$ 为$\mathbb{K}$ 上线性空间 X 上的共轭双线性泛函,又

$$q(x)=\phi(x,x),\quad x\in X$$

为 ϕ 诱导的**二次型**,求证:

(a) $2\phi(x,y)+2\phi(y,x)=q(x+y)-q(x-y)$.

(b) 若$\mathbb{K}=\mathbb{C}$,则

$$4\phi(x,y)=q(x+y)-q(x-y)+\mathrm{i}q(x+\mathrm{i}y)-\mathrm{i}q(x-\mathrm{i}y).$$

(c) 若$\mathbb{K}=\mathbb{C}$或$\mathbb{R}$,ϕ 为对称的,则

$$4\mathrm{Re}\phi(x,y)=q(x+y)-q(x-y).$$

解答 (a) 共轭双线性泛函关于第一个变量为线性的,关于第二个变量为共轭线性的,故

$$\begin{aligned}q(x+y)&=\phi(x+y,x+y)=\phi(x,x+y)+\phi(y,x+y)\\&=\phi(x,x)+\phi(x,y)+\phi(y,x)+\phi(y,y),\\q(x-y)&=\phi(x-y,x-y)=\phi(x,x-y)-\phi(y,x-y)\\&=\phi(x,x)-\phi(x,y)-\phi(y,x)+\phi(y,y).\end{aligned}$$

因此

$$q(x+y)-q(x-y)=2\phi(x,y)+2\phi(y,x).$$

(b) 若$\mathbb{K}=\mathbb{C}$,在(a)中用 $\mathrm{i}y$ 代替 y 有

$$q(x+\mathrm{i}y)-q(x-\mathrm{i}y)=2\phi(x,\mathrm{i}y)+2\phi(\mathrm{i}y,x)=-2\mathrm{i}\phi(x,y)+2\mathrm{i}\phi(y,x).$$

所以,利用(a)有

$$\begin{aligned}&q(x+y)-q(x-y)+\mathrm{i}q(x+\mathrm{i}y)-\mathrm{i}q(x-\mathrm{i}y)\\=&2\phi(x,y)+2\phi(y,x)+2\phi(x,y)-2\phi(y,x)\\=&4\phi(x,y).\end{aligned}$$

(c) 若 ϕ 为对称的,则 $\phi(y,x)=\overline{\phi(x,y)}$,从而由(a)有

$$q(x+y)-q(x-y)=2\phi(x,y)+2\overline{\phi(x,y)}=4\mathrm{Re}\phi(x,y).$$

这就完成了证明. ■

问题 6.1.3 设 $\phi:X\times X\to\mathbb{K}$ 为内积空间 X 上的有界共轭双线性泛函,$q(x)=\phi(x,x)$,$x\in X$. 令

$$\|q\|=\sup\{|q(x)|:\|x\|\leqslant 1\}.$$

若数域$\mathbb{K}=\mathbb{C}$,求证:

$$\|q\|\leqslant\|\phi\|\leqslant 2\|q\|,\tag{1}$$

且上述不等式的界为最佳的. 若数域$\mathbb{K}=\mathbb{R}$,则(1)式中第二个不等式可能不成立.

解答 由于

$$\| \phi \| = \sup\{ | \phi(x,y) | : \| x \| \leqslant 1, \| y \| \leqslant 1 \},$$

故若 $\| x \| \leqslant 1$,则

$$| q(x) | = | \phi(x,x) | \leqslant \| \phi \|.$$

这说明 $\| q \| \leqslant \| \phi \|$.

若 r 为实数,则

$$q(rx) = \phi(rx,rx) = r^2 \phi(x,x) = r^2 q(x).$$

故若 $x \neq 0$,则

$$q(x) = q\left(\| x \| \frac{x}{\| x \|} \right) = \| x \|^2 q\left(\frac{x}{\| x \|} \right).$$

由此知

$$| q(x) | \leqslant \| x \|^2 \| q \|.$$

由于 $q(0)=0$,这个不等式在 $x=0$ 时也成立. 因此

$$\begin{aligned} | q(x+y) | + | q(x-y) | &\leqslant \| q \| \{ \| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 \} \\ &= \| q \| \{ 2 \| x \|^2 + 2 \| y \|^2 \}, \\ | q(x+\mathrm{i}y) | + | q(x-\mathrm{i}y) | &\leqslant \| q \| \{ 2 \| x \|^2 + 2 \| y \|^2 \}. \end{aligned}$$

因此若 $\| x \| \leqslant 1$, $\| y \| \leqslant 1$,则由问题 6.1.2 知

$$\begin{aligned} 4 | \phi(x,y) | &\leqslant | q(x+y) | + | q(x-y) | + | q(x+\mathrm{i}y) | + | q(x-\mathrm{i}y) | \\ &\leqslant \| q \| (4 \| x \|^2 + 4 \| y \|^2), \\ | \phi(x,y) | &\leqslant \| q \| (\| x \|^2 + \| y \|^2) \leqslant 2 \| q \|. \end{aligned}$$

这说明 $\| \phi \| \leqslant 2 \| q \|$. 所以这就完成了第一部分的证明.

考虑一个至少含有两个标准正交向量 u_1, u_2 的内积空间 X. 对 $x, y \in X$ 令

$$\begin{aligned} &\phi_1(x,y) = \langle x,y \rangle, \quad \phi_2(x,y) = \langle x,u_1 \rangle \langle u_2,y \rangle, \\ &\phi_3(x,y) = \langle x,u_1 \rangle \langle u_2,y \rangle - \langle x,u_2 \rangle \langle u_1,y \rangle, \\ &q_j(x) = \phi_j(x,x), \quad j = 1,2,3. \end{aligned}$$

则 ϕ_1, ϕ_2 和 ϕ_3 在 $X \times X$ 上为共轭双线性的. 由于有 $q_1(x) = \| x \|^2$ 且

$$| \phi_1(x,y) | \leqslant \| x \| \| y \|,$$

故有 $\| q_1 \| = 1 = \| \phi_1 \|$. 又由于

$$\begin{aligned} | \phi_2(x,y) | &\leqslant \| x \| \| u_1 \| \| u_2 \| \| y \| = \| x \| \| y \| \\ \phi_2(u_1,u_2) &= \langle u_1,u_1 \rangle \langle u_2,u_2 \rangle = 1, \end{aligned}$$

故有 $\| \phi_2 \| = 1$. 进一步地

$$| q_2(x) | = | \langle x,u_1 \rangle \langle u_2,x_1 \rangle | \leqslant \frac{1}{2} [| \langle x,u_1 \rangle |^2 + | \langle u_2,x \rangle |^2] \leqslant \frac{1}{2} \| x \|^2,$$

其中最后一个不等式我们用到了 Bessel 不等式. 这说明 $\| q_2 \| \leqslant 1/2$. 若 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,则由已证的第一部分有

$$\| q_2 \| \geqslant \frac{1}{2} \| \phi_2 \| = \frac{1}{2}.$$

因此有 $\| q_2 \| = 1/2$. 所以有 $\| \phi_2 \| = 2 \| q_2 \|$.

这样我们就证明了在第一部分中不等式的界可以由 ϕ_1 和 ϕ_2 达到.

最后,若$\mathbb{K} = \mathbb{R}$,则对所有的 $x \in X$,

$$q_3(x) = \langle x, u_1 \rangle \langle u_2, x \rangle - \langle x, u_2 \rangle \langle u_1, x \rangle = 0.$$

所以 $\| q_3 \| = 0$. 由于 $\phi_3(u_1, u_2) = 1$,故有 $\| \phi_3 \| \geqslant 1$. 因此在$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 情形不等式 $\| \phi_3 \| \leqslant 2 \| q_3 \|$ 不成立. ■

问题 6.1.4 设 X, ϕ, q 如问题 6.1.3,其中的数域$\mathbb{K}$ 可以是$\mathbb{C}$ 或$\mathbb{R}$,若 ϕ 为对称的,求证: $\| \phi \| = \| q \|$.

解答 由于 ϕ 为对称的,故由问题 6.1.3(c)知

$$4\mathrm{Re}\phi(x, y) = q(x + y) - q(x - y).$$

又由于对任意的 x 有 $|q(x)| \leqslant \| q \| \, \| x \|^2$,我们有

$$\begin{aligned} 4 \, | \, \mathrm{Re}\phi(x, y) \, | &\leqslant | \, q(x, y) \, | + | \, q(x - y) \, | \\ &\leqslant \| q \| (\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2) \\ &= \| q \| (2 \| x \|^2 + 2 \| y \|^2) \end{aligned} \tag{2}$$

对任意的 x, y 成立,设 $\| x \| \leqslant 1$ 及 $\| y \| \leqslant 1$,则有

$$k = \begin{cases} \dfrac{| \, \phi(x, y) \, |}{\phi(x, y)}, & \phi(x, y) \neq 0, \\ 1, & \phi(x, y) = 0. \end{cases}$$

则 $|k| = 1$ 且

$$| \, \phi(x, y) \, | = k\phi(x, y) = \phi(kx, y).$$

因此 $\mathrm{Re}\phi(kx, y) = | \, \phi(x, y) \, |$,再利用(2)式有

$$4 \, | \, \phi(x, y) \, | = 4\mathrm{Re}\phi(kx, y) \leqslant 2 \| q \| (\| kx \|^2 + \| y \|^2) \leqslant 2 \| q \| (1 + 1).$$

从而若 $\| x \| \leqslant 1$ 及 $\| y \| \leqslant 1$,则

$$| \, \phi(x, y) \, | \leqslant \| q \|.$$

所以有 $\| \phi \| \leqslant \| q \|$. 另外由于当 $\| x \| \leqslant 1$ 时有

$$| \, q(x) \, | = | \, \phi(x, x) \, | \leqslant \| \phi \|,$$

我们有 $\| q \| \leqslant \| \phi \|$. 这就完成了证明. ■

问题 6.1.5 设 X 为线性空间,$\phi: X \times X \to \mathbb{K}$ 为对称正共轭双线性泛函,且 $q(x) = \phi(x, x)$. 求证:

(a) 对所有 $x, y \in X$ 有 $|\phi(x, y)|^2 \leqslant q(x) q(y)$.

(b) $p(x) = \sqrt{q(x)}$ 为 X 上的半范数,即对所有 $x, y \in X, k \in \mathbb{K}$ 有

$$p(x) \geqslant 0, \tag{3}$$

$$p(kx) = | \, k \, | \, p(x), \tag{4}$$

$$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y). \tag{5}$$

(c) $\{x\in X: q(x)=0\}=\{x\in X:$任取 y 有 $\phi(x,y)=0\}$.

解答 (a) 由于 ϕ 为对称且为正的,对所有 $x,y\in X,k\in\mathbb{K}$,有

$$\begin{aligned}0&\leqslant \phi(kx+y,kx+y)=k\phi(x,kx+y)+\phi(y,kx+y)\\&=k\{\bar{k}\phi(x,x)+\phi(x,y)\}+\bar{k}\phi(y,x)+\phi(y,y)\\&=|k|^2q(x)+k\phi(x,y)+\overline{k\phi(x,y)}+q(y),\end{aligned} \tag{6}$$

若 $q(x)\neq 0$,令

$$k=-\frac{\overline{\phi(x,y)}}{q(x)}.$$

则由(6)式知

$$0\leqslant \frac{|\phi(x,y)|^2}{q(x)}-\frac{|\phi(x\cdot y)|^2}{q(x)}-\frac{|\phi(x\cdot y)|^2}{q(x)}+q(y).$$

所以有

$$|\phi(x,y)|^2\leqslant q(x)q(y). \tag{7}$$

类似地,考虑 $\phi(x+ky,x+ky)$,则若 $q(y)\neq 0$,我们也有(7)式成立. 现设 $q(x)=0=q(y)$,则由(6)式知对任意的 $k\in\mathbb{K}$ 有

$$k\phi(x,y)+\overline{k\phi(x,y)}\geqslant 0. \tag{8}$$

取 $k=1$ 及 $k=-1$,则可得

$$\mathrm{Re}\phi(x,y)=0.$$

若$\mathbb{K}=\mathbb{R}$,则 $\phi(x,y)=0$,若$\mathbb{K}=\mathbb{C}$,在(8)式中取 $k=\mathrm{i}$ 及 $k=-\mathrm{i}$ 则有

$$\mathrm{Im}\phi(x,y)=0.$$

所以在$\mathbb{K}=\mathbb{C}$时也有 $\phi(x,y)=0$. 这说明任取 $x,y\in X$ 有(7)式成立.

(b) 由于 $p(x)$为 $q(x)$的算术平方根,故(3)式成立. 由于

$$q(kx)=\phi(kx,kx)=k\bar{k}\phi(x,x)=|k|^2q(x),$$

所以(4)式也成立. 在(6)式中取 $k=1$,则由(a)有

$$\begin{aligned}q(x+y)&=\phi(x+y,x+y)=q(x)+2\mathrm{Re}\phi(x,y)+q(y)\\&\leqslant q(x)+2|\phi(x,y)|+q(y)\\&\leqslant q(x)+2[q(x)q(y)]^{1/2}+q(y),\end{aligned}$$

因此

$$p(x+y)^2\leqslant p(x)^2+2p(x)p(y)+p(y)^2,$$

这就给出了(5)式.

(c) 若 $q(x)=0$,则由(a)有

$$\phi(x,y)=0,\quad y\in X.$$

反之若上式成立,则特别地有 $\phi(x,x)=0$,即 $q(x)=0$. 这就完成了证明. ■

问题 6.1.6 设 X 和 Y 为赋范空间,$\phi: X\times Y\to\mathbb{K}$ 为共轭双线性泛函. 对 $x\in X$,

$y\in Y$,令

$$f^y(x)=\phi(x,y)=\overline{f_x(y)}.$$

求证:

(a) 若 ϕ 为有界的,则它在 $X\times Y$ 上连续.

(b) 若 ϕ 为有界的,则任取 $x\in X,y\in Y$ 有 $f^y\in X',f_x\in Y'$.

(c) 若任取 $x\in X,y\in Y$,有 $f^y\in X',f_x\in Y'$ 且 X 或 Y 为 Banach 空间,则 ϕ 必为有界的.

解答 (a) 设 ϕ 为有界的,若 $x\neq 0,y\neq 0$,则

$$\phi(x,y)=\|x\|\,\|y\|\,\phi\left(\frac{x}{\|x\|},\frac{y}{\|y\|}\right),$$

$$|\phi(x,y)|\leqslant\|x\|\,\|y\|\,\|\phi\|. \tag{9}$$

由于若 $x=0$ 或 $y=0$,则有 $\phi(x,y)=0$,故(9)式对任意的 $x\in X,y\in Y$ 成立.

设在 X 中 $x_n\to x$,在 Y 中 $y_n\to y$,则

$$\begin{aligned}\phi(x_n,y_n)-\phi(x,y)&=\phi(x_n,y_n)-\phi(x_n,y)+\phi(x_n,y)-\phi(x,y)\\&=\phi(x_n,y_n-y)+\phi(x_n-x,y),\end{aligned}$$

$$|\phi(x_n,y_n)-\phi(x,y)|\leqslant\|\phi\|\,\|x_n\|\,\|x_n-y_n\|+\|\phi\|\,\|x_n-x\|\,\|y\|. \tag{10}$$

其中最后一个不等式我们用到了(9)式.由于当 $n\to\infty$ 时,有

$$\|x_n\|\to\|x\|,\quad \|y_n-y\|\to 0,\quad \|x_n-x\|\to 0,$$

故当 $n\to\infty$ 时,(10)式的右端收敛到 0.因此

$$\phi(x_n,y_n)\to\phi(x,y),$$

上式只要在 $X\times Y$ 中有 $(x_n,y_n)\to(x,y)$ 就成立.这说明(a)成立.

(b) 易见 $f^y:X\to\mathbb{K}$ 及 $f_x:Y\to\mathbb{K}$ 为线性的.由于

$$|f^y(x)|=|\phi(x,y)|\leqslant\|\phi\|\,\|x\|\,\|y\|,$$

$$|f_x(y)|=|\phi(x,y)|\leqslant\|\phi\|\,\|x\|\,\|y\|,$$

故有

$$\|f^y\|\leqslant\|\phi\|\,\|y\|,\quad \|f_x\|\leqslant\|\phi\|\,\|x\|.$$

因此 f^y 及 f_x 均为有界的.这就证明了(b).

(c) 设 X 为 Banach 空间,考虑从 X 到 $\mathbb{K}$ 的有界线性算子族 $\{f^y:y\in Y,\|y\|\leqslant 1\}$.则任取 $x\in X,y\in Y$ 满足 $\|y\|\leqslant 1$,有

$$|f^y(x)|=|\phi(x,y)|=|f_x(y)|\leqslant\|f_x\|\,\|y\|\leqslant\|f_x\|.$$

由于 X 为 Banach 空间,一致有界性定理可以推出 $\{f^y:\|y\|\leqslant 1\}$ 为有界的.若任取 $\|y\|\leqslant 1$ 有 $\|f^y\|\leqslant\alpha$,则任取 $x\in X,\|x\|\leqslant 1,y\in Y,\|y\|\leqslant 1$ 有

$$|\phi(x,y)|=|f^y(x)|\leqslant\|f^y\|\,\|x\|\leqslant\alpha.$$

因此 ϕ 为有界的.若 Y 为 Banach 空间,则可以对 Y 上的有界线性泛函族 $\{f_x:x\in X,\|x\|\leqslant 1\}$ 作类似的论证,则可以得到同样的结果.这就完成了证明. ■

问题 6.1.7 设 H_1, H_2 为 Hilbert 空间，$\phi_1: H_1 \times H_2 \to \mathbb{K}$ 为有界共轭双线性泛函. 求证：存在唯一的 $S \in BL(H_1, H_2)$ 使得

$$\phi(x, y) = \langle Sx, y \rangle, \quad x \in H_1, \quad y \in H_2,$$

且有 $\| S \| = \| \phi \|$.

解答 设 $x \in H_1$ 固定，令

$$f_x(y) = \overline{\phi(x, y)}, \quad y \in H_2.$$

则由问题 6.1.6(b)知 $f_x \in H_2'$. 由 Riesz 表示定理，存在唯一的 $z \in H_2$ 使得

$$f_x(y) = \langle y, z \rangle, \quad y \in H_2. \tag{11}$$

由于 z 由 x 唯一确定，我们可以定义一个映射 $S: H_1 \to H_2$ 为

$$S(x) = z, \quad x \in H_1.$$

其中 z 由(11)式给出. 因此

$$f_x(y) = \langle y, z \rangle = \langle y, Sx \rangle,$$

$$\phi(x, y) = \overline{f_x(y)} = \langle Sx, y \rangle, \quad x \in H_1, \quad y \in H_2. \tag{12}$$

为证 $S: H_1 \to H_2$ 为线性算子，设 $S(x_1) = z_1, S(x_2) = z_2$ 且 $S(kx_1 + x_2) = z$. 则由(12)式知对于 $y \in H_2$

$$\begin{aligned} \phi(x_1, y) &= \langle z_1, y \rangle, \quad \phi(x_2, y) = \langle z_2, y \rangle, \\ \phi(kx_1 + x_2, y) &= k\phi(x_1, y) + \phi(x_2, y) \\ &= k\langle z_1, y \rangle + \langle z_2, y \rangle \\ &= \langle kz_1 + z_2, y \rangle. \end{aligned}$$

所以

$$\langle z, y \rangle = \phi(kx_1 + x_2, y) = \langle kz_1 + z_2, y \rangle.$$

上式对任意的 $y \in H_2$ 都成立这个事实说明 $z = kz_1 + z_2$，即

$$S(kx_1 + x_2) = kS(x_1) + S(x_2).$$

因此 S 为线性的.

由于 ϕ 为有界的，所以

$$| \phi(x, y) | \leqslant \| \phi \| \, \| x \| \, \| y \|, \quad x \in H_1, \quad y \in H_2.$$

在(12)式中令 $y = Sx$ 则有 $\phi(x, Sx) = \langle Sx, Sx \rangle$，因此

$$\| Sx \|^2 = | \phi(x, Sx) | \leqslant \| \phi \| \, \| x \| \, \| Sx \|;$$

$$\| Sx \| \leqslant \| \phi \| \, \| x \|,$$

上式对 H_1 中所有 x 都成立，故 S 为有界的且有 $\| S \| \leqslant \| \phi \|$. 另外，若 $\| x \| \leqslant 1, \| y \| \leqslant 1$，由(12)式有

$$| \phi(x, y) | \leqslant \| Sx \| \, \| y \| \leqslant \| S \| \, \| x \| \, \| y \| \leqslant \| S \|.$$

从而 $\| \phi \| \leqslant \| S \|$. 因此有 $\| S \| = \| \phi \|$.

最后设 $S_1 \in B(H_1, H_2)$ 使得

$$\langle S_1x,y\rangle=\phi(x,y)=\langle Sx,y\rangle,\quad x\in H_1,\quad y\in H_2.$$

上式对 H_2 中任意元 y 成立这个事实说明 $S_1x=Sx$. 即有 $S_1=S$. ■

问题 6.1.8 设 H_1,H_2 为 Hilbert 空间，$T:H_1\to H_2$ 为有界线性算子. 求证：存在唯一的有界线性算子 $T^*:H_2\to H_1$ 使得 $\|T^*\|=\|T\|$ 且

$$\langle Tx,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle,\quad x\in H_1,\quad y\in H_2.$$

[映射 T^* 称为 T 的伴随算子].

解答 定义 $\phi:H_2\times H_1\to\mathbb{K}$ 为

$$\phi(x,y)=\langle x,Ty\rangle,\quad x\in H_2,\quad y\in H_1.$$

由于

$$\langle kx_1+x_2,Ty\rangle=k\langle x_1,Ty\rangle+\langle x_2,Ty\rangle,$$

$$\langle x,kTy_1+Ty_2\rangle=\bar{k}\langle x,Ty_1\rangle+\langle x,Ty_2\rangle,$$

所以

$$\phi(kx_1+x_2,y)=k\phi(x_1,y)+\phi(x_2,y),$$

$$\phi(x,ky_1+y_2)=\bar{k}\phi(x,y_1)+\phi(x,y_2).$$

因此 ϕ 为 $H_2\times H_1$ 上的共轭双线性泛函. 由 Schwarz 不等式

$$|\phi(x,y)|=|\langle x,Ty\rangle|\leqslant\|x\|\,\|Ty\|\leqslant\|T\|\,\|x\|\,\|y\|,$$

其中 $x\in H_2,y\in H_1$. 这说明 ϕ 为有界的且 $\|\phi\|\leqslant\|T\|$. 另外取 $x=Ty$，则有

$$\phi(Ty,y)=\langle Ty,Ty\rangle=\|Ty\|^2,\quad y\in H_1.$$

因此

$$\|Ty\|^2=|\phi(Ty,y)|\leqslant\|\phi\|\,\|Ty\|\,\|y\|,$$

$$\|Ty\|\leqslant\|\phi\|\,\|y\|.$$

所以 $\|T\|\leqslant\|\phi\|$，因此有 $\|\phi\|=\|T\|$.

利用问题 6.1.7，但将 H_1 与 H_2 互换，则存在 $S\in BL(H_2,H_1)$ 使得 $\|S\|=\|\phi\|$ 且

$$\phi(x,y)=\langle Sx;y\rangle,\quad x\in H_2,\quad y\in H_1.$$

因此

$$\langle Ty,x\rangle=\overline{\phi(x,y)}=\langle y,Sx\rangle,\quad x\in H_2,\quad y\in H_1,$$

$$\langle Tx,y\rangle=\langle x,Sy\rangle,\quad y\in H_2,\quad x\in H_1.$$

由于 $\|S\|=\|\phi\|=\|T\|$，我们可以取 $T^*=S$.

为证唯一性，假设 $BL(H_2,H_1)$ 含有两个元 S,S_1 使得

$$\langle x,Sy\rangle=\langle Tx,y\rangle=\langle x,S_1y\rangle$$

对任意的 $x\in H_1$ 及 $y\in H_2$ 成立. 取 $x=Sy-S_1y$ 则有

$$\langle Sy-S_1y,Sy-S_1y\rangle=\langle x,Sy-S_1y\rangle=0.$$

因此任取 $y\in H_2$ 有 $Sy=S_1y$，即 $S=S_1$. ■

问题 6.1.9 求证：一般地，内积空间上的有界线性算子不一定有伴随算子存在. [这说明在问题 6.1.8 中完备性是必要的.]

解答 设 $X=c_{00}$，其内积就是 l^2 中的内积. 若 $x\in X$，则

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{x(j)}{j}\right|\leqslant\left(\sum_{j=1}^{\infty}|x(j)|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}\right)^{1/2}=\|x\|\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^{1/2}$$

这证明了

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{x(j)}{j},\quad x\in X$$

定义了 X 上的有界线性泛函，设

$$A(x)=(f(x),0,0,\cdots),\quad x\in X.$$

则 $A:X\to X$ 为有界线性算子. 假设存在 $A^*\in BL(X)$ 使得

$$\langle Ax,y\rangle=\langle x,A^*y\rangle,\quad x,y\in X.$$

设 e_n 为 X 的第 n 个单位向量. 则 $f(e_n)=1/n$ 且

$$A(e_n)=\left(\frac{1}{n},0,0,\cdots\right),$$

$$A(e_n,e_1)=\frac{1}{n},$$

$$\langle e_n,A^*e_1\rangle=\langle Ae_n,e_1\rangle=\frac{1}{n}.$$

但 $\langle A^*e_1,e_n\rangle=(A^*e_1)(n)$. 因此 $(A^*e_1)(n)=\frac{1}{n}$. 但这样的 $A^*(e_1)$ 不可能在 $X=c_{00}$ 中，矛盾. 所以 A 的伴随算子不存在. ■

问题 6.1.10 设线性算子 $T:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^m$ 由下式给出

$$(Tx)(i)=\sum_{j=1}^{n}k_{ij}x(j),\quad i=1,2,\cdots,m,\quad x\in\mathbb{K}^n.$$

求证：$T^*:\mathbb{K}^m\to\mathbb{K}^n$ 为

$$(T^*y)(j)=\sum_{i=1}^{m}\overline{k_{ij}}y(i),\quad j=1,2,\cdots,n,\quad y\in\mathbb{K}^m.$$

解答 设 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 为 $\mathbb{K}^n$ 的单位向量，$v_1,\cdots,v_m$ 为 $\mathbb{K}^m$ 的单位向量. 给定 $y\in\mathbb{K}^m$，设 $T^*y=x$，则

$$x(j)=\langle x,u_j\rangle=\overline{\langle T^*y,u_j\rangle}.$$

因此

$$\langle T(u_j),y\rangle=\langle u_j,T^*y\rangle=\overline{x(j)}.\tag{13}$$

但是对于 $i=1,2,\cdots,m$ 有

$$T(u_j)(i)=\sum_{n=1}^{n}k_{in}u_j(r)=k_{ij}.$$

由于

$$\langle T(u_j),y\rangle=\sum_{i=1}^{m}(Tu_j)(i)y(i)=\sum_{i=1}^{m}k_{ij}\,\overline{y(i)},$$

由(13)式得

$$x(j) = \langle y, Tu_j \rangle = \sum_{i=1}^{m} \overline{k_{ij}} y(i),$$

即有

$$(T^* y)(j) = \sum_{i=1}^{m} \overline{k_{ij}} y(i)$$

对 $j=1,2,\cdots,m$ 成立. 这就完成了证明. ■

问题 6.1.11 设 H 为可分 Hilbert 空间,$\{u_n\}$为 H 的标准正交基. 假定 $BL(H)$中元 A 和 B 相对于$\{u_n\}$的矩阵表示分别为(a_{ij})和(b_{ij}),求证:

(a) 这两个矩阵的每一行和每一列均为平方可和的.

(b) AB 和 A^* 分别由(c_{ij})和(d_{ij})表示,其中

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} b_{kj}, \quad d_{ij} = \overline{a_{ji}}.$$

解答 纯量序列$\{k_n\}$称为平方可和的,若有$\sum |k_n|^2 < \infty$.

由于$\{u_n\}$为标准正交基,我们有 Fourier 展开式:

$$A(u_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle Au_j, u_i \rangle u_i, \quad j = 1,2,\cdots.$$

我们称相对于$\{u_n\}$矩阵$\{a_{ij}\}$表示 A,若

$$A(u_j) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} u_i, \quad j = 1,2,\cdots.$$

上式成立当且仅当

$$\langle Au_j, u_i \rangle = a_{ij}, \quad i \geqslant 1, \quad j \geqslant 1.$$

因此由 Bessel 不等式:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle Au_j, u_i \rangle|^2 \leqslant \|Au_j\|^2 < \infty.$$

又由于

$$a_{ij} = \langle Au_j, u_i \rangle = \langle u_j, A^* u_i \rangle,$$

所以

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle A^* u_i, u_j \rangle|^2 \leqslant \|A^* u_i\|^2 < \infty.$$

类似可证

$$\sum_{i=1}^{\infty} |b_{ij}|^2 < \infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |b_{ij}|^2 < \infty,$$

这就证明了(a).

我们有

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,u_n\rangle u_n,\quad y=\sum_{n=1}^{\infty}\langle y,u_n\rangle u_n.$$

正如问题 5.2.14(c)那样，利用内积的线性性及连续性知

$$\langle x,y\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,u_n\rangle\langle u_n,y\rangle.$$

所以

$$\langle Bu_j,A^*u_i\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\langle Bu_j,u_k\rangle\langle u_k,A^*u_i\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\langle Bu_j,u_k\rangle\langle Au_k,u_i\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}b_{kj}a_{ik}.$$

因此，若 AB 由(c_{ij})表示，则

$$c_{ij}=\langle ABu_j,u_i\rangle=\langle Bu_j,A^*u_i\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}b_{kj}.$$

最后，若$\langle d_{ij}\rangle$表示 A^*，则

$$d_{ij}=\langle A^*u_j,u_i\rangle=\langle u_j,Au_i\rangle=\overline{\langle Au_i,u_j\rangle}=\overline{a_{ji}}.$$

这就完成了证明. ■

问题 6.1.12 设 $k(s,t)$，$0\leqslant s\leqslant 1$，$0\leqslant t\leqslant 1$，为$[0,1]\times[0,1]$上的可测函数. 假设

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant 1}\int_0^1|k(s,t)|\,dt=\beta<\infty,\qquad\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1|k(s,t)|\,ds=\gamma<\infty.$$

对 $x\in L^2[0,1]$，令

$$(Ax)(s)=\int_0^1k(s,t)x(t)dt,\quad 0\leqslant s\leqslant 1.$$

求证：A 为$L^2[0,1]$上的有界线性算子且 $\|A\|\leqslant(\beta\gamma)^{1/2}$，且任取 $x\in L^2[0,1]$有

$$(A^*x)(s)=\int_0^1\overline{k(t,s)}x(t)dt,\quad 0\leqslant s\leqslant 1.$$

解答 对于 $0\leqslant s\leqslant 1$，我们有

$$\begin{aligned}|(Ax)(s)|&\leqslant\int_0^1|k(s,t)||x(t)|\,dt\\&=\int_0^1|k(s,t)|^{1/2}|k(s,t)|^{1/2}|x(t)|\,dt\\&\leqslant\left(\int_0^1|k(s,t)|\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^1|k(s,t)||x(t)|^2dt\right)^{1/2}\\&\leqslant\beta^{1/2}\left(\int_0^1|k(s,t)||x(t)|^2dt\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\|Ax\|^2&=\int_0^1|(Ax)(s)|^2ds\leqslant\int_0^1\left\{\beta\int_0^1|k(s,t)||x(t)|^2dt\right\}ds\\&=\beta\int_0^1|x(t)|^2dt\int_0^1|k(s,t)|\,ds,\end{aligned}$$

我们注意到被积函数为非负的，故我们可以变换积分顺序. 因此

$$\| Ax \|^2 \leqslant \beta\gamma \int_0^1 | x(t) |^2 \mathrm{d}t = \beta\gamma \| x \|^2.$$

所以有 $\| Ax \| \leqslant (\beta\gamma)^{1/2} \| x \|$ 对所有的 $x \in L^2[0,1]$ 成立. 这首先证明了任取 $x \in L^2[0,1]$, 有 $Ax \in L^2[0,1]$. 然后表明 A 为有界的且 $\| A \| \leqslant (\beta\gamma)^{1/2}$. 又显然 A 为线性的, 故 A 为 $L^2[0,1]$ 上的有界线性算子. 这就证明了第一部分.

为证第二部分, 设

$$k_1(s,t) = \overline{k(t,s)}, \quad k_2(s,t) = | k(s,t) |,$$

对于 $x \in L^2[0,1]$, 设

$$B_i(x)(s) = \int_0^1 k_i(s,t)x(t)\mathrm{d}t, \quad 0 \leqslant s \leqslant 1, \quad i = 1,2.$$

重复上面的证明, 可知 B_1 和 B_2 为 $L^2[0,1]$ 上的有界线性算子. 若 $x, y \in L^2[0,1]$, 则

$$\langle x, B_1 y \rangle = \int_0^1 x(s)\, \overline{B_1(y)(s)}\mathrm{d}s = \int_0^1 x(s)\mathrm{d}s \int_0^1 \overline{k_1(s,t)y(t)}\mathrm{d}t.$$

我们希望能够变换上面的积分顺序. 由于 $|\overline{k_1(s,t)}| = k_2(t,s)$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^1 | x(s) |\, | \overline{k_1(s,t)y(t)} |\, \mathrm{d}s &= \int_0^1 | y(t) |\, \mathrm{d}t \int_0^1 k_2(t,s)\, | x(s) |\, \mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 | y(t) |\, B_2(| x |)(t)\mathrm{d}t \\ &= \langle B_2(| x |), | y | \rangle,\end{aligned}$$

上式为有限的, 因为 $B_2(|x|)$ 及 $|y|$ 都在 $L^2[0,1]$ 中. 因此我们可以应用 Fubini 定理来变换积分顺序:

$$\begin{aligned}\langle x, B_1 y \rangle &= \int_0^1 \overline{y(t)}\mathrm{d}t \int_0^1 \overline{k_1(s,t)}x(s)\mathrm{d}s = \int_0^1 \overline{y(t)}\mathrm{d}t \int_0^1 k(t,s)x(s)\mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 \overline{y(t)}A(x)(t)\mathrm{d}t = \langle Ax, y \rangle.\end{aligned}$$

这证明了 $B_1 = A^*$. ■

问题 6.1.13 设 H 为可分 Hilbert 空间, $\{u_n\}$ 为 H 的无穷标准正交基. 若 $A \in BL(H)$ 定义为 $Au_n = u_{n+1}$, $n \geqslant 1$, 求证: $A^* u_1 = 0$, 对于 $n = 2,3,\cdots$ 有 $A^* u_n = u_{n-1}$. 证明: $A^* A = I \neq AA^*$, 其中 I 为 H 上的恒等算子.

解答 若 $m = 1,2,\cdots$, 则

$$\langle u_{n+1}, u_m \rangle = \langle Au_n, u_m \rangle = \langle u_n, A^* u_m \rangle.$$

由于 $\{u_n\}$ 为标准正交基, H 中每一元 y 有 Fourier 展开式

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, u_n \rangle u_n. \tag{14}$$

因此

$$A^* u_m = \sum_{n=1}^{\infty} \langle A^* u_m, u_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u_m, u_{n+1} \rangle u_n.$$

由于$\{u_n\}$为标准正交的，所以当$m=1$时，则上面最后一个和式中每一项都为0，而在$m\geqslant 2$情形，唯一不为零的项为

$$\langle u_m, u_m\rangle u_{m-1} = u_{m-1}.$$

所以有

$$A^* u_1 = 0, \quad A^* u_m = u_{m-1}, \quad m \geqslant 2.$$

为证第二部分，我们有

$$AA^*(u_1) = A(0) = 0 \neq I(u_1),$$

因此$AA^* \neq I$. 另外对$n=1,2,3,\cdots$

$$\langle A^* Ax, u_n\rangle = \langle Ax, Au_n\rangle = \langle Ax, u_{n+1}\rangle = \langle x, A^* u_{n+1}\rangle = \langle x, u_n\rangle.$$

所以由(14)式得

$$A^* Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \langle A^* Ax, u_n\rangle u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n\rangle u_n = x.$$

从而有$A^* A = I$. ■

问题 6.1.14 设$H=\mathbb{K}^n$，$A\in BL(H)$. 设$x_1, x_2, \cdots x_n$为H的代数基，A相对于$x_1, x_2, \cdots, x_n$由矩阵(k_{ij})表示. 求证：相对于$x_1, x_2, \cdots, x_n$，矩阵$(\overline{k_{ji}})$可能不能表示A^*（见问题6.1.10）.

解答 相对于$x_1, x_2, \cdots, x_n$，A由矩阵$\boldsymbol{M}=(k_{ij})$表示意味着

$$A(x_j) = \sum_{i=1}^{n} k_{ij} x_i, \quad j = 1,2,\cdots,n.$$

设$t_{ij}=\overline{k_{ji}}$，B由矩阵$\boldsymbol{M}_1=(t_{ij})$表示，则

$$B(x_j) = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} x_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{k_{ji}} x_i.$$

因此

$$\langle Ax_j, x_r\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} k_{ij} x_i, x_r \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} k_{ij} \langle x_i, x_r\rangle,$$

$$\langle x_j, Bx_r\rangle = \left\langle x_j, \sum_{i=1}^{n} \overline{k_{ri}} x_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} k_{ri} \langle x_j, x_i\rangle.$$

设$c_{ij}=\langle x_j, x_i\rangle$且矩阵$\boldsymbol{G}$由$(c_{ij})$表示，则

$$\langle Ax_j, x_r\rangle = \sum_{i=1}^{n} k_{ij} c_{ri} = \sum_{i=1}^{n} c_{ri} k_{ij};$$

这是$\boldsymbol{GM}$的第r行第j列元素. 进一步地

$$\langle x_j, Bx_r\rangle = \sum_{i=1}^{n} k_{ri} c_{ij},$$

为$\boldsymbol{MG}$的第r行第j项的元素. 这说明若任取j, r有$\langle Ax_j, x_r\rangle = \langle x_j, Bx_r\rangle$成立，则有$\boldsymbol{GM}=\boldsymbol{MG}$，但这个等式不总成立. 事实上，若对所有$\boldsymbol{M}$有$\boldsymbol{GM}=\boldsymbol{MG}$，则$\boldsymbol{G}$必为$c\boldsymbol{I}$，其中$\boldsymbol{I}$为单位矩

阵，c 为一纯量. 这就完成了证明. ■

问题 6.1.15 设 H_1, H_2 为 Hilbert 空间，$T: H_1 \to H_2$ 为有界线性算子.

(a) 若 $M_1 \subset H_1$，$T(M_1) \subset M_2$，求证：$M_1^{\perp} \supset T^*(M_2^{\perp})$.

(b) 若 M_1 和 M_2 分别为 H_1 和 H_2 的闭子空间，求证：$T(M_1) \subset M_2$ 当且仅当 $M_1^{\perp} \supset T^*(M_2^{\perp})$.

(c) 若用 $Z(A)$及 $R(A)$分别表示算子 A 的零空间及 A 的值域，求证：

$$R(T^*) \subset Z(T)^{\perp}, \tag{15}$$

$$Z(T) = R(T^*)^{\perp}. \tag{16}$$

解答 (a) 设 $x \in T^*(M_2^{\perp})$及 $u \in M_1$，则存在 $y \in M_2^{\perp}$ 使得 $x = T^* y$，且

$$T(u) \in T(M_1) \subset M_2.$$

因此$\langle T(u), y\rangle = 0$. 所以

$$\langle u, x\rangle = \langle u, T^* y\rangle = \langle Tu, y\rangle = 0.$$

从而我们证明了若 $x \in T^*(M_2)$，则$\langle x, u\rangle = 0$ 对任意的 $u \in M_1$ 成立，即有 $x \in M_1^{\perp}$. 这就证明了(a).

(b) 若 M_1 和 M_2 分别为 H_1 和 H_2 的闭子空间，若 $T(M_1) \subset M_2$，则由已证的(a)知

$$M_1^{\perp} \supset T^*(M_2^{\perp}). \tag{17}$$

反之，假设(17)式成立，在(a)中用 T^* 代替 T，用 $E_1 = M_2^{\perp}$ 和 $E_2 = M_1^{\perp}$ 分别代替 M_1 和 M_2，则(17)式等价于

$$T^*(E_1) \subset E_2.$$

从而利用已证的(a)有

$$E_1^{\perp} \supset T^{**}(E_2^{\perp}).$$

但

$$E_1^{\perp} = M_2^{\perp\perp} = M_2, \quad E_2^{\perp} = M_1^{\perp\perp} = M_1, \quad T^{**} = T.$$

因此 $M_2 \supset T(M_1)$. 这就证明了(b).

(c) 设 $M_1 = Z(T)$，$M_2 = \{0\} \subset H_2$. 则 $T(M_1) = \{0\} \subset M_2$. 由已证的(b)有

$$M_1^{\perp} \supset T^*(M_2^{\perp}). \tag{18}$$

但是 $M_2^{\perp} = \{0\}^{\perp} = H_2$，从而

$$T^*(M_2) = T^*(H_2) = R(T^*).$$

因此(18)式可以推出(15)式.

设 $y \in R(T)^{\perp}$. 由于任取 $x \in H_1$ 有 $Tx \in R(T)$，故

$$\langle x, T^* y\rangle = \langle Tx, y\rangle = 0.$$

因此任取 $x \in H_1$ 有$\langle x, T^* y\rangle = 0$. 这说明 $T^* y = 0$，即 $y \in Z(T^*)$. 因此我们有

$$R(T)^{\perp} \subset Z(T^*). \tag{19}$$

由(15)式，利用 $Z(T)$为闭子空间知

$$R(T^*)^{\perp} \supset Z(T)^{\perp\perp} = Z(T). \tag{20}$$

在(19)式中用 T^* 代替 T 有

$$R(T^*)^{\perp} \subset Z(T^{**}) = Z(T). \tag{21}$$

综合(20)式及(21)式可以得到(16)式. ■

问题 6.1.16 求证：设 H 为 Hilbert 空间，则有界线性算子 $T: H \to H$ 的值域为有限维空间当且仅当 T 有如下的形式：

$$T(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle x, u_j \rangle v_j, \quad x \in H, \tag{22}$$

其中 $u_1, u_2, \cdots, u_n, v_1, v_2, \cdots, v_n$ 为 H 中固定元.

解答 若存在 H 中的向量 $u_1, \cdots, u_n$ 及 $v_1, \cdots, v_n$ 使得(22)式成立，则任取 $x \in H$ 有 $T(x) \in \operatorname{span}\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. 因此 T 的值域 $R(T)$ 为有限维的.

反之，若 T 的值域为有限维的. 设 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 为 $R(T)$ 的标准正交基，则

$$T(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle Tx, v_j \rangle v_j, \quad x \in H.$$

由于 $\langle Tx, v_j \rangle = \langle x, T^* v_j \rangle$，故若取 $u_j = T^* v_j$ 则有(22). 这就完成了证明. ■

问题 6.1.17 设 H 为 Hilbert 空间，$\phi: H \times H \to \mathbb{K}$ 为 H 上的共轭双线性泛函. 又设存在常数 $\alpha, \beta > 0$ 使得任取 $x, y \in H$，

$$|\phi(x, y)| \leqslant \alpha \|x\| \|y\|, \tag{23}$$

$$\beta \|x\|^2 \leqslant \operatorname{Re}\phi(x, x). \tag{24}$$

求证：存在唯一的 $S \in BL(H)$ 使得

$$\langle x, y \rangle = \phi(x, Sy), \quad x, y \in H.$$

证明 S^{-1} 在 $BL(H)$ 中存在，$\|S\| \leqslant 1/\beta$，$\|S^{-1}\| \leqslant \alpha$. [这个结果被称为 Lax-Milgram 定理.]

解答 由(23)式知 ϕ 为有界的且 $\|\phi\| \leqslant \alpha$. 因此由问题 6.1.7 知存在 $A \in BL(H)$ 使得

$$\phi(x, y) = \langle Ax, y \rangle, \quad x, y \in H. \tag{25}$$

进一步地有 $\|A\| = \|\phi\| \leqslant \alpha$. 利用(24)式和(25)式有

$$\beta \|x\|^2 \leqslant \operatorname{Re}\phi(x, x) \leqslant |\phi(x, x)| = |\langle Ax, x \rangle| \leqslant \|Ax\| \|x\|.$$

因此

$$\beta \|x\| \leqslant \|Ax\|, \quad x \in H, \tag{26}$$

由于 $\beta > 0$，这说明只有当 $x = 0$ 时才有 $Ax = 0$，从而 A 为单射.

值域 $R(A)$ 为 H 的子空间. 设 $y \in \overline{R(A)}$，则存在 $R(A)$ 中一列元 $\{y_n\}$ 使得 $y_n \to y$，$y_n = Ax_n$，$x_n \in H$. 由(26)式知

$$\beta \|x_n - x_m\| \leqslant \|A(x_n - x_m)\| = \|y_n - y_m\|.$$

由于 $\beta > 0$，这说明 $\{x_n\}$ 为 H 中的柯西列，因而必收敛. 若 $x_n \to x$，则 $y_n = Ax_n \to Ax$. 因此 $y = Ax \in R(A)$. 从而 $R(A)$ 为 H 的闭子空间.

设 x 为 H 中元，则 $x = x_1 + x_2$，其中 $x_1 \in R(A)$，$x_2 \in R(A)^{\perp}$，利用(24)式和(25)式有

$$\beta \| x_2 \|^2 \leqslant \mathrm{Re}\phi(x_2, x_2) = \mathrm{Re}(Ax_2, x_2) = 0,$$

这是由于 $Ax_2 \in R(A), x_2 \in R(A)^{\perp}$. 我们证明了 $x_2 = 0$, 因此 $x = x_1 \in R(A)$. 从而 $R(A) = H$. 所以 $A: H \to H$ 为一一映射且为有界线性算子. 由(26)式知

$$\beta \| A^{-1}x \| \leqslant \| AA^{-1}x \| = \| x \|, \quad x \in H.$$

所以 A^{-1} 有界且 $\| A^{-1} \| \leqslant 1/\beta$. 因此 A^* 及 $(A^{-1})^*$ 在 $BL(H)$ 中存在且

$$A^*(A^{-1}) = (A^{-1}A)^* = I^* = I, \quad (A^{-1})^* A^* = (AA^{-1})^* = I^* = I.$$

设 $S = (A^{-1})^*$, 则 $S^{-1} = A^*$ 在 $BL(H)$ 中存在且

$$\| S \| = \| (A^{-1})^* \| = \| A^{-1} \| \leqslant 1/\beta,$$

$$\| S^{-1} \| = \| A^* \| = \| A \| \leqslant \alpha,$$

再由(25)式有

$$\phi(x, Sy) = \langle Ax, Sy \rangle = \langle Ax, (A^{-1})^* y \rangle = \langle A^{-1}Ax, y \rangle = \langle x, y \rangle,$$

对任意的 $x, y \in H$ 成立. ■

问题 6.1.18 设 H 为 Hilbert 空间, $A: H \to H$ 为线性算子. 假设存在线性算子 $B: H \to H$ 使得

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, By \rangle, \quad x, y \in H.$$

求证: A 和 B 为有界的且 $B = A^*$

解答 设

$$E = \{ A(x) : \| x \| \leqslant 1 \}.$$

任取 $z \in E$, 则存在 $x \in H$, $\| x \| \leqslant 1$, $A(x) = z$. 任取 $y \in H$ 有

$$| \langle z, y \rangle | = | \langle Ax, y \rangle | = | \langle x, By \rangle | \leqslant \| x \| \| By \| \leqslant \| By \|.$$

因此任取 $z \in E$ 有 $| \langle z, y \rangle | \leqslant \| By \|$. 所以由问题 5.3.15 知 E 为有界集, 即 A 为有界的. 因此 A 在 $BL(H)$ 中有唯一的伴随算子 A^*, 使得

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle, \quad x, y \in H.$$

因此

$$\langle x, By \rangle = \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle, \quad x, y \in H.$$

因此任取 $y \in H$ 有 $By = A^* y$. 故有 $B = A^*$, 从而 $B \in BL(H)$. ■

问题 6.1.19 设 H 为 Hilbert 空间, $A \in BL(H)$. 求证: A 下有界当且仅当 A^* 为满射.

解答 设 A^* 为满射, 为证 A 下有界, 令

$$E = \{ x \in H : \| Ax \| \leqslant 1 \}.$$

任取 $y \in H$, 存在 $z \in H$ 使得 $A^*(z) = y$, 故若 $x \in E$,

$$| \langle x, y \rangle | = | \langle x, A^* z \rangle | = | \langle Ax, z \rangle | \leqslant \| Ax \| \| z \| \leqslant \| z \|.$$

若 $\alpha(y) = \| z \|$, 其中 $z \in H$ 是使得 $A^*(z) = y$ 成立的某元, 则

$$| \langle x, y \rangle | \leqslant \alpha(y), \quad x \in E.$$

因此, 由问题 5.3.15 知 E 为有界集. 从而存在 $\lambda > 0$ 使得 $\forall x \in E$ 有 $\| x \| \leqslant \lambda$. 若 $x \in H, x \neq$

0，令

$$k=\frac{\lambda+1}{\|x\|}.$$

则 $\|kx\|=\lambda+1>\lambda$，因此有

$$kx\notin E,\quad \|A(kx)\|>1,$$

$$\|A(x)\|>\frac{1}{k}=\frac{\|x\|}{\lambda+1}.$$

因此有

$$\frac{1}{\lambda+1}\|x\|\leqslant\|A(x)\|.$$

上式当 $x=0$ 时显然也成立. 这样就证明了 A 为下有界的.

反之，若 A 为下有界的，则存在 $\beta>0$ 使得

$$\beta\|x\|\leqslant\|Ax\|,\quad x\in H.$$

仅当 $x=0$ 才有 $Ax=0$，故 A 为单射. 设 $Y=R(A)$ 为 A 的值域，则 Y 为 H 的子空间且 $A:H\to Y$ 为一一映射，其逆映射 $A^{-1}:Y\to H$ 为线性的.

若 z 为 H 中任一元且

$$g(y)=\langle A^{-1}y,z\rangle,\quad y\in Y.$$

则 g 为 H 上的线性泛函. 由于

$$\beta\|A^{-1}y\|\leqslant\|AA^{-1}y\|=\|y\|,\quad y\in Y,$$

所以

$$|g(y)|=|\langle A^{-1}y,z\rangle|\leqslant\|A^{-1}y\|\,\|z\|\leqslant\frac{1}{\beta}\|y\|\,\|z\|.$$

对所有的 $y\in Y$ 成立. 因此 g 为有界的，由问题 5.3.12 知存在 $f\in H'$ 使得

$$f|_Y=g,\ \|f\|=\|g\|.$$

由 Riesz 表示定理，存在 $y\in H$ 使得

$$f(x)=\langle x,y\rangle,\quad x\in H.$$

因此对 $x\in H$ 有

$$\langle x,A^*y\rangle=\langle Ax,y\rangle=f(Ax)=g(Ax)=\langle A^{-1}Ax,z\rangle=\langle x,z\rangle.$$

由于上式对任取的 $x\in H$ 都成立，故必有 $z=A^*y$. 又由于这对所有的 $z\in H^*$ 均成立，从而 A^* 为满射. 这就完成了证明. ■

问题 6.1.20（有界逆定理） 设 H_1 和 H_2 为 Hilbert 空间，$T\in B(H_1,H_2)$ 且 T 为一一映射. 求证：T 的逆 T^{-1} 在 $BL(H_2,H_1)$ 中.

解答 由问题 6.1.8 知存在 $T^*\in B(H_2,H_1)$ 使得

$$\langle Tx,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle,\quad x\in H_1,\quad y\in H_2.$$

令

$$E=\{y\in H_2:\|T^*y\|\leqslant 1\}.$$

若 y 为 H_2 中任意元，由于 T 为一一映射，则存在唯一的 $u\in H_1$ 使得 $T(u)=y$. 因此对 $z\in E$

$$|\langle z,y\rangle|=|\langle z,Tu\rangle|=|\langle T^*z,u\rangle|\leqslant\|T^*z\|\,\|u\|\leqslant\|u\|.$$

所以若 $\alpha(y)=\|T^{-1}y\|=\|u\|$，则

$$|\langle z,y\rangle|\leqslant\alpha(y),\quad z\in E.$$

上式对 H_2 中的任一元 y 都成立，故由问题 5.3.15 知 H_2 的子集 E 为有界的. 设任取 $y\in E$ 有 $\|y\|\leqslant\lambda$.

设 y 为 H_2 中一元，若 $y\neq0$，令 $k=\dfrac{\lambda+1}{\|y\|}$，则有 $\|ky\|=\lambda+1>\lambda$，因此 $ky\notin E$. 所以有

$$\|T^*(ky)\|>1,\quad \|T^*y\|>\frac{1}{k}=\frac{1}{\lambda+1}\|y\|.$$

从而有

$$\|y\|\leqslant(\lambda+1)\|T^*y\|,\quad y\in H_2. \tag{27}$$

上式当 $y=0$ 时是显然成立的.

设 $R(T^*)$ 为 T^* 的值域且 $y\in\overline{R(T^*)}$，则存在 H_2 中一列元 $\{x_n\}$ 使得 $T^*x_n\to y$. 由(27)式有

$$\|x_n-x_m\|\leqslant(\lambda+1)\|T^*x_n-T^*x_m\|.$$

这说明 $\{x_n\}$ 为 H_2 中的柯西列，因此它必收敛到 H_2 中某点 x. 由于 T^* 连续，故有 $T^*x_n\to T^*x$. 从而有 $y=T^*x$. 这说明 $y\in R(T^*)$，因此 $R(T^*)$ 为 H_1 的闭子空间①. 因此有

$$R(T^*)^{\perp\perp}=R(T^*).$$

但由问题 6.1.15(c)知 $R(T^*)^{\perp}=Z(T)$，又由于 T 为一一映射，故 $Z(T)=0$，所以有

$$R(T^*)=Z(T)^{\perp}=\{0\}^{\perp}=H_1,$$

即 T^* 为满射. 由于(27)式可以推出 T^* 为单射，故存在线性算子 $S:H_1\to H_2$ 使得

$$T^*S(x)=x,\quad x\in H_1.$$

由(27)式知

$$\|Sx\|\leqslant(\lambda+1)\|T^*Sx\|=(\lambda+1)\|x\|.$$

因此 S 为有界的，所以 S 有唯一的伴随算子 $S^*\in BL(H_2,H_1)$. 设 $x\in H_1$，$y\in H_2$ 及 $z=T^{-1}y$，则

$$\langle Sx,y\rangle=\langle Sx,Tz\rangle=\langle T^*Sx,z\rangle=\langle x,z\rangle=\langle x,T^{-1}y\rangle.$$

从而

$$\langle x,T^{-1}y\rangle=\langle Sx,y\rangle=\langle x,S^*y\rangle$$

对 $x\in H_1$，$y\in H_2$ 成立. 这可以推出 $T^{-1}y=S^*y$ 对 $y\in H_2$ 成立，即有 $T^{-1}=S^*$，由于 $S^*\in BL(H_2,H_1)$，这就完成了证明. ■

---

① 原文中 $R(T^*)$ 为闭集的证明有误.

问题 6.1.21 设 H_1, H_2 为 Hilbert 空间,$T: H_1 \to H_2$ 为线性算子且

$$G(T) = \{(x, Tx): x \in H_1\}$$

为 T 的图像. 求证: T 为连续的当且仅当 $G(T)$ 在 $H_1 \times H_2$ 中为闭集.

解答 这个结果就是关于 Hilbert 空间的闭图像定理,我们将用 Hilbert 空间的技巧来证明它. T 的图像为 $H_1 \times H_2$ 的子空间,这是因为 T 为线性算子. $G(T)$ 为闭集当且仅当下列条件满足:

$$x_n \to x \text{ 且 } Tx_n \to y \quad \Rightarrow \quad y = Tx.$$

上述这个条件当 T 为连续时自然是满足的.

反之,若 $H_3 = G(T)$ 在 $H_1 \times H_2$ 为闭集,则由于 $H_1 \times H_2$ 为 Hilbert 空间知 H_3 为 Hilbert 空间. 令

$$S(x, Tx) = x, \quad x \in H_1.$$

这就定义了一个映射 $S: G(T) \to H_1$. 容易证明 S 为线性算子且为一一映射. 由于

$$\| (x, Tx) \|^2 = \| x \|^2 + \| Tx \|^2 \geqslant \| x \|^2 = \| S(x, Tx) \|^2,$$

故 S 为有界的. 因此 $S \in B(H_3, H_1)$. 由问题 6.1.20 知 $S^{-1} \in BL(H_1, H_3)$. 若 $\alpha = \| S^{-1} \|$,则

$$\| (x, Tx) \| = \| S^{-1} x \| \leqslant \alpha \| x \|.$$

因此

$$\| x \|^2 + \| Tx \|^2 = \| (x, Tx) \|^2 \leqslant \alpha^2 \| x \|^2,$$

$$\| Tx \|^2 \leqslant \alpha^2 \| x \|^2.$$

这说明 T 为有界的. ■

6.2 自伴算子,酉算子及正规算子

设 H 为 Hilbert 空间,$A \in BL(H)$,A^* 为其伴随算子. 我们称 A 为**自伴的**或是**埃尔米特的**,若有 $A^* = A$. 若 A^* 与 A 可交换,即有 $A^* A = AA^*$,则称 A 为**正规算子**. 若 $A^* A = I = AA^*$,则称 A 为**酉算子**,其中 I 为 H 上的恒等算子.

若 A 为自伴的或酉算子,则它必为正规的. 若 A 为自伴的,则

$$\langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle},$$

故任取 $x \in H$,$\langle Ax, x \rangle$ 为实数. 若 A 为自伴的且任取 $x \in H$ 有 $\langle Ax, x \rangle \geqslant 0$,则称 A 为**正的**,记为 $A \geqslant 0$. 若 A 和 B 为自伴的且 $A - B \geqslant 0$,则记为 $A \geqslant B$ 或 $B \leqslant A$.

若 $T: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ 由矩阵 $\boldsymbol{M} = (k_{ij})$ 表示,即

$$(Tx)(i) = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} x(j), \quad i = 1, 2, \cdots, n, \quad x \in \mathbb{K}^n,$$

则由问题 6.1.10 知 T^* 由下式给出:

$$(T^* y)(i) = \sum_{j=1}^{n} \overline{k_{ji}} y(j).$$

因此 T^* 由 $\boldsymbol{M}$ 的共轭转置$(\overline{\boldsymbol{M}})'$来表示. 因此 T 为自伴的当且仅当$(\overline{\boldsymbol{M}})' = \boldsymbol{M}$. T 为酉算子当且仅当$(\overline{\boldsymbol{M}})'$为 $\boldsymbol{M}$ 的逆矩阵.

若 $A \in BL(H)$, $B = \frac{1}{2}(A + A^*)$, $C = \frac{1}{2}(A - A^*)$. 则有 $A = B + C$, $B^* = B$, $C^* = -C$.

若数域$\mathbb{K}$ 为$\mathbb{C}$, 且

$$B = \frac{1}{2}(A + A^*), \quad C = \frac{1}{2\mathrm{i}}(A - A^*),$$

则 B 和 C 均为自伴的且 $A = B + \mathrm{i}C$.

练习

1. 设 H 为复 Hilbert 空间, $A \in BL(H)$, $B = c(A - A^*)$, 其中 c 为一纯量. 若 A 不为自伴的, 请找出所有的 c 使得 B 为自伴的.

2. 设 A, B, c 如上题. 求证 B 为正规的.

3. 设 $H = \mathbb{C}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 及 $A \in BL(H)$且其矩阵表示为

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ \mathrm{i} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

找到所有的 a 使得 A 为正规的.

问题

问题 6.2.1 设 $H = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 且 $A \in BL(H)$. 又设 A 相对于自然基底 $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1)$的矩阵表示为$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. 求证:

(a) A 为自伴的当且仅当 $b = c$.

(b) A 为正的当且仅当

$$b = c, \quad a \geqslant 0, \quad d \geqslant 0, \quad ad \geqslant b^2;$$

(c) A 为酉算子当且仅当对某一 θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ 有

$$a = d = \cos\theta, \quad c = -b = \sin\theta, \quad \text{或} \quad a = -d = \cos\theta, \quad b = c = \sin\theta;$$

(d) A 为正规的当且仅当

$$b = c \quad \text{或} \quad b = -c, \quad a = d.$$

解答 若 A 由矩阵$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$表示, 则 A^* 的矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}.$$

这是由于$\mathbb{K}=\mathbb{R}$. 因此 A 的表示与 A^* 的表示相等当且仅当 $b=c$. 从而 $A=A^*$ 当且仅当 $b=c$. 这就证明了(a).

算子 A 被称为正的，若 A 为自伴的且任取 $x\in H$ 有 $\langle Ax,x\rangle\geqslant 0$. 若 $y=Ax$，则

$$y(1)=ax(1)+bx(2),\quad y(2)=cx(1)+dx(2),$$

$$\langle Ax,x\rangle=y(1)x(1)+y(2)x(2)=ax(1)^2+(b+c)x(1)x(2)+dx(2)^2.$$

因此 A 为正的当且仅当 $b=c$，且

$$ax(1)^2+2bx(1)x(2)+dx(2)^2\geqslant 0,\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2. \tag{1}$$

若上式成立，取 $\boldsymbol{x}=(1,t)$ 或 $\boldsymbol{x}=(t,1)$ 则有

$$a+2bt+dt^2\geqslant 0,\quad at^2+2bt+d\geqslant 0$$

对所有 t 成立. 这只有在

$$a\geqslant 0,\quad d\geqslant 0,\quad b^2\leqslant ad$$

时才可能成立. 另外若这个条件满足，则可证(1)式必成立，这就证明了(b).

为证(c)，注意到 $A^*A=I=AA^*$ 当且仅当

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix},$$

或等价地

$$\begin{bmatrix} a^2+c^2 & ac+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{bmatrix}.$$

因此 A 为酉算子当且仅当

$$a^2+c^2=b^2+d^2=a^2+b^2=c^2+d^2=1, \tag{2}$$

$$ab+cd=ac+bd=0. \tag{3}$$

若这些等式成立，则存在 θ 使得

$$a=\cos\theta,\quad c=\sin\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

因此

$$b^2=1-a^2=\sin^2\theta,\quad d^2=1-c^2=\cos^2\theta,$$

$$b=\pm\sin\theta,\quad d=\mp\cos\theta.$$

另外，若

$$a=\cos\theta,\quad c=\sin\theta,\quad b=\pm\sin\theta,\quad d=\mp\cos\theta,$$

则(2)式和(3)式成立，从而 A 为酉算子. 这就证明了(c).

最后，$A^*A=AA^*$ 当且仅当

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}.$$

或等价地

$$\begin{bmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{bmatrix}.$$

上式成立当且仅当 $b^2=c^2$，$ab+cd=ac+bd$，即

$$(b-c)(b+c) = 0 = (b-c)(a-d).$$

或等价地

$$b=c \quad 或 \quad b=-c, \quad a=d.$$

这就证明了(d). ■

问题 6.2.2 设 H 为 Hilbert 空间，$T\in BL(H)$. 若 T 为非零且为自伴的. 求证：T^n 为非零自伴的.

解答 若 A 和 B 自伴且 $AB=BA$，则

$$(AB)^* = B^*A^* = BA = AB,$$

从而 AB 为自伴的. 由此可知若 T 自伴，则任取 $n\geqslant 1$，T^n 也自伴.

若 T 自伴且 $T^2(x)=0$，则

$$\langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = \langle T^2x, x\rangle = 0,$$

因此有 $Tx=0$. 所以若 T 非零且为自伴的，则 T^2 为非零自伴的. 由归纳法知若 $n=2^j$，$j=1,2,\cdots$，则 T^j 为非零自伴的. 若 $2^j<n<2^{j+1}$，设 $m=2^j$，$r=n-m$. 则

$$\langle T^nx, T^{m-r}x\rangle = \langle T^{n-1}x, T^*T^{m-r}x\rangle = \langle T^{n-1}x, T^{m-r+1}x\rangle.$$

通过 r 次上述运算有

$$\langle T^nx, T^{m-r}x\rangle = \langle T^{n-r}x, T^{m-r+r}x\rangle = \langle T^mx, T^mx\rangle.$$

因此若 $T^n(x)=0$，则 $T^m(x)=0$. 因此若 T^m 非零，则 T^n 也非零对 $n=m+r$，$1\leqslant r\leqslant m$ 成立. 这就完成了证明. ■

问题 6.2.3 设 A 为 Hilbert 空间 H 上的自伴算子. 求证：任取 $x\in H$ 有 $\langle Ax, x\rangle=0$ 当且仅当 $A=0$.

解答 若 $A=0$，则显然有任取 $x\in H$，$\langle Ax, x\rangle=0$. 反之，设任取 $y\in H$ 有 $\langle Ay, y\rangle=0$. 若 $y=x+Ax$，则 $Ay=Ax+A^2x$，因而

$$0=\langle Ay, y\rangle = \langle Ax+A^2x, x+Ax\rangle = \langle Ax, x\rangle + \langle Ax, Ax\rangle + \langle A^2x, x\rangle + \langle A^2x, Ax\rangle.$$

上式最后一行的第一项为 0，最后一项也为 0，这是由于它可以写成 $\langle Az, z\rangle$，$z=Ax$. 而由于 A 为自伴的，第三项可以写为 $\langle Ax, Ax\rangle$. 故有

$$0 = 2\langle Ax, Ax\rangle, \quad x\in H.$$

因此任取 $x\in H$ 有 $Ax=0$，即 $A=0$. ■

问题 6.2.4 设 H 为 Hilbert 空间，$A\in BL(H)$. 求证：

(a) 若数域 $\mathbb{K}$ 为 $\mathbb{C}$，则 A 为自伴的当且仅当任取 $x\in H$，$\langle Ax, x\rangle$ 为实数.

(b) 若数域 $\mathbb{K}$ 为 $\mathbb{R}$，则 A 为自伴的当且仅当任取 $x, y\in H$ 有 $\langle Ax, y\rangle=\langle Ay, x\rangle$.

解答 (a) 若 A 为自伴的，则

$$\langle Ax,x\rangle = \langle x,Ax\rangle = \overline{\langle Ax,x\rangle};$$

故任取 $x\in H$,$\langle Ax,x\rangle$为实数.

反之,设$\mathbb{K}=\mathbb{C}$且任取 $x\in H$,$\langle Ax,x\rangle$为实数,则

$$\langle A^*x,x\rangle = \langle x,Ax\rangle = \langle Ax,x\rangle,\quad x\in H.$$

因此若 $B=\mathrm{i}(A^*-A)$,则

$$\langle Bx,x\rangle = \mathrm{i}\langle A^*x-Ax,x\rangle = 0,\quad x\in H.$$

我们有 $B^*=-\mathrm{i}(A-A^*)=B$,即 B 为自伴的.从而由问题 6.2.3 知 $B=0$.因此有 $\mathrm{i}(A^*-A)=0$,即 $A=A^*$,A 为自伴的.

(b) 若 A 自伴,则任意的 $x,y\in H$ 有

$$\langle Ax,y\rangle = \langle x,Ay\rangle = \overline{\langle Ay,x\rangle} = \langle Ay,x\rangle.$$

这是由于$\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

反之,若任取 $x,y\in H$ 有

$$\langle Ax,y\rangle = \langle Ay,x\rangle,$$

则

$$\langle Ax,y\rangle = \langle Ay,x\rangle = \langle y,A^*x\rangle = \langle A^*x,y\rangle.$$

若令 $y=Ax-A^*x$,则有

$$\langle Ax-A^*x,Ax-A^*x\rangle = \langle Ax-A^*x,y\rangle = 0.$$

所以任取 $x\in H$ 有 $Ax-A^*x=0$,即 $A=A^*$.因此 A 为自伴的. ■

问题 6.2.5 设 H 为 Hilbert 空间.求证:

(a) 所有 H 上的自伴算子之集为 $BL(H)$的闭实子空间.

(b) 若 A 和 B 为自伴的,则 AB 为自伴的当且仅当 $AB=BA$.

(c) 若 A 和 B 为自伴的,则 $AB=0$ 当且仅当 A 的值域与 B 的值域正交.

解答 (a) 设 W 为所有 $BL(H)$中的自伴算子之集.若 $A,B\in W$ 及 $k\in\mathbb{R}$,则

$$(kA+B)^* = \bar{k}A^*+B^* = kA+B,$$

所以 $kA+B\in W$.因此 W 为 $BL(H)$的实线性子空间.

若 A 为 $BL(H)$闭包中一元,则存在 $A_n\in W$ 使得 $A_n\to A$,由于

$$\|A_n^*-A^*\| = \|(A_n-A)^*\| = \|A_n-A\|,$$

则

$$\begin{aligned}\|A-A^*\| &\leqslant \|A-A_n\|+\|A_n-A_n^*\|+\|A_n^*-A^*\|\\ &= \|A-A_n\|+\|A_n-A\|.\end{aligned}$$

上式当 $n\to\infty$时收敛到 0,故 $A^*=A$,即 $A\in W$.所以 W 为闭集.

(b) 由于$(AB)^*=B^*A^*=BA$,故 AB 为自伴的当且仅当$AB=BA$.

(c) 若 $AB=0$,则任取 $x,y\in H$

$$\langle Ax,By\rangle = \langle x,A^*By\rangle = \langle x,ABy\rangle = 0,$$

所以 A 的值域与 B 的值域正交.另外若任取 $x,y\in H$ 有 $A(x)\perp B(y)$,则

$$0 = \langle Ax, By\rangle = \langle x, A^* By\rangle = \langle x, ABy\rangle.$$

在上式中取 $x=ABy$ 则有 ABy 对任意的 y 成立，即 $AB=0$. ■

问题 6.2.6 设 W 为所有 $BL(H)$ 中自伴算子之集. 若 $A,B\in W$，记 $A\leqslant B$ 若有

$$\langle Ax, x\rangle \leqslant \langle Bx, x\rangle, \quad x \in H.$$

求证：

(a) 这定义了 W 上的一个半序.

(b) 若 $A\leqslant B$，则任取 $C\in W$ 有 $A+C\leqslant B+C$，任取 $t\geqslant 0$，有 $tA\leqslant tB$.

(c) $0\leqslant A\leqslant B$ 一般不能推出 $A^2\leqslant B^2$.

解答 (a) $A\leqslant A$ 显然成立. 若 $A\leqslant B, B\leqslant C$，则任取 $x\in H$ 有

$$\langle Ax, x\rangle \leqslant \langle Bx, x\rangle, \quad \langle Bx, x\rangle \leqslant \langle Cx, x\rangle,$$

故有 $\langle Ax, x\rangle \leqslant \langle Cx, x\rangle$. 因此有 $A\leqslant C$.

若 $A\leqslant B$ 且 $B\leqslant A$. 则对于 $x\in H$，

$$\langle Ax, x\rangle \leqslant \langle Bx, x\rangle \leqslant \langle Ax, x\rangle,$$

$$\langle Ax, x\rangle = \langle Bx, x\rangle, \quad \langle (A-B)x, x\rangle = 0.$$

由于 $A-B$ 为自伴的，由问题 6.2.3 知这可以推出 $A-B=0$，即 $A=B$. 从而“$\leqslant$”为 W 上的一个半序.

(b) 若 $A\leqslant B$，则

$$\langle Ax, x\rangle \leqslant \langle Bx, x\rangle, \quad x \in H.$$

若 $C\in W$，及 $t\geqslant 0$，则任取 $x\in H$ 有

$$\langle Ax, x\rangle + \langle Cx, x\rangle \leqslant \langle Bx, x\rangle + \langle Cx, x\rangle,$$

$$\langle (A+C)x, x\rangle \leqslant \langle (B+C)x, x\rangle,$$

$$t\langle Ax, x\rangle \leqslant t\langle Bx, x\rangle, \quad \langle (tA)x, x\rangle \leqslant \langle (tB)x, x\rangle.$$

因此

$$A+C \leqslant B+C, \quad tA \leqslant tB.$$

(c) 设 $H=\mathbb{R}^2, \mathbb{K}=\mathbb{R}$. 设 A,B 分别由下述矩阵表示

$$\boldsymbol{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

由问题 6.2.1 知 A 和 B 均为自伴的，若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{y}, \boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{z}$，则

$$y(1) = x(1)+x(2) = y(2), \quad z(1) = 2x(1)+x(2), \quad z(2) = x(1)+x(2).$$

因此

$$\langle \boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{x}\rangle = y(1)x(1) + y(2)x(2) = (x(1)+x(2))^2,$$

$$\langle \boldsymbol{Bx}, \boldsymbol{x}\rangle = z(1)x(1) + z(2)x(2) = x(1)^2 + (x(1)+x(2))^2.$$

因此任取 x 有

$$0 \leqslant \langle Ax, x\rangle \leqslant \langle Bx, x\rangle,$$

从而 $0\leqslant A\leqslant B$.

若 $x=(-1,2)$则 $Ax=(1,1)Bx=(0,1)$因而

$$\langle A^2x,x\rangle=\langle Ax,Ax\rangle=2,\quad \langle B^2x,x\rangle=\langle Bx,Bx\rangle=1,$$
$$\langle A^2x,x\rangle>\langle B^2x,x\rangle.$$

因此 $A^2\leqslant B^2$ 不成立. ■

问题 6.2.7 设 A,B 为 Hilbert 空间 H 上的有界自伴算子. 求证:

(a) A^2 为自伴的且为正的;

(b) 若 B 为正的且 $AB=BA$,则 A^2B 为自伴的且为正的.

解答 (a) 由于$(AA)^*=A^*A^*=AA$,故 A^2 为自伴的. 对 $x\in H$ 有

$$\langle A^2x,x\rangle=\langle Ax,A^*x\rangle=\langle Ax,Ax\rangle\geqslant 0,$$

故 A^2 为正算子.

(b) 由于$(A^2B)^*=BA^2=A^2B$,故 A^2B 为自伴的,对于 $x\in H$ 有

$$\langle A^2Bx,x\rangle=\langle ABx,A^*x\rangle=\langle BAx,Ax\rangle=\langle By,y\rangle\geqslant 0,$$

其中 $y=Ax$. 因此若 B 为正算子,则 A^2B 为正算子. ■

问题 6.2.8 设 H 为 Hilbert 空间,A 为 H 上的有界自伴正算子. 求证 $I+A$ 在 $BL(H)$中可逆. 由此推出若 $T\in BL(H)$,则 $I+T^*T$ 在 $BL(H)$中可逆.

解答 设 A 为自伴正算子,$B=I+A$,则

$$\langle Bx,Bx\rangle=\langle x+Ax,x+Ax\rangle=\langle x,x\rangle+\langle x,Ax\rangle+\langle Ax,x\rangle+\langle Ax,Ax\rangle.$$

因此

$$\|Bx\|^2=\|x\|^2+\langle Ax,x\rangle+\langle Ax,x\rangle+\|Ax\|^2\geqslant\|x\|^2.$$

所以任取 $x\in H$ 有 $\|x\|\leqslant\|Bx\|$. 这说明 B 为下有界的且为单射. 因此由问题 6.1.19 知 B^* 为满射. 由于 $B^*=I^*+A^*=B$,从而 B 为一一映射,因而有一个线性逆 B^{-1}. 由于任取 x 有 $\|x\|\leqslant\|Bx\|$,我们有

$$\|B^{-1}x\|\leqslant\|B(B^{-1}x)\|=\|x\|,\quad x\in H,$$

因此 $B^{-1}\in BL(H)$. 所以 $I+A=B$ 在 $BL(H)$中可逆.

若 $T\in BL(H)$,则 T^*T 为自伴的且

$$\langle T^*Tx,x\rangle=\langle Tx,Tx\rangle\geqslant 0.$$

因此 T^*T 为正算子. 则由第一部分已证结论知 $I+T^*T$ 在 $BL(H)$中可逆. ■

问题 6.2.9 设 A 和 B 为 Hilbert 空间 H 上的有界自伴算子. 求证:若 A,B 为正算子且 $AB=BA$,则 AB 为正算子.

解答 我们需要证明任取 $x\in H$ 有$\langle ABx,x\rangle\geqslant 0$. 由于当 $A=0$ 时这显然成立,故不妨设 $A\neq 0$. 设

$$A_1=\frac{A}{\|A\|},\quad A_{n+1}=A_n-A_n^2,$$

其中 $n=1,2,\cdots$. 则每一个 A_n 都为自伴的. 对 $x\in H$,

$$0\leqslant\frac{1}{\|A\|}\langle Ax,x\rangle\leqslant\frac{1}{\|A\|}\|Ax\|\,\|x\|\leqslant\|x\|^2.$$

因此

$$0 \leqslant \langle A_1 x, x\rangle \leqslant \langle x, x\rangle = \langle Ix, x\rangle.$$

这证明了 $A_1 \geqslant 0$ 且 $I - A_1 \geqslant 0$.

假设对某一 n 有

$$A_n \geqslant 0, \quad I - A_n \geqslant 0, \tag{4}$$

则由问题 6.2.7 知

$$A_n^2 \geqslant 0, \quad A_n^2(I - A_n) \geqslant 0, \quad (I - A_n)^2 A_n \geqslant 0.$$

因此

$$I - A_{n+1} = (I - A_n) + A_n^2 \geqslant 0,$$

$$0 \leqslant A_n^2(I - A_n) + (I - A_n)^2 A_n = A_n - A_n^2 = A_{n+1}.$$

由数学归纳法知任取 $n \geqslant 1$,(4)式均成立.

由于 A_j 为自伴的,故

$$\langle A_j^2 x, x\rangle = \langle A_j x, A_j x\rangle = \| A_j x \|^2.$$

对任取的 $x \in H$ 成立. 由于 $A_n^2 = A_n - A_{n+1}$,故

$$A_1^2 + \cdots + A_n^2 = A_1 - A_{n+1}, \quad n \geqslant 1. \tag{5}$$

因此

$$\sum_{j=1}^{n} \| A_j x \|^2 = \sum_{j=1}^{n} \langle A_j^2 x, x\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} A_j^2 x, x \right\rangle = \langle A_1 x - A_{n+1} x, x\rangle$$

$$= \langle A_1 x, x\rangle - \langle A_{n+1} x, x\rangle \leqslant \langle A_1 x, x\rangle,$$

这是由于 $A_{n+1} \geqslant 0$. 上式对所有 n 成立这个事实可以推出

$$\sum_{j=1}^{\infty} \| A_j x \|^2 \leqslant \langle A_1 x, x\rangle < \infty.$$

由此知当 $n \to \infty$ 有 $\| A_n x \| \to 0$. 这对所有的 $x \in H$ 都成立.

由于 $AB = BA$,由 A_n 的定义可知 $A_n B = BA_n$. 因此,

$$\langle A_j^2 Bx, x\rangle = \langle A_j Bx, A_j x\rangle = \langle BA_j x, A_j x\rangle = \langle By_j, y_j\rangle,$$

其中 $y_j = A_j x$, $x \in H$. 由于由(5)式有

$$A_1 B = \sum_{j=1}^{n} A_j^2 B + A_{n+1} B,$$

故有

$$\langle A_1 Bx, x\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} A_j^2 Bx + A_{n+1} Bx, x \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle A_j^2 Bx, x\rangle + \langle A_{n+1} Bx, x\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \langle By_j, y_j\rangle + \langle A_{n+1} Bx, x\rangle.$$

但当 $n \to \infty$ 时

$$|\langle A_{n+1} Bx, x\rangle| \leqslant \| A_{n+1} Bx \| \, \| x \| \to 0.$$

故

$$\langle A_1 Bx, x\rangle = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\langle By_j, y_j\rangle \geqslant 0,$$

$$\frac{1}{\|A\|}\langle ABx, x\rangle \geqslant 0.$$

故 $AB\geqslant 0$. ■

问题 6.2.10 设 H 为 Hilbert 空间，$A\in BL(H)$ 且 A 为等距，即任取 $x\in H$ 有 $\|Ax\| = \|x\|$. 求证：

(a) $A^*A=I$.

(b) 若 H 为有限维空间，则 A 为酉算子.

(c) AA^* 为幂等自伴正算子.

(d) $R(AA^*)=Z(A^*A-AA^*)$.

解答 (a) 由于 A 为等距，故对 $x\in H$ 有

$$\langle A^*Ax, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \langle x, x\rangle.$$

若取 $B=A^*A-I$，则

$$\langle Bx, x\rangle = \langle A^*Ax - x, x\rangle = 0.$$

由于 $B^* = (A^*A)^* - I^* = A^*A - I = B$. 由问题 6.2.3 知 $B=0$，即 $A^*A=I$.

(b) 若 $Ax=0$，则 $\|x\| = \|Ax\| = 0$，$x=0$. 因此 A 为单射. 从而由于 H 为有限维的，A 必也为满射. 所以，存在线性算子 $A^{-1}: H\to H$. 因此由(a)知

$$AA^* = AA^*AA^{-1} = AIA^{-1} = I = A^*A.$$

因此 A 为酉算子.

(c) 设 $P=AA^*$，利用(a)则有

$$P^2 = AA^*AA^* = AIA^* = P, \quad P^* = (AA^*)^* = AA^* = P,$$

$$\langle Px, x\rangle = \langle AA^*x, x\rangle = \langle A^*x, A^*x\rangle \geqslant 0.$$

因此 P 为幂等自伴正算子.

(d) 设 $P=AA^*$，$y\in R(P)$，则 $y=Px$. 由于 $A^*A=I$，我们有

$$(A^*A - AA^*)(y) = y - Py = Px - P^2x = 0.$$

因此 $y\in Z(A^*A-AA^*)$. 另外若 $y\in Z(A^*A-AA^*)$，则

$$0 = (AA^* - A^*A)y = y - Py,$$

$$y = Py \in R(P).$$

因此 $R(P)=Z(A^*A-AA^*)$. ■

问题 6.2.11 设 H 为 Hilbert 空间，$T: H\to H$ 为线性等距映射. 求证：下述命题相互等价：

(a) T 为酉算子.

(b) T 为满射.

(c) T 的值域在 H 中稠密.

解答 若 T 为酉算子,则任取 $x\in H$,

$$x = TT^* x \in R(T),$$

因此 T 为满射. 因此由(a)可以推出(b). 由(b)推出(c)为平凡的.

现设 T 的值域 $R(T)$ 在 H 中稠密,设 $y\in H$. 则存在 $y_n\in R(T)$ 使得 $y_n\to y$. 令 $y_n=Tx_n$,则

$$\| x_n - x_m \| = \| T(x_n - x_m) \| = \| y_n - y_m \|.$$

因此 $\{x_n\}$ 为 H 中柯西列,从而 x_n 在 H 中收敛到 H 中某点 x,则 $y_n=Tx_n\to Tx$. 故有 $y=Tx\in R(T)$. 这就证明了 T 为满射. 因此由(c)可以推出(b).

若 T 为满射,则 T 为一一映射,因此存在线性算子 $S:H\to H$ 使得 $ST=TS=I$. 由问题 6.2.10 知 $T^* T=I$,故有

$$TT^* = TT^* TS = TIS = I = T^* T.$$

因此 T 为酉算子. 所以由(b)可以推出(a). ■

问题 6.2.12 设 H 为 Hilbert 空间,$T\in BL(H)$. 求证:T 为酉算子当且仅当 T 将 H 的每一完全标准正交集映到完全标准正交集.

解答 首先假设 T 为酉算子,设 $\{u_i: i\in L\}$ 为 H 的完全标准正交集,$v_i=T(u_i)$. 对 i,$j\in L$ 我们有

$$\langle v_i, v_j\rangle = \langle Tu_i, Tu_j\rangle = \langle u_i, T^* Tu_j\rangle = \langle u_i, u_j\rangle.$$

这说明 $\{v_i\}$ 为 H 的标准正交集. 为证它为完全的,设任取 $i\in L$ 有 $\langle x, u_i\rangle=0$,则

$$\langle T^* x, u_i\rangle = \langle x, Tu_i\rangle = \langle x, v_i\rangle = 0$$

对所有 i 成立. 由于 $\{u_i\}$ 为完全的,故有 $T^* x=0$. 因此 $x=TT^* x=0$. 这说明 $\{v_i\}$ 为完全的.

反之,考虑 H 的完全标准正交集 $\{u_i: i\in L\}$. 设 $v_i=Tu_i$ 且 $\{v_i: i\in L\}$ 为 H 的完全标准正交集. 任给 $x\in H$,x 有 Fourier 展开式

$$x = \sum_{i\in L}\langle x, u_i\rangle u_i.$$

上面的和式只包含可数项不为 0. 因此利用 T 的线性性及连续性可以证明

$$Tx = \sum_i \langle x, u_i\rangle Tu_i = \sum_i \langle x, u_i\rangle v_i,$$

因此对任意的 $j\in L$ 有 $\langle Tx, v_j\rangle=\langle x, u_j\rangle$,所以

$$\langle x, T^* v_j\rangle = \langle Tx, v_j\rangle = \langle x, u_j\rangle. \tag{6}$$

由于对任意的 $x\in H$ 上式成立,故有 $T^* v_j=u_j$ 对任取的 $j\in L$ 成立. 因此

$$\langle TT^* x, v_j\rangle = \langle T^* x, T^* v_j\rangle = \langle T^* x, u_j\rangle = \langle x, Tu_j\rangle = \langle x, v_j\rangle.$$

由于 $\{v_j\}$ 为完全的,上式对所有 $j\in L$ 成立这个事实说明 $TT^* x=x$ 对任取的 $x\in H$ 成立,即有 $TT^* =I$.

再利用(6)式得

$$\langle x, u_j\rangle = \langle Tx, v_j\rangle = \langle Tx, Tu_j\rangle = \langle T^* Tx, u_j\rangle.$$

由于$\{u_j\}$为完全的,上述等式对任意 j 都成立这个事实说明 $x=T^*Tx$. 又由于 x 是任取的,所以有 $I=T^*T$. 因此若 T 将 H 的完全标准正交集映为 H 的完全标准正交集. 则 T 必为酉算子. ■

问题 6.2.13 设 H 为 Hilbert 空间,W 为 H 上所有酉算子之集. 求证: $BL(H)$中的乘积使 W 成为一个群,W 为 $BL(H)$的闭集. 问 W 是否为 $BL(H)$的子空间?

解答 由假设 W 为所有 $T\in BL(H)$使得

$$TT^* = T^*T = I.$$

若 $A,B\in W$,则

$$AB(AB)^* = ABB^*A^* = AIA^* = AA^* = I.$$
$$(AB)^*AB = B^*A^*AB = B^*IB = B^*B = I.$$

因此 $AB\in W$. $BL(H)$中乘法满足结合律. 由于 $I^*=I$,则有 $I\in W$. 由于$(A^*)^*=A$,故若 $A\in W$,则有 $A^*\in W$. 若 $A\in W$,则 A 在 $BL(H)$中可逆且 $A^{-1}=A^*$. 这就证明了 W 在 $BL(H)$中的乘法意义下为一个群.

为证第二部分,设 $A\in\overline{W}$,则存在 $A_n\in W$ 使得 $A_n\to A$. 因此对所有 n,

$$I-AA^* = A_nA_n^* - A_nA^* + A_nA^* - AA^* = A_n(A_n^* - A^*) + (A_n - A)A^*.$$

因此

$$\begin{aligned}\| I-AA^* \| &\leqslant \| A_n(A_n^* - A^*) \| + \| (A_n - A)A^* \| \\ &\leqslant \| A_n \| \, \| A_n - A \| + \| A_n - A \| \, \| A \|.\end{aligned}$$

由于当 $n\to\infty$时 $\| A_n - A \| \to 0$. 故当 $n\to\infty$上式左端收敛到 0. 这说明 $I=AA^*$. 类似地,

$$\begin{aligned}\| I-A^*A \| &= \| A_n^*A_n - A_n^*A + A_n^*A - A^*A \| \\ &\leqslant \| A_n^* \| \, \| A_n - A \| + \| A_n^* - A^* \| \, \| A \| \\ &\leqslant \| A_n \| \, \| A_n - A \| + \| A_n - A \| \, \| A \|.\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$有 $I=A^*A$. 因此 $A\in W$,W 为闭集. 由于零算子不为酉算子,$0\notin W$,所以 W 不能成为子空间. ■

问题 6.2.14 $\mathbb{R}^2$ 中的**刚性运动**是映射 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$,$T$ 不一定是线性的,使得任取 $\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2$ 都有 $\| T\boldsymbol{x}-T\boldsymbol{y} \| = \| \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \|$. 求证:

(a) 若 T 为$\mathbb{R}^2$ 中的刚性运动使得 $T(0)=0$,则 T 为$\mathbb{R}^2$ 上的线性酉算子.

(b) 任意$\mathbb{R}^2$ 中的则性运动都首先是一$\mathbb{R}^2$ 中的平移,然后是一个旋转,再有可能是一个关于 x 轴的对称的组合.

解答 (a) 设 T 为$\mathbb{R}^2$ 中的刚性运动且有 $T(\mathbf{0})=\mathbf{0}$. 设 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$,则 $\boldsymbol{x}=(r\cos\theta,r\sin\theta)$,其中 $r>0$. 设 $\boldsymbol{e}_1=(1,0)$,$\boldsymbol{e}_2=(0,1)$,

$$\boldsymbol{y}_1 = T\boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{y}_2 = T\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{y} = T\boldsymbol{x}.$$

由于任取 $\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^2$

$$\| T\boldsymbol{z} \| = \| T\boldsymbol{z} - T\mathbf{0} \| = \| \boldsymbol{z}-\mathbf{0} \| = \| \boldsymbol{z} \|,$$

故有 $\| \boldsymbol{y}_1 \| = \| \boldsymbol{y}_2 \| = 1$ 及 $\| \boldsymbol{y} \| = r$,因此

$$\boldsymbol{y}_1 = (\cos\alpha, \sin\alpha), \quad \boldsymbol{y}_2 = (\cos\beta, \sin\beta), \quad \boldsymbol{y} = (r\cos\phi, r\sin\phi).$$

由于

$$\| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_1 \| = \| T\boldsymbol{x} - T\boldsymbol{e}_1 \| = \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_1 \|,$$

故

$$(r\cos\phi - \cos\alpha)^2 + (r\sin\phi - \sin\alpha)^2 = (r\cos\theta - 1)^2 + (r\sin\theta)^2,$$

$$r^2 + 1 - 2r(\cos\phi\cos\alpha + \sin\phi\sin\alpha) = r^2 + 1 - 2r\cos\theta.$$

即有

$$\cos(\phi - \alpha) = \cos\theta. \tag{7}$$

类似地，由于 $\| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_2 \| = \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_2 \|$，我们有

$$r^2 + 1 - 2r(\cos\phi\cos\beta + \sin\phi\sin\beta) = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta - 1)^2.$$

即有

$$\cos(\phi - \beta) = \sin\theta. \tag{8}$$

对 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_2$ 利用(7)式有

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos(\pi/2) = 0. \tag{9}$$

因此 $\sin(\beta - \alpha) = \pm 1$.

由(7)式，(8)式及(9)式知

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \cos(\phi - \beta) = \cos(\phi - \alpha)\cos(\alpha - \beta) - \sin(\phi - \alpha)\sin(\alpha - \beta)\\ &= \sin(\phi - \alpha)\sin(\beta - \alpha).\end{aligned} \tag{10}$$

首先假设 $\sin(\beta - \alpha) = 1$. 则由(10)式知 $\sin\theta = \sin(\theta - \alpha)$. 因此由(7)式有

$$\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta = \cos\alpha\cos(\phi - \alpha) - \sin\alpha\sin(\phi - \alpha) = \cos\phi,$$

$$\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta = \sin\alpha\cos(\phi - \alpha) + \cos\alpha\sin(\phi - \alpha) = \sin\phi.$$

这些等式给出

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r\cos\theta\\ r\sin\theta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}r\cos\phi\\ r\sin\phi\end{bmatrix}.$$

因此变换 $\boldsymbol{y} = T\boldsymbol{x}$ 由下列矩阵表示：

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin x\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}.$$

若 $\sin(\beta - \alpha) = -1$，则由(10)式有 $\sin\theta = -\sin(\phi - \alpha)$. 因此如第一种情形一样我们有

$$\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta = \cos\phi,$$

$$\sin\alpha\cos\theta - \cos\alpha\sin\theta = \sin\phi.$$

这些等式给出

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r\cos\alpha\\ r\sin\alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}r\cos\phi\\ r\sin\phi\end{bmatrix}.$$

故变换 $\boldsymbol{y} = T\boldsymbol{x}$ 由下列矩阵表示：

$$\boldsymbol{M}_1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}.$$

因此无论哪种情形，T 都是线性映射. 若 $\sin(\beta-\alpha)=1$，则 T 由 $\boldsymbol{M}$ 来表示，而在另外一种情形 T 由 $\boldsymbol{M}_1$ 来表示. 由于 $\|T\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$ 且 $H=\mathbb{R}^2$ 为有限维的，由问题 6.2.10(b)知 T 为等距，这就证明了(a).

(b) 若 $T(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{a}$ 且 $T_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 定义为

$$T_1\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2,$$

则 $T_1(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$ 且

$$\|T_1\boldsymbol{x} - T_1\boldsymbol{y}\| = \|T\boldsymbol{x} - T\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|.$$

因此 T 为 $\mathbb{R}^2$ 中的刚性运动且 $T_1(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$，$T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+T_1\boldsymbol{x}$. 因此由(a)知 T_1 为线性等距. 因此 T_1 或者由矩阵 $\boldsymbol{M}$ 来表示，或者由矩阵 $\boldsymbol{M}_1$ 来表示. 由 $\boldsymbol{M}$ 表示的变换将 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ 映到 $(r\cos(\theta+\alpha), r\sin(\theta+\alpha))$；因此是一个角度为 α 的旋转. 由 $\boldsymbol{M}_1$ 表示的变换将 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ 映为 $(r\cos(\theta-\alpha), -r\sin(\theta-\alpha))$；它首先是一个角度为 $-\alpha$ 的旋转，然后是一个关于 x 轴的对称. 若 $\boldsymbol{b}=T_1^{-1}(\boldsymbol{a})$，则 $T\boldsymbol{x}=T_1\boldsymbol{b}+T_1\boldsymbol{x}=T_1(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b})$. 因此变换 T 首先是一个平移，然后是作变换 T_1. ■

问题 6.2.15 设 H 为可分 Hilbert 空间，$A\in BL(H)$. 设相对于 H_1 的某个标准正交基 $\{u_n\}$，A 由矩阵 (k_{ij}) 表示，求证：

(a) 若 H 为无穷维的，则 A 为酉算子当且仅当矩阵 (k_{ij}) 的所有行构成 l^2 的标准正交基，(k_{ij}) 的所有列构成 l^2 的标准正交基.

(b) 若 H 为有限维的，且 A 为酉算子，则有 $|\det(k_{ij})|=1$.

解答 (a) 由问题 6.1.11 知

(i) (k_{ij}) 的每一行及每一列都为 l^2 中元，

(ii) A^* 由矩阵 $(\bar{k}_{ji})$ 表示，

(iii) AA^* 和 A^*A 分别由 $(k_{ij})(\bar{k}_{ji})$ 和 $(\bar{k}_{ji})(k_{ij})$ 表示. 因此 A 为酉算子当且仅当

$$(k_{ij})(\bar{k}_{ji}) = (\bar{k}_{ji})(k_{ij}) = \boldsymbol{I},$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵. 但

$$(k_{ij})(\bar{k}_{ji}) = \boldsymbol{I} \tag{11}$$

意味着 (k_{ij}) 的所有行构成 l^2 的标准正交序列，而

$$(\bar{k}_{ji})(k_{ij}) = \boldsymbol{I} \tag{12}$$

意味着 (k_{ij}) 的所有列构成 l^2 的标准正交序列.

若 $(k_n)\in l^2$ 且 (k_n) 与 (k_{ij}) 的所有列正交，则

$$\sum_{i=1}^{\infty} \bar{k}_i k_{ij} = 0, \quad j\geqslant 1;$$

因此

$$(\overline{k}_i)(k_{ij})(\overline{k}_{ji}) = 0.$$

从而若(11)式成立,则$(\overline{k}_i)=0$. 这就证明了若(11)式成立,则(k_{ij})的所有列构成了 l^2 的标准正交基. 类似地,若(12)式成立,则(k_{ij})的所有行构成了 l^2 的标准正交基. 这就完成了第一部分的证明.

(b) 若 H 的维数为 n,则(k_{ij})为 $n\times n$ 方阵. 设 $\det(k_{ij})=c$,则

$$\det(\overline{k}_{ji}) = \det(\overline{k}_{ij}) = \overline{c}.$$

因此

$$\det(k_{ij})\det(\overline{k}_{ji}) = c\overline{c} = |c|^2.$$

但若 A 为酉算子,则

$$\det(k_{ij})\det(\overline{k}_{ji}) = \det((k_{ij})(\overline{k}_{ji})) = \det(\boldsymbol{I}) = 1.$$

因此$|c|=1$. ■

问题 6.2.16 设 H 为 Hilbert 空间,$A\in BL(H)$,求证:

(a) A 为正规的当且仅当

$$\|Ax\| = \|A^*x\|, \quad x\in H.$$

(b) 若 α,β 为纯量且$|\alpha|=|\beta|$,则 $\alpha A+\beta A^*$ 为正规的.

(c) 若 A 为正规的,则 $\|A^2\| = \|A\|^2$.

(d) 若 A 为正规的,则$\overline{R(A)}=\overline{R(A^*)}$.

解答 (a) 任取 $x\in H$ 有

$$\langle A^*Ax,x\rangle = \langle Ax,Ax\rangle = \|Ax\|^2,$$
$$\langle AA^*x,x\rangle = \langle A^*x,A^*x\rangle = \|A^*x\|^2.$$

因此 $\|Ax\| = \|A^*x\|$ 当且仅当

$$\langle A^*Ax,x\rangle = \langle AA^*x,x\rangle.$$

或等价地$\langle Bx,x\rangle=0$,其中 $B=A^*A-AA^*$. 由于 B 为自伴的,由问题 6.2.3 知$\langle Bx,x\rangle=0$ 当且仅当 $B=0$,或等价地 $A^*A=AA^*$,即 A 为正规的.

(b) 设 $B=\alpha A+\beta A^*$. 则

$$\begin{aligned} BB^* &= (\alpha A+\beta A^*)(\overline{\alpha}A^*+\overline{\beta}A) \\ &= |\alpha|^2AA^*+\alpha\overline{\beta}A^2+\overline{\alpha}\beta(A^*)^2+|\beta|^2A^*A \\ B^*B &= (\overline{\alpha}A^*+\overline{\beta}A)(\alpha A+\beta A^*) \\ &= |\alpha|^2A^*A+\overline{\alpha}\beta(A^*)^2+\alpha\overline{\beta}A^2+|\beta|^2AA^*. \end{aligned}$$

若$|\alpha|=|\beta|$,则 $BB^*=B^*B$,即 B 为正规的.

(c) 任取 $A\in BL(H)$,有

$$\|A^2\| = \|A\cdot A\| \leqslant \|A\|\,\|A\| = \|A\|^2.$$

若 A 为正规的,对 $x\in H$

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax,Ax\rangle = \langle A^*Ax,x\rangle \leqslant \|A^*Ax\|\,\|x\|.$$

而由(a)有 $\| A^*(Ax) \| = \| A(Ax) \|$. 因此

$$\| Ax \|^2 \leqslant \| A^2 x \| \| x \| \leqslant \| A^2 \| \| x \|^2,$$

$$\| Ax \| \leqslant \| A^2 \|^{1/2} \| x \|.$$

这说明 $\| A \| \leqslant \| A^2 \|^{1/2}$,即 $\| A \|^2 \leqslant \| A^2 \|$. 这就证明了(c).

(d) 若 A 为正规的,则由(a)有

$$Ax = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A^* x = 0;$$

因此 $Z(A) = Z(A^*)$. 从而由问题 6.1.15(c)知

$$R(A^*)^\perp = R(A)^\perp. \tag{13}$$

由于 $R(A)$及 $R(A^*)$为子空间,故由问题 5.3.5(b)知

$$R(A)^{\perp\perp} = \overline{R(A)}, \quad R(A^*)^{\perp\perp} = \overline{R(A^*)}.$$

因此由(13)式知(d)成立. ■

问题 6.2.17 设 H 为 Hilbert 空间,且其维数至少为 2. 求证:在 H 上有不为正规的有界线性算子存在.

解答 设 E 为 H 的标准正交基,则 E 至少有两个元 u_1, u_2. 令 $Y = \mathrm{span}\{u_1, u_2\}$ 及 $Z = Y^\perp$. 则任取 $x \in H$ 有唯一的分解 $x = y + z, y \in Y, z \in Z$. 因此

$$x = au_1 + bu_2 + z, \quad a, b \in \mathbb{K}, \quad z \in Z. \tag{14}$$

设

$$Au_1 = u_2, \quad Au_2 = 2u_1, \quad Az = 0, \quad z \in Z, \tag{15}$$

$$Bu_1 = 2u_2, \quad Bu_2 = u_1, \quad Bz = 0, \quad z \in Z. \tag{16}$$

则上式唯一地决定了 H 上的线性算子 A 和 B. 若 x 由(14)式给出,则由勾股定理有

$$\| x \|^2 = | a |^2 + | b |^2 + \| z \|^2 \geqslant | a |^2 + | b |^2.$$

因此由(15)式有

$$\| Ax \|^2 = \| au_2 + 2bu_1 \|^2 = | a |^2 + | 2b |^2 \leqslant 4 \| x \|^2.$$

所以 A 为有界的且 $\| A \| \leqslant 2$. 类似地,由(16)式定义的 B 为有界的. 若 x 由(14)式给出且

$$y = cu_1 + du_2 + z_1, \quad c, d \in \mathbb{K}, \quad z_1 \in Z,$$

则

$$\langle Ax, y \rangle = \langle au_2 + 2bu_1, cu_1 + du_2 + z_1 \rangle.$$

由 u_1, u_2, z_1 相互正交,我们有

$$\langle Ax, y \rangle = ad + 2bc.$$

类似地有

$$\langle x, By \rangle = \langle au_1 + bu_2 + z, 2cu_2 + du_1 \rangle = ad + 2bc.$$

因此任取 $x, y \in H$ 有 $\langle Ax, y \rangle = \langle x, By, \rangle$,即有 $B = A^*$. 由于

$$ABu_1 = A(2u_2) = 4u_1, \quad BAu_1 = B(u_2) = u_1,$$

故有 $AB \neq BA$,即有 $AA^* \neq A^* A$. 从而 A 不为正规的. ■

问题 6.2.18 设 H 为 Hilbert 空间,W 为所有 H 上的正规算子之集. 求证:

(a) W 为 $BL(H)$的闭集.

(b) W 不可能为 $BL(H)$的真子空间.

(c) 若 H 的维数至少为 2,则 W 不可能为 $BL(H)$的子空间.

解答 (a) 若 $A\in\overline{W}$,则存在 $A_n\in W$ 使得 $A_n\to A$. 因此有 $A_nA_n^*=A_n^*A_n$,从而

$$\begin{aligned}\|AA^*-A^*A\| &\leqslant \|AA^*-A_nA^*\|+\|A_nA^*-A_nA_n^*\|\\ &\quad+\|A_nA_n^*-A_n^*A_n\|+\|A_n^*A_n-A_n^*A\|+\|A_n^*A-A^*A\|\\ &=\|(A-A_n)A^*\|+\|A_n(A^*-A_n^*)\|+0\\ &\quad+\|A_n^*(A_n-A)\|+\|(A_n^*-A^*)A\|\\ &\leqslant \|A-A_n\|\,\|A\|+\|A_n\|\,\|A-A_n\|+\|A_n\|\,\|A_n-A\|\\ &\quad+\|A_n-A\|\,\|A\|,\end{aligned}$$

其中我们用到了下列事实:

$$\|ST\|\leqslant\|S\|\,\|T\|,\quad \|T^*\|=\|T\|.$$

由于当 $n\to\infty$有 $\|A_n-A\|\to 0$ 及 $\|A_n\|\to\|A\|$,所以我们必有

$$AA^*-A^*A=0,$$

即 $A\in W$. 从而 W 为 $BL(H)$的闭集.

(b) 假设 $W\neq BL(H)$,则存在 $T\in BL(H)$不为正规的,设

$$A=\frac{1}{2}(T+T^*),\quad B=\frac{1}{2}(T-T^*),$$

则 $A^*=A,B^*=-B$. 因此 A,B 为正规的且 $A+B=T$,而 T 不为正规的. 所以有 $A,B\in W$ 但 $A+B\notin W$. 故 W 不可能为 $BL(H)$的子空间,除非有 $W=BL(H)$.

(c) 若 H 的维数至少是 2,则由问题 6.2.17 知 $W\neq BL(H)$. 因此由(b)知 W 不可能为 $BL(H)$的子空间. ■

问题 6.2.19 设 H 为 Hilbert 空间,求证:若 A,B 为 H 上的正规算子且 $AB^*=B^*A$,则 $A+B$ 和 AB 均为正规的. 证明即使 $AB^*\neq B^*A$,$A,B,A+B$ 及 AB 也有可能为正规的.

解答 设 A,B 为正规的且 $AB^*=B^*A$,则$(AB^*)^*=(B^*A)^*$,即有 $BA^*=A^*B$. 因此

$$(A+B)(A+B)^*=(A+B)(A^*+B^*)=AA^*+AB^*+BA^*+BB^*,$$

$$(A+B)^*(A+B)=(A^*+B^*)(A+B)=AA^*+BA^*+AB^*+BB^*.$$

故有

$$(A+B)(A+B)^*=(A+B)^*(A+B).$$

又

$$(AB)(AB)^*=ABB^*A^*=AB^*BA^*,$$

$$(AB)^*(AB)=B^*A^*AB=B^*AA^*B=AB^*BA^*.$$

因此有$(AB)(AB)^*=(AB)^*(AB)$,即 AB 为正规的. 这就完成了第一部分的证明.

现考虑两个自伴算子 A 和 B 使得 $BA=-AB\neq 0$. 例如可取 $H=\mathbb{K}^2$，A 和 B 分别由 2×2矩阵

$$\boldsymbol{M}_1=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}_2=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

表示. 由于这两个矩阵为实的且为对称的，由问题 6.1.10 知 A 和 B 为自伴的，由于

$$\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}=-\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1,$$

故 $AB=-BA\neq 0$.

我们有 $AB^*-B^*A=AB-BA=2AB\neq 0$. $A+B$ 为自伴的，从而为正规的. 由于 $(AB)^*=B^*A^*=BA=-AB$，我们有

$$(AB)^*(AB)=-(AB)^2=(AB)(AB)^*.$$

因此 AB 为正规的. ■

问题 6.2.20 设 $k(s,t)$ 为单位正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 上的平方可积函数. 若 $x\in L^2[0,1]$，令

$$(Ax)(s)=\int_0^1 k(s,t)x(t)\mathrm{d}t,\quad 0\leqslant s\leqslant 1.$$

求证：A 定义了 $L^2[0,1]$ 上的有界线性算子且

(a) 若任取 (s,t) 有 $k(s,t)=\overline{k(t,s)}$，则 A 为自伴的.

(b) A 为正规的若

$$\int_0^1 k(s,u)\,\overline{k(t,u)}\mathrm{d}u=\int_0^1 \overline{k(u,s)}k(u,t)\mathrm{d}u \tag{17}$$

对所有 (s,t) 成立.

解答 若 $x\in L^2[0,1]$，$0\leqslant s\leqslant 1$，则

$$|(Ax)(s)|\leqslant\int_0^1|k(s,t)||x(t)|\mathrm{d}t\leqslant\left(\int_0^1|k(s,t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_0^1|x(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

因此

$$\|Ax\|^2=\int_0^1|(Ax)(s)|^2\mathrm{d}s\leqslant\int_0^1\mathrm{d}s\int_0^1|k(s,t)|^2\mathrm{d}t\,\|x\|^2=\|k\|_2^2\|x\|^2.$$

这首先证明了 $Ax\in L^2[0,1]$. 它还证明了 A 为有界的且 $\|A\|\leqslant\|k\|_2$，其中 $\|k\|_2$ 为 k 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上的 L^2 范数. 由于显然 A 为线性算子，这就完成了第一部分的证明：

对于第二部分，令

$$k_1(s,t)=\overline{k(t,s)},\quad k_2(s,t)=|k(s,t)|,\quad k_3(s,t)=|k_1(s,t)|.$$

对 $x\in L^2[0,1]$，令

$$B_i(x)(s)=\int_0^1 k_i(s,t)x(t)\mathrm{d}t,\quad 0\leqslant s\leqslant 1,\quad i=1,2,3. \tag{18}$$

重复上面的论证，可知 B_1，B_2 及 B_3 为 $H=L^2[0,1]$ 上的有界线性算子. 正如问题 6.1.12 第二部分的解答一样，可得

$$\langle x, B_1 y\rangle = \langle Ax, y\rangle, \quad x, y \in L^2[0,1].$$

因此 $B_1 = A^*$. 因而若 $k(s,t)=k_1(s,t)$,则 $A=B_1=A^*$,即 A 为自伴的. 这就证明了(a).

为证(b),假设(17)式成立,若 $x\in L^2[0,1]$,由(18)式有

$$AB_1(x)(s) = \int_0^1 k(s,u)B_1(x)(u)\mathrm{d}u = \int_0^1 k(s,u)\left\{\int_0^1 k_1(u,t)x(t)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}u.$$

我们希望变换上面的积分顺序. 由(18)式有

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{d}u\int_0^1 |\, k(s,u)k_1(u,t)x(t)\,|\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 k_2(s,u)\mathrm{d}u\int_0^1 k_3(u,t)\,|\,x(t)\,|\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 k_2(s,u)\mathrm{d}u B_3(|\,x\,|)(u)\\ &= B_2(B_3\,|\,x\,|)(s).\end{aligned}$$

若上式为有限的,则我们可以用 Fubini 定理来变换积分顺序. 但 $B_2B_3(|x|)$ 在 $L^2[0,1]$ 中存在,从而对几乎所有的 $s\in[0,1]$,$B_2B_3(|x|)(s)$ 为有限的. 对这样的 s 有

$$AB_1(x)(s) = \int_0^1\left\{\int_0^1 k(s,u)k_1(u,t)\mathrm{d}u\right\}x(t)\mathrm{d}t. \tag{19}$$

类似可证

$$\begin{aligned}B_1A(x)(s) &= \int_0^1 k_1(s,u)A(x)(u)\mathrm{d}u\\ &= \int_0^1 k_1(s,u)\left\{\int_0^1 k(u,t)x(t)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}u\\ &= \int_0^1\left\{\int_0^1 k_1(s,u)k(u,t)\mathrm{d}u\right\}x(t)\mathrm{d}t \qquad (20)\end{aligned}$$

对几乎所有的 $s\in[0,1]$ 成立. 因此若(17)式成立,将(19)式和 (20)式结合在一起有 $AB_1(x)(s)=B_1A(x)(s)$ 对几乎所有的 $s\in[0,1]$ 成立. 这说明 $AB_1(x)=B_1A(x)$ 对所有的 $x\in L^2[0,1]$ 成立. 因此有 $AB_1=B_1A$,即有 $AA^*=A^*A$. 从而 A 为正规的. ■

CHAPTER 7

第7章 Hilbert空间中的谱理论

这一章讨论 Hilbert 空间上有界线性算子的谱论. 7.1 考虑一般的谱理论. 在紧自伴算子情形,特征值和特征向量在算子的谱表示中起到了十分重要的角色,这将在 7.2 中讨论.

7.1 谱及数值域

在 4.1 中,我们对赋范空间上的算子引入了谱值的概念. 对于 Hilbert 空间上算子的这些概念将在下面重新讨论.

设 H 为 Hilbert 空间,$A\in BL(H)$. 纯量 $k\in\mathbb{K}$ 称为 A 的**谱值**. 若 $A-kI$ 在 $BL(H)$中不为可逆的. k 称为 A 的**特征值**,若 $A-kI$ 不为单射. k 称为 A 的**近似特征值**,若 $A-kI$ 不为下有界的,即不存在 $\alpha>0$ 使得

$$\alpha\|x\|\leqslant\|Ax-kx\|,\quad x\in H.$$

A 的**谱** $\sigma(A)$为 A 的所有谱值之集. A 的**点谱** $\sigma_p(A)$为所有 A 的特征值之集. A 的所有近似特征值之集被记为 $\sigma_a(A)$. 集合

$$W(A)=\{\langle Ax,x\rangle:x\in H,\|x\|=1\}$$

称为 A 的**数值域**.

对应于 k 的 A 的**特征空间**为 $Z(A-kI)$. 若 k 为特征值,则相应的特征空间含有非零元,此时 $Z(A-kI)$中的非零元被称为对应于 k 的**特征向量**.

若 A 为自伴的,则任取 $x\in H$ 有$\langle Ax,x\rangle=\langle x,Ax\rangle$,故$\langle Ax,x\rangle$为实数. 设

$$m_A = \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle, \quad M_A = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle.$$

则 m_A 及 M_B 为 A 的谱值且

$$\|A\| = \max\{|m_A|, |M_A|\} = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle|.$$

设 H 为有限维 Hilbert 空间，其维数为 n. 设 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 为 H 的标准正交基. 每一算子 $A \in BL(H)$ 可由矩阵 $\boldsymbol{M}=(k_{ij})$ 表示，其中 $k_{ij}=\langle Au_j, u_i\rangle$. 若 $\boldsymbol{I}$ 为 $n\times n$ 单位矩阵，则

$$p(t) = \det(\boldsymbol{M} - t\boldsymbol{I})$$

为 n 次多项式，因此 $p(t)$ 在 $\mathbb{C}$ 中有 n 个根. A 的谱值就是这个多项式的根. 这些根也是 A 的特征值. 这个多项式 $p(t)$ 称为 A 的**特征多项式**. 若 A 为自伴的，则 $p(t)$ 的根均为实数.

练习

1. 若 I 为 Hilbert 空间 H 上的恒等算子，求 $\sigma(I)$ 及 $W(I)$.

2. 设 $H=\mathbb{R}^2$ 且 A 由矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ 表示. 求 $\sigma(A), W(A), m_A, M_A$ 及 $\|A\|$.

3. 设 $H=\mathbb{R}^3$，A 由矩阵

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

表示. 求 $\sigma(A), m_A, M_A$ 及 $\|A\|$.

4. 设 $H=\mathbb{R}^2$，A 由矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ 表示. 求 A 的特征值及相应的特征空间 Y_1, Y_2. 求证：每一个 $\boldsymbol{x}\in H$ 可以表示为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2$，$\boldsymbol{y}_i\in Y_i$. 这个表示唯一吗？

5. 设 $H=\mathbb{R}^2$，A 由矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 表示. 求证：H 没有由 A 的特征向量组成的基.

6. 设 $H=\mathbb{R}^3$，$A\in BL(H)$ 由矩阵

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

表示. 求 A 的特征值及相应的特征空间.

问题

问题 7.1.1 设 $H\in BL(H)$，其中 H 为 Hilbert 空间. 求证：

(a) $\sigma(A^*)=\{k : \bar{k}\in\sigma(A)\}$.

(b) $\sigma(A^*)=\sigma_e(A^*)\cup\{k:\bar{k}\in\sigma_a(A)\}$.

(c) $\sigma(A^*)=\sigma_a(A^*)\cup\{k:\bar{k}\in\sigma_e(A)\}$.

解答 (a) 若 $k\in\mathbb{K}$,则算子 $A-kI$ 在 $BL(H)$中可逆当且仅当

$$(A-kI)B=I=B(A-kI) \tag{1}$$

对某一 $B\in BL(H)$成立.但(1)式成立当且仅当

$$B^*(A-kI)^*=(A-\bar{k}I)^*B^*.$$

或等价地

$$B^*(A^*-\bar{k}I)=(A^*-\bar{k}I)B^*.$$

因此易见 $A-kI$ 在 $BL(H)$可逆当且仅当 $A^*-\bar{k}I$ 在 $BL(H)$中可逆.从而

$$k\notin\sigma(A)\quad\Leftrightarrow\quad\bar{k}\notin\sigma(A^*).$$

这就证明了(a).

(b) 由于 $\sigma_r(A^*)\subset\sigma(A^*)$,故由(a)有

$$\bar{k}\in\sigma_a(A)\Rightarrow\bar{k}\in\sigma(A)\Rightarrow k\in\sigma(A^*).$$

因此

$$\sigma_e(A^*)\cup\{k:\bar{k}\in\sigma_a(A)\}\subset\sigma(A^*). \tag{2}$$

为证反方向包含关系,设 $k\notin\sigma_e(A^*)$,且有$\bar{k}\notin\sigma_a(A)$.则零空间 $Z(A^*-kI)$为$\{0\}$且 $A-\bar{k}I$ 为下有界的.在问题 6.1.15(c)中我们证明了 $Z(T)=R(T^*)^{\perp}$.对 $T=A^*-kI$ 利用这个结果则有

$$R(A-\bar{k}I)^{\perp}=Z(A^*-kI)=\{0\}.$$

所以有

$$H=\{0\}^{\perp}=R(A-\bar{k}I)^{\perp\perp}=\overline{R(A-\bar{k}I)}, \tag{3}$$

其中最后一个等式是将问题 5.3.5(b)应用于 $M=R(A-\bar{k}I)$得到的.设 $y\in H$ 为任意元,由(3)式知存在 $y_n\in R(A-\bar{k}I)$使得 $y_n\to y$,$y_n=(A-\bar{k}I)x_n$.由于 $A-\bar{k}I$ 为下有界的,故存在 $\alpha>0$ 使得

$$\alpha\|x\|\leqslant\|Ax-\bar{k}x\|,\quad x\in H. \tag{4}$$

因此

$$\alpha\|x_n-x_m\|\leqslant\|A(x_n-x_m)-\bar{k}(x_n-x_m)\|=\|y_n-y_m\|.$$

这说明$\{x_n\}$为 H 中的柯西列.因此$\{x_n\}$收敛到 H 中某一元 x.从而

$$y_n=Ax_n-\bar{k}x_n\to Ax-\bar{k}x,$$

$$y=A-\bar{k}x\in R(A-\bar{k}I).$$

这样我们就证明了 $A-\bar{k}I$ 为满射.又由(4)式知它为单射,所以它有一个逆 B 为线性的.由(4)式有

$$\alpha\|Bx\|\leqslant\|(A-\bar{k}I)Bx\|=\|x\|.$$

这证明了 $B=(A-\bar{k}I)\in BL(H)$.因此$\bar{k}\notin\sigma(A)$,从而 $k\notin\sigma(A^*)$,这里我们用到了(a).上述

事实与(2)式一起就证明了(b).

(c) 在(b)中用 A^* 代替 A 有

$$\sigma(A) = \sigma_e(A) \cup \{k:\bar{k} \in \sigma_a(A^*)\}.$$

因此$\bar{k} \in \sigma(A)$当且仅当$\bar{k} \in \sigma_e(A)$或 $k \in \sigma_a(A^*)$,即

$$k \in \{k:\bar{k} \in \sigma_e(A)\} \cup \sigma_a(A^*).$$

由于由(a)有 $k \in \sigma(A^*)$当且仅当$\bar{k} \in \sigma(A)$,这就完成了(c)的证明. ■

问题 7.1.2 设 A 为 Hilbert 空间 H 上的正规算子. 求证:

(a) 对 $k \in \mathbb{K}$ 有 $Z(A-kI)=Z(A^*-\bar{k}I)$,

(b) $\sigma(A)=\sigma_a(A)$,

(c) 对应于不同特征值的特征向量相互正交.

解答 (a) 由于 A 为正规的,从而 $A-kI$ 为正规的. 由问题 6.2.16(a)知若 T 为正规的,则任取 x 有 $\|Tx\| = \|T^*x\|$. 因此

$$\|(A-kI)x\| = \|(A-kI)^*x\| = \|(A^*-\bar{k}I)x\|$$

对所有的 x 成立. 因此

$$(A-kI)x = 0 \Leftrightarrow (A^*-\bar{k}I)x = 0,$$

这就证明了(a).

(b) 显然有 $\sigma_a(A) \subset \sigma(A)$. 为证反方向包含关系,设 $k \in \sigma(A)$,则由问题 7.1.1(a)知$\bar{k} \in \sigma(A^*)$. 因此由问题 7.1.1(b)知

$$\bar{k} \in \sigma_e(A^*) \quad 或 \quad k \in \sigma_a(A).$$

若$\bar{k} \in \sigma_e(A^*)$,则 $Z(A^*-\bar{k}I) \neq \{0\}$,因此由(a)知 $Z(A-kI) \neq \{0\}$,即有 $k \in \sigma_e(A)$. 但 $\sigma_e(A) \subset \sigma_a(A)$,因此我们总有 $k \in \sigma_a(A)$. 这就证明了(b).

(c) 设 x_1 和 x_2 分别为对应于不同特征值 k_1 和 k_2 的特征向量,则

$$x_1 \in Z(A-kI), \quad x_2 \in Z(A-k_2I) = Z(A^*-\bar{k}_2I).$$

因此 $Ax_1-k_1x_1=0$,$A^*x_2-\bar{k}_2x_2=0$. 所以

$$k_1\langle x_1,x_2\rangle = \langle k_1x_1,x_2\rangle = \langle Ax_1,x_2\rangle = \langle x_1,A^*x_2\rangle = \langle x_1,\bar{k}_2x_2\rangle = k_2\langle x_1,x_2\rangle.$$

由于 $k_1 \neq k_2$. 这可以推出$\langle x_1,x_2\rangle=0$. 这就证明了(c). ■

问题 7.1.3 设 $A \in BL(H)$,其中 H 为 Hilbert 空间,$W(A)$为 A 的数值域. 求证:

(a) $\sigma(A) \subset \overline{W(A)}$.

(b) A 为自伴的$\Rightarrow \sigma(A) \subset \mathbb{R}$,

(c) (b)的逆命题不成立.

(d) 设 A 为自伴的,则 A 为正算子当且仅当 A 的谱中仅有非负实数.

解答 (a) 设 $k \in \sigma(A)$,则由问题 7.1.1(a)知$\bar{k} \in \sigma(A^*)$,因此由问题 7.1.1(b)知$\bar{k} \in \sigma_e(A^*)$或 $k \in \sigma_a(A)$. 若$\bar{k} \in \sigma_e(A^*)$,则存在 x 使得

$$A^*x = \bar{k}x, \quad \|x\| = 1;$$

因此

$$k = k\langle x,x\rangle = \langle x,\bar{k}x\rangle = \langle x,A^* x\rangle = \langle Ax,x\rangle \in W(A).$$

若 $k\in\sigma_a(A)$，则存在 x_n 使得 $\| x_n \| =1$，且当 $n\to\infty$时有 $\| Ax_n - kx_n \| \to 0$. 令 $k_n=\langle Ax_n, x_n\rangle$，则 $k_n\in W(A)$且

$$k_n - k = \langle Ax_n,x_n\rangle - k\langle x_n,x_n\rangle = \langle Ax_n - kx_n,x_n\rangle.$$

因此有

$$| k_n - k | \leqslant \| Ax_n - kx_n \| \ \| x_n \| \to 0,$$

当 $n\to\infty$. 从而 $k_n\to k$，$k\in\overline{W(A)}$. 这就证明了(a).

(b) 设 A 为自伴的，则对 $x\in H$ 有

$$\langle Ax,x\rangle = \langle x,Ax\rangle = \overline{\langle Ax,x\rangle};$$

因此$\langle Ax,x\rangle$为实数. 因此 $W(A)\subset\mathbb{R}$. 又$\mathbb{R}$ 为$\mathbb{K}$ 的闭集，故有$\overline{W(A)}\subset\mathbb{R}$. 由(a)知有 $\sigma(A)\subset\mathbb{R}$.

(c) 设 $H=\mathbb{C}^2$，A 由 2×2 矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$表示. 则 A^* 由 $\boldsymbol{M}$ 的共轭转置表示，它和 $\boldsymbol{M}$ 是不同的，因此 A 不为自伴的. A 的谱值为 A 的特征多项式的根，即

$$\begin{vmatrix}1-t & 1\\ 0 & 1-t\end{vmatrix} = 0,$$

其根为 $t=1$. 因此 $\sigma(A)=\{1\}\subset\mathbb{R}$.

(d) 设 A 为正算子，则任取 $x\in H$ 有$\langle Ax,x\rangle\geqslant0$. 因此 $W(A)\subset[0,+\infty)$. 但$[0,+\infty)$为$\mathbb{K}$ 的闭集，故由(a)知

$$\sigma(A)\subset\overline{W(A)}\subset[0,+\infty).$$

反之，设 $\sigma(A)\subset[0,+\infty)$，若 $\inf\{\langle Ax,x\rangle:\| x \| =1\}=m_A$，则 m_A 为 A 的谱值，因此 $m_A\geqslant0$. 若 $x\neq0$，$\alpha=1/\| x \|$，则 $\| \alpha x \| =1$，从而

$$0\leqslant m_A\leqslant A(\alpha x),\alpha x\rangle = \alpha^2\langle Ax,x\rangle.$$

由此推知任取 $x\in H$ 有$\langle Ax,x\rangle\geqslant0$，即 A 为正算子. ■

问题 7.1.4 设 A 为 Hilbert 空间 H 上的酉算子，设 $\sigma(A)$及 $W(A)$分别为 A 的谱及数值域. 求证：

(a) $W(A)\subset\{k:|k|\leqslant1\}$.

(b) $\sigma(A)\subset\{k:|k|=1\}$.

解答 (a) 设 $k\in W(A)$，则存在 x，$\| x \| =1$，$k=\langle Ax,x\rangle$. 由于

$$\| Ax \|^2 = \langle Ax,Ax\rangle = \langle x,A^* Ax\rangle = \langle x,x\rangle = 1,$$

故有

$$| k | = | \langle Ax,x\rangle | \leqslant \| Ax \| \ \| x \| = 1.$$

这就给出了(a).

(b) 设 $k\in\sigma(A)$. 由问题 7.1.3(a)知有 $k\in\overline{W(A)}$. 因此由(a)知 $|k|\leqslant1$. 由于 $AA^*=I=A^*A$，故 $A^{-1}=A^*$ 在 $BL(H)$中存在，因此 $k\neq0$. 因为

$$A-kI=A-kAA^*=-kA\left(A^*-\frac{1}{k}I\right),$$

所以若 $A^*-\frac{1}{k}I$ 在 $BL(H)$ 中可逆，则 $A-kI$ 也在 $BL(H)$ 中可逆. 但由于 $k\in\sigma(A)$，故 $A-kI$ 在 $BL(H)$ 中不可逆，因此 $A^*-\frac{1}{k}I$ 也不可逆，即有 $\frac{1}{k}\in\sigma(A^*)$. 因此有 $\frac{1}{k}\in\overline{W(A^*)}$. 由于 A^* 为酉算子，在(a)中用 A^* 代替 A，则有

$$\left|\frac{1}{k}\right|\leqslant 1,\quad |k|\geqslant 1.$$

因此有 $|k|=1$. ■

问题 7.1.5 设 $A\in BL(H)$，其中 H 为 Hilbert 空间. 求证：A 有特征值 λ 使得 $|\lambda|=\|A\|$ 当且仅当存在 $x\in H$，$\|x\|=1$，$|\langle Ax,x\rangle|=\|A\|$.

解答 设 A 有特征值 λ 使得 $|\lambda|=\|A\|$. 则存在 $x\in H$ 使得 $\|x\|=1$，$Ax=\lambda x$. 对于这个 x

$$\langle Ax,x\rangle=\langle\lambda x,x\rangle=\lambda\langle x,x\rangle=\lambda,\quad |\langle Ax,x\rangle|=|\lambda|=\|A\|.$$

反之，若对 H 中某个 x，$\|x\|=1$ 且

$$|\langle Ax,x\rangle|=\|A\|.$$

令 $\lambda=\langle Ax,x\rangle$，则

$$\langle Ax-\lambda x,Ax-\lambda x\rangle=\langle Ax,Ax\rangle-\langle Ax,\lambda x\rangle-\langle\lambda x,Ax\rangle+\langle\lambda x,\lambda x\rangle.$$

因此

$$\begin{aligned}\|Ax-\lambda x\|^2&=\|Ax\|^2-\bar{\lambda}\lambda-\lambda\bar{\lambda}+\lambda\bar{\lambda}=\|Ax\|^2-|\lambda|^2\\&\leqslant\|A\|\,\|x\|^2-\|A\|^2=0.\end{aligned}$$

因此 $Ax=\lambda x$，即 λ 为 A 的特征值. ■

问题 7.1.6 设 H 为复 Hilbert 空间，A 为 H 上的正规算子. 求证：若 $\sigma(A)=\{0\}$，则 $A=0$. 证明这在下述情形下均不成立：

(i) A 不为正规的.

(ii) H 为实 Hilbert 空间.

解答 由于 H 为复 Hilbert 空间，谱半径公式

$$\lim_{n\to\infty}\|A^n\|^{1/n}=\sup\{|k|:k\in\sigma(A)\}\tag{5}$$

成立. 由于 A 为正规的，故由问题 6.2.16(c)知 $\|A^2\|=\|A\|^2$. 由于 A^2 还为正规的，故有 $\|A^4\|=\|A\|^4$. 由归纳法有

$$\|A^n\|^{\frac{1}{n}}=\|A\|,\quad n=2^j,\quad j=1,2,\cdots.\tag{6}$$

公式(5)保证了极限 $\lim_{n\to\infty}\|A^n\|^{1/n}$ 的存在性，而由(6)式这个极限必为 $\|A\|$. 因此若 $\sigma(A)=\{0\}$，(5)式的右侧为 0，因而 $\|A\|=0$，即 $A=0$.

为证第二部分，首先考虑情形(i). 设 $H=\mathbb{C}^2$，A 为 H 上的线性算子，A 由矩阵 $\boldsymbol{M}=$

$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$表示. 它的谱值是其特征多项式

$$\begin{vmatrix}0-t & 1\\ 0 & 0-t\end{vmatrix}=0$$

的根,即 $t^2=0$. 因此 $\sigma(A)=\{0\}$,但 A 不为 0.

再考虑情形(ii). 设$\mathbb{K}=\mathbb{R}$,$H=\mathbb{R}^3$,$A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 为一线性算子且其矩阵表示为

$$\boldsymbol{M}_1=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{bmatrix}.$$

则 A^* 由 M_1 的转置表示,即由$-\boldsymbol{M}_1$ 表示. 因此 A^*A 及 AA^* 均由$-\boldsymbol{M}_1^2$ 表示. 因此 A 为正规的.

A 的谱值是 A 的特征多项式

$$\begin{vmatrix}0-t & 1 & 1\\ -1 & 0-t & 1\\ -1 & -1 & 0-t\end{vmatrix}=0$$

的根. 这说明 $t(t^2+3)=0$. 它在数城$\mathbb{R}$ 中仅有一个根 $t=0$. 因此 $\sigma(A)=\{0\}$. 所以 A 为非零正规算子,$\sigma(A)=\{0\}$. ■

问题 7.1.7 求证: Hilbert 空间上的酉算子不一定有特征值.

解答 设 $H=l^2$,e_n 为 l^2 的第 n 个单位向量,

$$v_{n-1}=e_{2n-1},\quad v_{-n}=e_{2n},$$

其中 $n=1,2,\cdots$. 则$\{v_j:j=0,\pm1,\cdots\}$为 H 的标准正交基. 由于

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\langle x,v_j\rangle|^2=\|x\|^2<\infty,\quad x\in H.$$

故由 Riesz-Fischer 定理知对 $x\in H$

$$A(x)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\langle x,v_j\rangle v_{j+1}\tag{7}$$

在 H 中存在. 显然 A 为线性的,且

$$\|Ax\|^2=\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\langle Ax,v_{j+1}\rangle|^2=\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\langle x,v_j\rangle|^2=\|x\|^2.$$

因此 $A\in BL(H)$.

对于 $x\in H$,m 为整数,由(7)式有

$$\langle x,A^*v_m\rangle=\langle Ax,v_m\rangle=\langle x,v_{m-1}\rangle.$$

因此对任意的 m 有 $A^*v_m=v_{m-1}$. 由(7)式也可以知道 $A(v_m)=v_{m+1}$. 所以

$$A^*Av_m=A^*v_{m+1}=v_m,\quad AA^*v_m=Av_{m-1}=v_m.$$

由于$\{v_m:m=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$为 H 的标准正交基,这说明

$$A^*A(x)=x=AA^*(x),\quad x\in H.$$

因此 A 为酉算子.

假设 A 有特征值 k. 则 $Ax=kx$ 对某一 $x\neq 0$ 成立. 则存在 j 使得 $\langle x,v_j\rangle\neq 0$. 进一步地, 由(7)对所有 m

$$k\langle x,v_m\rangle=\langle kx,v_m\rangle=\langle Ax,v_m\rangle=\langle x,v_{m-1}\rangle.$$

重复利用上式可得

$$k^r\langle x,v_j\rangle=\langle x,v_{j-r}\rangle,\quad k^r\langle x,v_{j+r}\rangle=\langle x,v_j\rangle\neq 0$$

对 $r=1,2,\cdots$ 成立. 最后一个等式说明 $k\neq 0$. 因此由 Bessel 不等式有

$$|\langle x,v_j\rangle|^2\sum_{r=1}^{\infty}|k|^{2r}=\sum_{r=1}^{\infty}|\langle x,v_{j-r}\rangle|^2\leqslant\|x\|^2<\infty,\tag{8}$$

$$|\langle x,v_j\rangle|^2\sum_{r=1}^{\infty}|k|^{-2r}=\sum_{r=1}^{\infty}|\langle x,v_{j+r}\rangle|^2\leqslant\|x\|^2<\infty,\tag{9}$$

由于 $\langle x,v_j\rangle\neq 0$, (8)式可以推出 $|k|<1$, 而(9)式可以推出 $|k|>1$, 矛盾. 因此 A 没有特征值. ■

问题 7.1.8 设 $\{u_n\}$ 为可分 Hilbert 空间 H 的完全标准正交序列, $A\in BL(H)$ 且对某一 $\lambda\in\mathbb{K}$

$$A(u_n)=\lambda u_n-u_{n+1},\quad n=1,2,\cdots.$$

求 $\sigma(A)$.

解答 设 $B=\lambda I-A$, 则 $B\in BL(H)$ 且

$$B(u_n)=\lambda u_n-A(u_n)=u_{n+1},\quad n=1,2,\cdots.$$

由于 $\{u_n\}$ 为完全的, B 为线性的且为连续的, 从而任取 $x\in H$ 有

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,u_n\rangle u_n,\tag{10}$$

$$B(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,u_n\rangle B(u_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,u_n\rangle u_{n+1}.\tag{11}$$

Parseval 公式给出

$$\|B(x)\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,u_n\rangle|^2=\|x\|^2.$$

因此 $\|B\|=1$. 所以

$$k\in\sigma(B)\Rightarrow|k|\leqslant\|B\|=1.$$

这对所有 Banach 空间都是对的[见问题 4.2.1].

假设 $k\notin\sigma(B)$, 则 $(B-kI)^{-1}$ 在 $BL(H)$ 中存在. 若 $x=(B-kI)^{-1}(u_1)$, 则由(10)式及(11)式有

$$u_1=Bx-kx=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,u_n\rangle u_{n+1}-k\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,u_n\rangle u_n$$

$$=-k\langle x,u_1\rangle u_1+\sum_{n=2}^{\infty}(-k\langle x,u_n\rangle+\langle x,u_{n-1}\rangle)u_n.$$

这可以推出

$$-k\langle x,u_1\rangle=1,\quad \langle x,u_{n-1}\rangle=k\langle x,u_n\rangle$$

对 $n=2,3,\cdots$,成立. 因此由归纳法得

$$k^n\langle x,u_n\rangle=-1,\quad n\geqslant 1.$$

所以 $k\neq 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|k|^{-2n}=\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,u_n\rangle|^2=\|x\|^2<\infty.$$

这仅在 $|k|^{-1}<1$ 时可能成立,即有 $|k|>1$.

因此我们证明了

$$k\notin\sigma(B)\Leftrightarrow|k|>1.$$

所以

$$A-\mu I=\lambda I-B-\mu I=-(B-(\mu-\lambda)I)$$

为可逆的当且仅当 $|\mu-\lambda|>1$. 从而

$$\sigma(A)=\{\mu\in\mathbb{K}:|\mu-\lambda|\leqslant 1\}.$$ ■

问题 7.1.9 设 $A\in BL(H)$,其中 H 为 Hilbert 空间. 求证:λ 为 A 的近似特征值当且仅当存在 $\{B_n\}$ 为 $BL(H)$ 中一列元使得 $\|B_n\|=1$ 且当 $n\to\infty$ 时 $\|(A-\lambda I)B_n\|\to 0$.

解答 若存在 $BL(H)$ 中一列元 $\{B_n\}$ 使得 $\|B_n\|=1$ 且 $\|(A-\lambda I)B_n\|\to 0$. 若 $a-\lambda I$ 为下有界的,则存在 $\alpha>0$ 使得

$$\alpha\|x\|\leqslant\|(A-\lambda I)x\|,\quad x\in H. \tag{12}$$

对每一个 n,可以找到 $y_n\in H$ 使得

$$\|y_n\|=1,\quad \|B_n(y_n)\|>\frac{1}{2}\|B_n\|=\frac{1}{2}.$$

利用(12)式得

$$\frac{1}{2}\alpha\leqslant\alpha\|B_ny_n\|\leqslant\|(A-\lambda I)B_ny_n\|\leqslant\|(A-\lambda I)B_n\|.$$

由于当 $n\to\infty$ 时上式的最后一项收敛到 0,这就与 $\alpha>0$ 这个事实矛盾. 因此 $A-\lambda I$ 不可能是下有界的,即 λ 为 A 的近似特征值.

反之,设 λ 为 A 的近似特征值. 则存在 H 中一列元 $\{x_n\}$ 使得 $\|x_n\|=1$ 且 $\|Ax_n-\lambda x_n\|\to 0$. 选取 $u\in H$,$\|u\|=1$,定义 $B_n:H\to H$ 为

$$B_n(x)=\langle x,u\rangle x_n,\quad n=1,2,\cdots.$$

则 B_n 为线性的且对 $x\in H$ 有

$$\|B_nx\|=|\langle x,u\rangle|\,\|x_n\|\leqslant\|x\|\,\|u\|\,\|x_n\|=\|x\|,$$

$$\|B_nu\|=|\langle u,u\rangle x_n|=1.$$

这说明 $\|B_n\|=1$. 又任取 $x\in H$ 有

$$(A-\lambda I)B_n(x)=(A-\lambda I)\langle x,u\rangle x_n,$$
$$\|(A-\lambda I)B_n(x)\|=|\langle x,u\rangle|\,\|(A-\lambda I)(x_n)\|$$
$$\leqslant \|x\|\,\|u\|\,\|Ax_n-\lambda x_n\|.$$

从而有

$$\|(A-\lambda I)B_n\|\leqslant \|Ax_n-\lambda x_n\|\,\|u\|\to 0.$$

因此有 $\|(A-\lambda I)B_n\|\to 0$ 且 $\|B_n\|=1$. ■

问题 7.1.10 设 H 为可分 Hilbert 空间，$\{u_n\}$为 H 的标准正交基，$\{k_n\}$为有界纯量列，求证：

$$A(x)=\sum_{n=1}^{\infty}k_n\langle x,u_n\rangle u_n,\quad x\in H$$

定义了 H 上的正规算子[这样的算子被称为**对角算子**]. 求 A 的特征值和谱.

解答 设$|k_n|\leqslant\alpha$. 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}|k_n\langle x,u_n\rangle|^2\leqslant\alpha^2\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,u_n\rangle|^2\leqslant\alpha^2\|x\|^2.$$

因此由 Riesz-Fischer 定理知对任意 $x\in H$，$A(x)$在 H 中存在，显然 A 为线性的. 进一步地

$$\langle Ax,u_n\rangle=k_n\langle x,u_n\rangle,\quad n=1,2,\cdots, \tag{13}$$

从而由 Parseval 公式

$$\|Ax\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\langle Ax,u_n\rangle|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|k_n\langle x,u_n\rangle|^2\leqslant\alpha^2\|x\|^2.$$

从而任取 $x\in H$ 有 $\|Ax\|\leqslant\alpha\|x\|$，$A$ 为有界的.

由于$\{u_n\}$为完全的，故

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,u_n\rangle u_n,\quad x\in H.$$

因此，任取 $k\in\mathbb{K}$，$x\in H$，

$$Ax-kx=\sum_{n=1}^{\infty}(k_n-k)\langle x,u_n\rangle u_n. \tag{14}$$

所以

$$\langle Ax-kx,u_m\rangle=(k_m-k)\langle x,u_m\rangle,\quad m=1,2,\cdots,$$

且 $Ax-kx=0$ 当且仅当任取 $m\geqslant 1$ 有$\langle Ax-kx,u_m\rangle=0$，或等价地

$$(k_m-k)\langle x,u_m\rangle=0,\quad m\geqslant 1. \tag{15}$$

若 $k=k_n$ 及 $x=u_n$ 对某一个 n 成立，则上式是成立的. 因此 $Au_n=k_nu_n$，k_n 为 A 的特征值. 另外若 $k\in\mathbb{K}$ 且任取 n 有 $k\neq k_n$，则要(15)式成立必须有$\langle x,u_m\rangle=0$ 对所有的 m 成立，即 $x=0$. 因此 $Ax-kx=0$ 当且仅当 $x=0$. 因此若任取 n 都有 $k\neq k_n$，则 k 不为 A 的特征值. 从而

$$\sigma_e(A)=\{k_n:n\geqslant 1\}.$$

现设 k 不为 A 的近似特征值，则 $A-kI$ 为下有界的. 存在 $\beta>0$ 使得

$$\beta \| x \| \leqslant \| Ax - kx \|, \quad x \in H.$$

在(14)式中取 $x=u_m$ 得

$$\beta \leqslant \| Au_m - ku_m \| = \| (k_m - k)u_m \| = | k_m - k |. \tag{16}$$

设 $V=\{k_n : n=1,2,\cdots\}$. 由于 $\beta>0$,(16)式说明 $k \notin \bar{V}$,其中 $\bar{V}$ 为 V 的闭包. 这样我们就证明了

$$\bar{V} \subset \sigma_a(A). \tag{17}$$

另外,假设 $k \notin \bar{V}$,则存在 $\beta>0$ 使得任取 $n \geqslant 1$ 有 $|k_n-k|>\beta$. 设 $\alpha_n=(k_n-k)^{-1}$,则 $\{\alpha_n\}$ 有界. 因此,如上面一样,

$$B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle x, u_n \rangle u_n, \quad x \in H,$$

定义了 $BL(H)$ 中一元. 进一步地

$$\langle Bx, u_n \rangle = \alpha_n \langle x, u_n \rangle, \quad n \geqslant 1.$$

所以由(14)式有

$$AB(x) - kB(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (k_n - k)\langle Bx, u_n \rangle u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (k_n - k)\alpha_n \langle x, u_n \rangle u_n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle u_n = x.$$

类似地,由于由(14)式有

$$\langle Ax - kx, u_n \rangle = (k - k_n)\langle x, u_n \rangle,$$

我们有

$$B(Ax - kx) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (k_n - k)\langle x, u_n \rangle u_n = x.$$

从而 $(A-kI)B=I=B(A-kI)$. 这证明了 $k \notin \sigma(A)$. 所以

$$\sigma(A) \subset \bar{V}.$$

由于 $\sigma_a(A) \subset \sigma(A)$. 这与(17)式一起推出

$$\sigma(A) = \bar{V}.$$

最后,由(13)式有 $\langle Ax - k_n x, u_n \rangle = 0$,故有

$$\langle Ax - k_n x, Au_n \rangle = \langle Ax - k_n x, k_n u_n \rangle = 0.$$

因此

$$\langle A^* Ax, u_n \rangle = \langle Ax, Au_n \rangle = \langle k_n x, Au_n \rangle$$

对所有的 $n \geqslant 1, x \in H$ 成立. 由于 $\{u_n\}$ 为完全的,我们有

$$A^* A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle A^* Ax, u_n \rangle u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle k_n x, Au_n \rangle u_n.$$

又由于

$$AA^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \langle A^* x, u_n \rangle u_n = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \langle x, Au_n \rangle u_n,$$

所以任取 $x\in H$ 有 $AA^*(x)=A^*A(x)$. 因此 A 为正规的. ■

问题 7.1.11 设 H 为可分 Hilbert 空间，$A\in BL(H)$. 求证：A 相对于 H 的某一标准正交基为对角的当且仅当 A 为正规的且 H 为所有 A 的特征向量生成子空间的闭包.

解答 设 A 相对于 H 的某一标准正交基 $\{u_n\}$ 为对角的，则存在纯量序列 $\{k_n\}$ 使得

$$A(x)=\sum k_n\langle x,u_n\rangle u_n,\quad x\in H. \tag{18}$$

则正如问题 7.1.10 解答的最后一部分，我们有

$$AA^*(x)=\sum k_n\langle x,Au_n\rangle u_n=A^*A(x).$$

因此 A 为正规的，由(18)式知 $A(u_n)=k_nu_n$，故 k_n 为 A 的特征值，u_n 为其对应的特征向量，所以 A 的特征向量生成的子空间包含由 $\{u_n\}$ 生成的子空间. 由于 $\{u_n\}$ 为完全的，故由问题 5.2.14 知 $\overline{\text{span}}\{u_n\}=H$. 从而 H 为 A 的所有特征向量生成子空间的闭包.

反之，设 A 为正规的且 $H=\overline{\text{span}}(E)$，其中 E 为 A 的所有特征向量. 由于 A 为正规的，所以对应于不同特征值的特征向量是相互正交的. 因为 H 为可分的，故 H 的每个标准正交集都为可数的. 设 $k_1,k_2,\cdots$ 为 $\sigma_e(A)$ 中不同的元，$Y_n=Z(A-k_nI)$ 为对应于 k_n 的特征空间. 则 Y_n 为非零 Hilbert 空间. 设 $\{u_{ni}:i=1,2,\cdots\}$ 为 Y_n 的标准正交基，则 $\{u_{ni}:n\geqslant 1,i\geqslant 1\}$ 为 H 的标准正交集.

若 $x\in H$ 使得任取 n,i 有 $\langle x,u_{ni}\rangle=0$. 设 y 为 A 的任意特征向量，则 y 必对应于某一特征值 k_n，因此有 $y\in Y_n$ 对某个 n 成立. 所以

$$y=\sum_{i\geqslant 1}\langle y,u_{ni}\rangle u_{ni}.$$

利用内积的线性性及连续性有

$$\langle y,x\rangle=\sum_i\langle y,u_{ni}\rangle\langle u_{ni},x\rangle=0.$$

这说明任取 $y\in E$ 有 $\langle x,y\rangle=0$，即有 $x\in E^\perp$. 但由问题 5.3.5 及问题 5.3.2 知

$$E^{\perp\perp}=\overline{\text{span}}(E),\quad E^{\perp\perp\perp}=E^\perp.$$

因此

$$E^{\perp\perp}=H,\quad E^\perp=E^{\perp\perp\perp}=H^\perp=\{0\}.$$

所以 $x=0$. 这就证明了 $\{u_{ni}:n\geqslant 1,i\geqslant 1\}$ 为 H 由 A 的特征向量组成的标准正交基. 因此任取 $x\in H$，由 A 的线性性及连续性有

$$x=\sum_{n,i}\langle x,u_{ni}\rangle u_{ni},\quad A(x)=\sum_{n,i}\langle x,u_{ni}\rangle A(u_{ni}),$$

但 $A(u_{ni})=k_nu_{ni}$，故

$$A(x)=\sum_{n,i}k_n\langle x,u_{ni}\rangle u_{ni}.$$

这就证明了 A 相对于标准正交基 $\{u_{ni}\}$ 为对角的. ■

问题 7.1.12 设 H 为 Hilbert 空间，$\{u_n\}$ 为 H 的可数标准正交集，$\{u_n\}$ 不一定为完全的. $\{k_n\}$ 为有界纯量序列，用 E 表示集合 $\{k_n:n=1,2,\cdots\}$. 对 $x\in H$ 令

$$A(x) = \sum_{n\geqslant 1} k_n\langle x, u_n\rangle u_n. \tag{19}$$

求证：

(a) $A\in BL(H)$且

$$E \subset \sigma_e(A) \subset E \cup \{0\}.$$

(b) $\bar{E}\subset\sigma(A)\subset\bar{E}\cup\{0\}$.

(c) 若 $k\notin\sigma(A)$，则 $A-kI$ 的逆 B 由下式给出

$$B(x)=\sum \frac{\langle x,u_n\rangle}{k_n}u_n, \quad k=0,$$

$$kB(x)=-x+\sum \frac{k_n}{k_n-k}\langle x,u_n\rangle u_n, \quad k\neq 0.$$

解答 (a) 设 $Y=\overline{\text{span}}\{u_n\}$，则 Y 为 H 的闭子空间且 $\{u_n\}$ 为 Y 的标准正交基. 正如问题 7.1.10 的解答一样，可知任取 $x\in H$，$A(x)$ 在 H 中存在. A 显然为线性算子，$A(x)\in Y$ 且对 $x\in H$，$n\geqslant 1$ 有 $\langle Ax,u_n\rangle=k_n\langle x,u_n\rangle$. 因此若 $|k_n|\leqslant\lambda$，则

$$\|Ax\|^2=\sum_n |\langle Ax,u_n\rangle|^2=\sum |k_n\langle x,u_n\rangle|^2\leqslant\lambda^2\|x\|^2.$$

所以 $A\in BL(H)$.

由(19)式知 $A(u_n)=k_nu_n$. 从而每一个 k_n 都为 A 的特征值，即有

$$E\subset\sigma_e(A).$$

若 $k\notin E\cup\{0\}$ 且 $Ax=kx$，则 $x=\frac{1}{k}A(x)\in Y$. 因此

$$x=\sum\langle x,u_n\rangle u_n,$$

这是由于 $\{u_n\}$ 为 Y 的标准正交基. 所以由(19)式得

$$k\sum\langle x,u_n\rangle u_n=kx=A(x)=\sum k_n\langle x,u_n\rangle u_n.$$

这可以推出

$$k\langle x,u_n\rangle=k_n\langle x,u_n\rangle, \quad n\geqslant 1.$$

但任取 n 有 $k\neq k_n$，从而必有 $\langle x,u_n\rangle=0$，由于这对每一个 n 成立，故有 $x=0$. 所以 k 不为 A 的特征值. 我们证明了

$$\sigma_e(A)\subset E\cup\{0\}.$$

(b) 设 $k\notin\sigma_a(A)$，则 $A-kI$ 为下有界的，即存在 $\alpha>0$ 使得

$$\alpha\|x\|\leqslant\|Ax-kx\|, \quad x\in H.$$

由(19)式有 $A(u_n)=k_nu_n$，从而

$$\alpha\|u_n\|\leqslant\|k_nu_n-ku_n\|=|k_n-k|.$$

因此对 $n=1,2,\cdots$ 有 $|k_n-k|\geqslant\alpha$. 这说明 $k\notin\bar{E}$. 所以

$$\bar{E}\subset\sigma_a(A)\subset\sigma(A). \tag{20}$$

设 $k\notin\bar{E}$ 且 $k\neq 0$，则存在 $\beta>0$ 使得任取 n 有 $|k-k_n|>\beta$. 若 $|k_n|\leqslant\lambda$，则

$$\left|\frac{k_n}{k_n-k}\right| \leqslant \frac{\lambda}{\beta}, \quad n \geqslant 1.$$

因此，如上面(a)的证明一样

$$T(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{k_n}{k_n-k}\langle x, u_n\rangle u_n, \quad x \in H \tag{21}$$

定义了 $BL(H)$ 中一元. 进一步地

$$\langle Tx, u_n\rangle = \frac{k_n}{k_n-k}\langle x, u_n\rangle$$

对 $n\geqslant 1$ 及 $x\in H$ 成立. 所以

$$AT(x) = \sum k_n\langle Tx, u_n\rangle u_n = \sum \frac{k_n^2}{k_n-k}\langle x, u_n\rangle u_n,$$

$$TA(x) = \sum \frac{k_n}{k_n-k}\langle Ax, u_n\rangle u_n = \sum \frac{k_n^2}{k_n-k}\langle x, u_n\rangle u_n.$$

这是由于由(19)式有 $\langle Ax, u_n\rangle = k_n\langle x, u_n\rangle$，因此

$$A(x)+kT(x) = \sum \left(k_n + \frac{kk_n}{k_n-k}\right)\langle x, u_n\rangle u_n$$

$$= \sum \frac{k_n^2}{k_n-k}\langle x, u_n\rangle u_n = AT(x) = TA(x).$$

所以有 $A+kT=AT=TA$. 从而有

$$(A-kI)(T-I) = AT - A - kT + kI = kI,$$
$$(T-I)(A-kI) = TA - kT - A + kI = kI. \tag{22}$$

由此可以推出若 $k\notin \bar{E}$ 且 $k\neq 0$，则 $A-kI$ 在 $BL(H)$ 中为可逆的. 因此有

$$\sigma(A) \subset \bar{E} \cup \{0\}.$$

这与(20)式一起就证明了(b).

(c) 设 $k\notin\sigma(A)$，则由(b)知，$k\notin \bar{E}$. 若 $k\neq 0$，则(22)式证明了 $(A-kI)^{-1} = \frac{1}{k}(T-I)$；因此由(21)式得

$$k(A-kI)^{-1}(x) = T(x) - x = -x + \sum \frac{k_n}{k_n-k}\langle x, u_n\rangle u_n.$$

设 $k=0$，则 A^{-1} 在 $BL(H)$ 中存在. 设 x 为 H 中一元，则 $x=y+z, y\in Y, z\in Y^{\perp}$. 任取 n 有 $\langle z, u_n\rangle = 0$，所以由(19)式有 $A(z)=0$，从而 $z=A^{-1}A(z)=0$. 这说明 $x=y\in Y$. 这就证明了 $Y=H$，$\{u_n\}$ 为 H 的标准正交基. 因为 $0=k\notin \bar{E}$，所以 $\{1/k_n\}$ 为有界的. 从而如(a)的证明一样可知

$$B(x) = \sum \frac{1}{k_n}\langle x, u_n\rangle u_n, \quad x \in H,$$

定义了 $BL(H)$ 中一个元，又对 $x\in H$ 有

$$BA(x) = \sum \frac{1}{k_n}\langle Ax, u_n\rangle u_n = \sum \frac{1}{k_n}k_n\langle x, u_n\rangle u_n = x,$$

这是由于$\{x_n\}$为 H 的标准正交基. 因此

$$B(x) = BAA^{-1}x = A^{-1}x, \quad x \in H,$$

即 $B=A^{-1}$. ■

问题 7.1.13 设 A 为 Hilbert 空间 H 上的算子. H 的子空间 F 称为 A 的**不变子空间**若有 $A(F)\subset F$. [例如, A 的值域 $R(A)$ 为 A 的不变子空间.]若 A 为正规的, E 为由 A 的特征向量组成的集合, $F_1=E^{\perp}$, F_2 为由 E 生成子空间的闭包. 求证 F_1 和 F_2 都为 A 的闭不变子空间.

解答 由问题 5.3.1 知 $E^{\perp}$ 为 H 的闭子空间, 设 $x\in E^{\perp}$, $v\in E$, 则 $\langle x,v\rangle=0$ 且 v 为 A 的特征向量. 因此 $Av=kv$ 对某一个 k 成立. 由于 A 为正规的, 则由问题 7.1.2(a)知 $A^*v=\bar{k}v$. 所以

$$\langle Ax,v\rangle = \langle x,A^*v\rangle = \langle x,\bar{k}v\rangle = k\langle x,v\rangle = 0.$$

这就证明了 $Ax\in E^{\perp}$. 我们有 $A(E^{\perp})\subset E^{\perp}$, 即 $F_1=E^{\perp}$ 为 A 的不变子空间.

设 $E_1=\mathrm{span}(E)$, $x\in E_1$, 则

$$x = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n, \quad v_i \in E.$$

因为 v_i 为 A 的特征向量, 所以 $A(v_i)=k_iv_i$ 对某一个 $k_i\in\mathbb{K}$ 成立, 因此

$$A(x) = \sum_{i=1}^{n} c_iA(v_i) = \sum_{i=1}^{n} c_ik_iv_i \in E_1.$$

这说明若 $x\in E_1$, 则有 $A(x)\in E_1$. 若 $x\in F_2=\bar{E}_1$, 则存在 E_1 中一列元 x_n 使得 $x_n\to x$. 则有 $A(x_n)\to A(x)$. 所以我们有 $A(x)\in\bar{E}_1$, 这是因为 $A(x_n)\in E_1$. 这证明了对 $x\in F_2$ 有 $Ax\in F_2$, 即 $A(F_2)\subset F_2$. 因此 F_2 为 A 的不变子空间.

问题 7.1.14 设 H 为复 Hilbert 空间, W 为所有 $BL(H)$中自伴算子之集, W_1 为 $BL(H)$中所有酉算子 B 之集使得 $1\notin\sigma(B)$. 若 $A\in W$, 记

$$U(A) = (A-\mathrm{i}I)(A+\mathrm{i}I)^{-1}.$$

求证: U 为从 W 到 W_1 的一一映射, 其逆由下式给出:

$$U^{-1}(B) = \mathrm{i}(I+B)(I-B)^{-1}, \quad B\in W_1.$$

[$U(A)$被称为 A 的 **Cayley 变换**.]

解答 若 A 为自伴的, 则由问题 7.1.3(b)知它的谱值均为实数, 从而 $A-\mathrm{i}I$ 及 $A+\mathrm{i}I$ 在 $BL(H)$中均可逆. 设 $B=U(A)$, 则 B 为可逆的且

$$\begin{aligned} B^{-1} &= (A+\mathrm{i}I)(A-\mathrm{i}I)^{-1} = (A-\mathrm{i}I+2\mathrm{i}I)(A-\mathrm{i}I)^{-1} \\ &= I+2\mathrm{i}(A-\mathrm{i}I)^{-1} = (A-\mathrm{i}I)^{-1}(A-\mathrm{i}I+2\mathrm{i}I) \\ &= (A-\mathrm{i}I)^{-1}(A+\mathrm{i}I). \end{aligned}$$

由于 $B(A+\mathrm{i}I)=A-\mathrm{i}I$, 且 A 为自伴的,

$$(A+\mathrm{i}I)^*B^* = (A-\mathrm{i}I)^*.$$

因此

$$\begin{aligned} (A-\mathrm{i}I)B^* &= A+\mathrm{i}I, \\ B^* &= (A-\mathrm{i}I)^{-1}(A+\mathrm{i}I) = B^{-1}. \end{aligned}$$

这就证明了 B 为酉算子. 又

$$B=(A+\mathrm{i}I-2\mathrm{i}I)(A+\mathrm{i}I)^{-1}=I-2\mathrm{i}(A+\mathrm{i}I)^{-1},$$

$$I-B=2\mathrm{i}(A+\mathrm{i}I)^{-1}.$$

这说明 $I-B$ 在 $BL(H)$ 中可逆,因此 $1\notin\sigma(B)$. 所以 $B\in W_1$.

若 $A\in W$,$B=U(A)$,则

$$B(A+\mathrm{i}I)=A-\mathrm{i}I,$$

$$\mathrm{i}B+\mathrm{i}I=A-BA=A(I-B),$$

$$\mathrm{i}(B+I)(I-B)^{-1}=A.$$

因此,若 $A_1,A_2\in W$,$U(A_1)=U(A_2)=B$,则

$$A_1=\mathrm{i}(I+B)(I-B)^{-1}=A_2.$$

这就证明了 U 为单射.

设 B 为 W_1 中一元,则 $BB^*=I=B^*B$ 且 $I-B$ 为可逆的. 设

$$A=\mathrm{i}(I+B)(I-B)^{-1}. \tag{23}$$

则

$$A(I-B)=\mathrm{i}(I+B). \tag{24}$$

由此可得

$$(I-B^*)A^*=-\mathrm{i}(I+B^*),\quad (B-BB^*)A^*=-\mathrm{i}(B+BB^*),$$

$$(B-I)A^*=-\mathrm{i}(B+I),\quad A^*=\mathrm{i}(I+B)(I-B)^{-1}.$$

由(23)式知 $A^*=A$,即有 $A\in W$. 又由(24)式得

$$A-\mathrm{i}I=\mathrm{i}B+AB=(\mathrm{i}I+A)B,$$

取伴随后有

$$A+\mathrm{i}I=B^*(-\mathrm{i}I+A)=B^{-1}(A-\mathrm{i}I).$$

因此

$$I=B^{-1}(A-\mathrm{i}I)(A+\mathrm{i}I)^{-1}=B^{-1}U(A),$$

这就证明了 $B=U(A)$. 从而 U 为满射. 由(23)式有

$$U^{-1}(B)=A=\mathrm{i}(I+B)(I-B)^{-1}.$$

■

问题 7.1.15 设 $H=L^2[0,1]$,其中数域 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. 对 $x\in H$,令

$$A(x)(s)=\int_0^1 s^2t^2x(t)\mathrm{d}t,\quad 0\leqslant s\leqslant 1.$$

求证:$A\in BL(H)$ 为自伴的,求 m_A 和 M_A.

解答 设 $k(s,t)=s^2t^2$,则

$$\int_0^1|k(s,t)|\,\mathrm{d}t=\int_0^1 s^2t^2\mathrm{d}t=\frac{s^2}{3}\leqslant\frac{1}{3},$$

$$\int_0^1|k(s,t)|\,\mathrm{d}s\leqslant\frac{1}{3}.$$

因此,由问题 6.1.12 知 $A\in BL(H)$ 且

$$A^*(x)(s)=\int_0^1 \overline{k(t,s)}x(t)\mathrm{d}t.$$

由于$\overline{k(t,s)}=t^2s^2=k(s,t)$，所以 $A^*=A$，即 A 为自伴的.

若 $x\in L^2[0,1]$，我们有

$$\langle Ax,x\rangle=\int_0^1 A(x)(s)x(s)\mathrm{d}s=\int_0^1\left\{\int_0^1 s^2t^2x(t)\mathrm{d}t\right\}x(s)\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^1 s^2x(s)\mathrm{d}s\cdot\int_0^1 t^2x(t)\mathrm{d}t=\left(\int_0^1 t^2x(t)\mathrm{d}t\right)^2. \tag{25}$$

这证明了任取 $x\in H$ 有$\langle Ax,x\rangle\geqslant 0$，设 $x(t)=b(1+at)$. 则有

$$\int_0^1 t^2x(t)\mathrm{d}t=b\int_0^1(t^2+at^3)\mathrm{d}t=b\left(\frac{1}{3}+\frac{a}{4}\right); \tag{26}$$

$$\int_0^1 |x(t)|^2\mathrm{d}t=b^2\int_0^1(1+2at+a^2t^2)\mathrm{d}t=b^2\left(1+a+\frac{a^2}{3}\right). \tag{27}$$

若 $a=-4/3$ 且 $b^2\left(1+a+\frac{a^2}{3}\right)=1$，即取 $b=\sqrt{27/7}$，则由(25)式，(26)式及(27)式知

$$\langle Ax,x\rangle=0,\quad \|x\|=1.$$

因此有 $0\in W(A)$，从而 $m_A=0$. 又

$$\left|\int_0^1 t^2x(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\left(\int_0^1 t^4\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_0^1|x(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\|x\|.$$

上式与(25)式一起给出$\langle Ax,x\rangle\leqslant\frac{1}{5}$对任意的 $x\in H$，$\|x\|=1$ 成立. 若取 $x(t)=\sqrt{5}t^2$，则

$$\int_0^1 t^2x(t)\mathrm{d}t=\sqrt{5}\int_0^1 t^4\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\int_0^1 x(t)^2\mathrm{d}t=5\int_0^1 t^4\mathrm{d}t=1.$$

所以，$\|x\|=1$，$\langle Ax,x\rangle=1/5$. 这就证明了 $M_A=\frac{1}{5}$. ■

问题 7.1.16 设 $A\in BL(H)$，H 为 Hilbert 空间. 若 A 为自伴且为可逆的，求证：

$$\|A^{-1}\|\geqslant\max\left\{\frac{1}{|m_A|},\frac{1}{|M_A|}\right\}.$$

举例说明上述不等式可以是严格的.

解答 设 $B=A^{-1}$，则 $AB=I$，所以

$$B^*A^*=I,\quad B^*A=I,\quad B^*=A^{-1}=B.$$

因此 B 也为自伴的. 若 $k\neq 0$，则

$$A-kI=kA\left(\frac{1}{k}I-B\right).$$

这证明了 $k\in\sigma(A)$当且仅当$\frac{1}{k}\in\sigma(B)$. 由于 m_A 和 M_A 为 A 的谱值，所以 $1/m_A$ 及 $1/M_A$ 为

B 的谱值，由于

$$\sigma(B) \subset \overline{W(B)} = [m_B, M_B],$$

故有

$$m_B \leqslant \frac{1}{m_A} \leqslant M_B, \tag{28}$$

$$m_B \leqslant \frac{1}{M_A} \leqslant M_B. \tag{29}$$

由于 $A=B^{-1}$，我们可以在上式中交换 A,B 的角色，则有

$$m_A \leqslant \frac{1}{m_B} \leqslant M_A, \tag{30}$$

$$m_A \leqslant \frac{1}{M_B} \leqslant M_A. \tag{31}$$

由(28)式知若 $m_B>0$，则 $m_A>0$，由(30)式知若 $m_A>0$，则 $m_B>0$. 类似地，由(29)式和(30)式，$M_A<0$ 当且仅当 $M_B<0$. 假设 $m_A>0$ 或 $M_A<0$，则 m_A, M_A, m_B 和 M_B 的符号相同. 将不等式(31)式乘以 M_B/m_A，再将它与(28)式中的第二个不等式比较则有

$$M_B = \frac{1}{m_A}.$$

类似地，由(29)式和(30)式可得

$$m_B = \frac{1}{M_A}.$$

因此若 $m_A>0$ 或 $M_A<0$，则

$$\| B \| = \max\{ | m_B |, | M_B | \} = \max\left\{ \frac{1}{| M_A |}, \frac{1}{| m_A |} \right\}.$$

若 $m_A<0<M_A$，则由(28)式及(29)式得

$$m_B \leqslant \frac{1}{m_A} < 0 < \frac{1}{M_A} \leqslant M_B.$$

因此

$$\| B \| \geqslant | m_B | \geqslant \frac{1}{| m_A |}, \quad \| B \| \geqslant M_B \geqslant \frac{1}{M_A},$$

$$\| B \| \geqslant \max\left\{ \frac{1}{| m_A |}, \frac{1}{| M_A |} \right\}.$$

这就完成了第一部分的证明.

为证第二部分，设 $H=\mathbb{R}^3$，$\mathbb{K}=\mathbb{R}$，A 由矩阵

$$\boldsymbol{M}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

表示. 由于 $\boldsymbol{M}_1$ 为对称的且 $\det(\boldsymbol{M}_1)\neq 0$，所以 A 为自伴的且为可逆的. 其逆 B 由矩阵

$$\boldsymbol{M}_2 = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

表示. 若 $x\in\mathbb{R}^3$,则

$$Ax = (3x(1), -2x(2), -x(3)),$$
$$\langle Ax, x\rangle = 3x(1)^2 - 2x(2)^2 - x(3)^2.$$

因此

$$\langle Ax, x\rangle \leqslant 3x(1)^2 \leqslant 3\|x\|^2,$$
$$\langle Ax, x\rangle + 2\|x\|^2 = 5x(1)^2 + x(3)^2 \geqslant 0$$

对所有的 $x\in\mathbb{R}^3$ 成立. 因而若 $\|x\|=1$,则

$$\langle Ax, x\rangle \leqslant 3, \tag{32}$$
$$\langle Ax, x\rangle + 2 \geqslant 0. \tag{33}$$

若 $x=(1,0,0)$,则此时不等式(32)为等式. 若 $x=(0,1,0)$,则不等式(33)为等式,因此有 $m_A=-2, M_A=3$. 另外,若 $x=(0,0,1)$,则 $\|x\|=1, Bx=(0,0,-1)$,且

$$1 = \|Bx\| \leqslant \|B\|\,\|x\| = \|B\|.$$

从而有 $\|B\|\geqslant 1$,但我们有

$$\max\left\{\frac{1}{|m_A|}, \frac{1}{|M_A|}\right\} = \frac{1}{2}.$$ ■

问题 7.1.17 设 H 为 Hilbert 空间,$A\in BL(H)$. 求证:A 的数值域 $W(A)$为凸集.

解答 若 $H\neq\{0\}$,则 $W(A)$显然非空. 若 k_1 和 k_2 为 $W(A)$两个不同的点,则

$$k_1 = \langle Ax_1, x_1\rangle, \quad k_2 = \langle Ax_2, x_2\rangle,$$

其中 $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$. 设

$$\alpha = \frac{1}{k_1 - k_2}(\langle Ax_1, x_2\rangle - k_2\langle x_1, x_2\rangle),$$

$$\beta = \frac{1}{k_1 - k_2}(\langle Ax_2, x_1\rangle - k_2\langle x_2, x_1\rangle),$$

$$\gamma = \pm\frac{\alpha - \bar{\beta}}{|\alpha - \bar{\beta}|}, \quad \alpha \neq \bar{\beta};$$

若 $\alpha=\bar{\beta}$,$\gamma=\pm 1$,其中符号“+”或“−”的选取是保证有

$$a = \mathrm{Re}\gamma\langle x_2, x_1\rangle \geqslant 0.$$

若 s,t 为实数,$x=tx_1+s\gamma x_2$,

$$g(s,t) = \frac{1}{k_1 - k_2}(\langle Ax, x\rangle - k_2\langle x, x\rangle).$$

则

$$\begin{aligned}\langle x, x\rangle &= \langle tx_1 + s\gamma x_2, tx_1 + s\gamma x_2\rangle \\ &= t^2\|x_1\|^2 + ts\bar{\gamma}\langle x_1, x_2\rangle + st\gamma\langle x_2, x_1\rangle + s^2|\gamma|^2\|x_2\|^2\end{aligned}$$

$$= t^2 + 2ast + s^2. \tag{34}$$

进一步地，

$$\begin{aligned}\langle Ax, x\rangle &= \langle tAx_1 + s\gamma Ax_2, tx_1 + s\gamma x_2\rangle \\ &= t^2\langle Ax_1, x_1\rangle + ts\bar{\gamma}\langle Ax_1, x_2\rangle + st\gamma\langle Ax_2, x_1\rangle + s^2 \mid \gamma \mid^2\langle Ax_2, x_2\rangle \\ &= t^2 k_1 + ts\bar{\gamma}\langle Ax_1, x_2\rangle + st\gamma\langle Ax_2, x_1\rangle + s^2 k_2.\end{aligned}$$

由此可知

$$\begin{aligned}(k_1 - k_2)g(s,t) &= \langle Ax, x\rangle - k_2\langle x, x\rangle \\ &= t^2(k_1 - k_2) + st\bar{\gamma}\alpha(k_1 - k_2) + st\gamma\beta(k_1 - k_2).\end{aligned}$$

因此

$$g(s,t) = t^2 + stb, \tag{35}$$

其中 $b = \alpha\bar{\gamma} + \beta\gamma$. 利用 γ 的取值，若 $\alpha \neq \bar{\beta}$，则

$$\pm b \mid \alpha - \bar{\beta} \mid = \alpha(\bar{\alpha} - \beta) + \beta(\alpha - \bar{\beta}) \in \mathbb{R},$$

若 $\alpha = \bar{\beta}$，则

$$\pm b = \alpha + \beta = \bar{\beta} + \beta \in \mathbb{R}.$$

所以无论 γ 的值如何选取，总有 $b \in \mathbb{R}$. 因此，若 s, t 为实数，则 $g(s,t)$ 也为实数. 若 $0 \leqslant t \leqslant 1$，选取

$$s = -at + \sqrt{a^2 t^2 + 1 - t^2}. \tag{36}$$

则由(34)式知 $\langle x, x\rangle = 1$. 进一步地，对 $0 \leqslant t \leqslant 1$，$g(s,t)$ 成为一个 t 的实值连续函数 $h(t)$. 若 $t = 1$，则 $a \geqslant 0$，故 $s = 0$，因此由(35)式知 $h(1) = 1$. 又 $h(0) = 0$. 因此若 $0 < \lambda < 1$，则存在 $0 < t < 1$ 使得 $h(t) = \lambda$. 若 s 为由(36)式确定的值，则有 $x \in H$，$\langle x, x\rangle = 1$，且

$$\frac{1}{k_1 - k_2}(\langle Ax, x\rangle - k_2\langle x, x\rangle) = g(s,t) = h(t) = \lambda.$$

因此

$$\langle Ax, x\rangle - k_2 = (k_1 - k_2)\lambda,$$

即 $\lambda k_1 + (1-\lambda)k_2 = \langle Ax, x\rangle \in W(A)$. ■

问题 7.1.18 设 H 为 Hilbert 空间，$A \in BL(H)$，$W(A)$ 为 A 的数值域. 求证：

(a) $W(A) = w(UAU^{-1})$，其中 U 为 H 上的酉算子.

(b) 若 $W(A)$ 至少含有两个点，则 $W(A)$ 的导集为 $\overline{W}(A)$.

解答 (a)设 U 为 H 上的酉算子，$B = UAU^{-1}$. 设 $k \in W(A)$，则 $k = \langle Ax, x\rangle$，$\| x \| = 1$. 取 $y = U(x)$，则 $By = UAU^{-1}y = UAx$，从而

$$\langle By, y\rangle = \langle UAx, Ux\rangle = \langle Ax, U^*Ux\rangle = \langle Ax, x\rangle = k.$$

因此 $k = \langle By, y\rangle$，$\| y \| = \| Ux \| = \| x \| = 1$. 所以 $k \in W(B)$. 由于 U^{-1} 也为酉算子，类似可证：若 $k \in W(B)$，则有 $k \in W(A)$. 因此有 $W(A) = W(B)$.

(b) 由于 $W(A)$ 的每一个极限点必然在它的闭 $\overline{W(A)}$ 中，所以仅需证明 $\overline{W(A)}$ 中的每一

点都为 $W(A)$ 的极限点. 设 $k\in\overline{W(A)}$ 和 $\varepsilon>0$ 给定. 存在 $k_1\in W(A)$ 使得 $\|k-k_1\|<\varepsilon/2$. 由于 $W(A)$ 至少含有两个点,我们可以在 $W(A)$ 选取 k_2 使得 $k_1\neq k_2$. 设

$$k(t)=tk_1+(1-t)k_2,\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

则由问题 7.1.17 知 $W(A)$ 为凸集,从而任取 $0\leqslant t\leqslant 1$ 有 $k(t)\in W(A)$. 由于 $k(t)$ 为 t 的连续函数,且当 $t\to 1$ 时 $k(t)\to k_1$,我们可以选取 $0<t<1$ 使得

$$|k(t)-k_1|<\varepsilon/2,\quad k(t)\neq k.$$

因此有 $|k(t)-k|\leqslant|k(t)-k_1|+|k_1-k|<\varepsilon$. 由于 $k(t)\in W(A)$ 且 $k(t)\neq k$,故 k 为 $W(A)$ 的极限点. ■

问题 7.1.19 设 H 为有限维 Hilbert 空间,$A\in BL(H)$. 若

(i) A 为自伴的或

(ii) A 为正规的且数域 $\mathbb{K}$ 为 $\mathbb{C}$.

求证:存在纯量 $t_1,t_2,\cdots,t_m$,存在 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 为两两正交的 H 的子空间,使得任取 $x\in H$

$$x=y_1+y_2+\cdots+y_m,\quad y_i\in Y_i,$$

$$A(x)=t_1y_1+\cdots+t_my_m.$$

解答 设 $\boldsymbol{M}$ 为 A 相对于 H 的某一标准正交基的矩阵表示,$t_1,t_2,\cdots,t_m$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的特征多项式 $p(t)=\det(\boldsymbol{M}-t\boldsymbol{I})$ 在 $\mathbb{C}$ 中不同的根. 若 $t_i\in\mathbb{K}$,则 t_i 为 A 的特征值.

假设 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$,则 A 为自伴的,因此 $\boldsymbol{M}$ 为实对称矩阵. 若 $\boldsymbol{M}$ 为 $n\times n$ 的,则它表示了一个线性算子 $T:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$,且 T 为自伴的. $p(t)$ 的根为 T 的特征值,故 $p(t)$ 的根必为实数. 因此对所有 i 有 $t_i\in\mathbb{R}$. 所以若(i)或(ii)成立,则 $t_1,t_2,\cdots,t_m$ 均在数域 $\mathbb{K}$ 中,因而这 m 个数刚好是 A 不同的特征值. 这说明 A 有特征值存在.

设 $Y_i=Z(A-t_iI)$ 为相对于 t_i 的特征空间. 由于无论(i)还是(ii)成立,A 均为正规的,由问题 7.1.2(c)知对应于不同特征值的特征向量必相互正交. 因此若 $i\neq j$,则 $Y_i\perp Y_j$. 设 $Y=Y_1+Y_2+\cdots+Y_m$,即

$$Y=\{y\in H:y=y_1+y_2+\cdots+y_m,y_i\in Y_i\}.$$

我们将证明 $Y=H$.

设 $x\in Y^\perp$ 及 $y\in Y$,则 $y=y_1+y_2+\cdots+y_m$,$y_i\in Y_i$. 由于 $Y_i\subset Y$,故有 $\langle x,y_i\rangle=0$. 由于 A 为正规的,由问题 7.1.2(a)知 $y_i\in Z(A^*-\overline{t}_iI)$,即 $A^*y_i=\overline{t}_iy_i$. 因此

$$\langle Ax,y_i\rangle=\langle x,A^*y_i\rangle=\langle x,\overline{t}_iy_i\rangle=0,$$

$$\langle A^*x,y_i\rangle=\langle x,Ay_i\rangle=\langle x,t_iy_i\rangle=0.$$

由此可知 $\langle Ax,y\rangle=0$,$\langle A^*x,y\rangle=0$,这对任意的 $y\in Y$ 成立,从而有 $Ax\in Y^\perp$,$A^*x\in Y^\perp$,其中 $x\in Y^\perp$ 为任选的.

设 $H_1=Y^\perp$,则 A 和 A^* 将 H_1 映到 H_1. 设 B 和 C 分别为 A 和 A^* 在 H_1 上的限制,则 $B,C\in BL(H_1)$. 对 $x,y\in H_1$,

$$\langle Bx,y\rangle=\langle Ax,y\rangle=\langle x,A^*y\rangle=\langle x,Cy\rangle.$$

故有 $C=B^*$. 若 A 为自伴的,则 B 为自伴的,若 A 为正规的,则 B 也为正规的. 假设 $H_1\neq$

$\{0\}$，我们已证 A 有特征值，在这个结果中将 A 换为 B，H 换为 H_1，则可知 B 有特征值存在. 若 k 为 B 的特征值，则 $Ax=Bx=kx$ 对 H_1 中某元 x 成立，$x\neq 0$，因此 k 也必为 A 的特征值. 从而 $k=t_i$ 且 $x\in Y_i\subset Y$. 这是不可能的. 因为 $x\in H_1=Y^{\perp}$ 且 $x\neq 0$. 这就证明了 $Y^{\perp}=H_1=\{0\}$，因而有 $Y=H$.

我们已证任取 $x\in H$ 可以表示为

$$x = y_1 + y_2 + \cdots + y_m, \quad y_i \in Y_i.$$

由于 $Ay_i=t_iy_i$，故

$$Ax = t_1y_1 + t_2y_2 + \cdots + t_my_m. \qquad \blacksquare$$

问题 7.1.20 设 A 为有限维复 Hilbert 空间，A 为 H 上的正规算子，求证：$A^*=p(A)$，其中 p 为某一复系数多项式. 由此推出若算子 B 与 A 可交换，则 B 也与 A^* 可交换.

解答 由问题 7.1.19，存在 H 两两正交的子空间 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 使得每一 $x\in H$ 可以写成

$$x = y_1 + y_2 + \cdots + y_m, \quad y_i \in Y_i, \tag{37}$$

且存在纯量 $t_1,t_2,\cdots,t_m$ 使得

$$A(x) = t_1y_1 + t_2y_2 + \cdots + t_my_m. \tag{38}$$

由于 Y_i 为两两正交的，故(37)式中 x 的表示是唯一的. 由(38)式知

$$Ay_i = t_iy_i, \quad i = 1,2,\cdots,m. \tag{39}$$

利用问题 7.1.2(a)有

$$A^*y_i = \bar{t}_iy_i, \quad i = 1,2,\cdots,m. \tag{40}$$

重复利用(39)式有

$$A^ry_i = t_i^ry_i, \quad i = 1,2,\cdots,m, \quad r \geqslant 1.$$

由此知若 $p(t)$ 为任意关于 t 的多项式，则有

$$p(A)y_i = p(t_i)y_i, \quad i = 1,2,\cdots,m. \tag{41}$$

设

$$p(t) = \sum_{j=1}^{m} l_j(t)\,\bar{t}_j,$$

其中

$$l_j(t) = \prod_{i\neq j} \frac{t-t_i}{t_j-t_i}.$$

这是 **Lagrange 插值多项式**. 我们有

$$l_j(t_i) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

因此有 $p(t_i)=\bar{t}_i$. 在(41)式中取这个多项式则由(40)式有

$$p(A)y_i = \bar{t}_iy_i = A^*y_i.$$

从而由(37)式知

$$p(A)x=\sum_{i=1}^{m}p(A)y_i=\sum_{i=1}^{m}A^*(y_i)=A^*(x).$$

上式对任意的 $x\in H$ 成立，故有 $p(A)=A^*$.

最后，若 $AB=BA$，则 $A^rB=BA^r$，$r=0,1,2,\cdots$，因此 $p(A)B=Bp(A)$，即 $A^*B=BA^*$ ■

7.2 紧自伴算子及谱定理

设 H 为 Hilbert 空间，我们称线性算子 $A:H\to H$ 为**紧的**或**全连续的**，若任取 $\{x_n\}$ 为 H 中有界列，序列 $\{Ax_n\}$ 在 H 中均有收敛子列.

若 $\{A_n\}$ 为一列 H 上的紧算子且在 $BL(H)$ 中 $A_n\to A$，则 A 为紧算子. 若 $A\in BL(H)$ 且 A 的值域为有限维的，则 A 为紧算子.

对于 Hilbert 空间 H 上的非零紧自伴算子 A，我们有下述定理：存在有限或无限序列 $\{\lambda_n\}$，每一 λ_n 为非零实数，$|\lambda_1|\geqslant|\lambda_2|\geqslant\cdots$，存在与之对应的 H 的有限或无限标准正交序列 $\{u_n\}$，使得

$$A(x)=\sum_{n\geqslant 1}\lambda_n\langle x,u_n\rangle u_n,\quad x\in H.$$

进一步地，

(i) 若 $\{\lambda_n\}$ 为无穷序列，则 $\lambda_n\to 0$.

(ii) $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ 为 A 的所有非零特征值

(iii) u_n 是与 λ_n 相对应的特征向量.

设 $k(s,t)$ 为 $[0,1]\times[0,1]$ 上的平方可积函数. 若 $x\in L^2[0,1]$，设

$$A(x)(s)=\int_0^1 k(s,t)x(t)\mathrm{d}t,\quad 0\leqslant s\leqslant 1.$$

在问题 4.1.16 中我们证明了 A 为 $H=L^2[0,1]$ 上的紧算子. 由问题 6.2.20，A 为自伴的若 $k(s,t)=\overline{k(t,s)}$.

算子 $P\in BL(H)$ 为 H 上的**正交投影**或**投影**，若(i)它为幂等的，即 $P^2=P$，且(ii)它的零空间 $Z(P)$ 与其值域 $R(P)$ 正交.

若 A 为 Hilbert 空间 H 上的非零紧自伴算子，$t_1,t_2,\cdots$ 为 A 所有不同的特征值，$|t_1|\geqslant|t_2|\geqslant\cdots$. 设 $t_0=0$，P_j 为正交投影使得其值域 $R(P_j)$ 为 t_j 的特征空间 $Z(A-t_jI)$，$j=0,1,2,\cdots$. 则

$$x=\sum_{n\geqslant 0}P_nx,\quad x\in H. \tag{1}$$

对任意的 $x\in H$，上述和式在 H 中存在，且

$$A=\sum_{n\geqslant 1}t_nP_n, \tag{2}$$

其中的和式在 $BL(H)$ 中存在. 进一步地，对 $j\geqslant 1$，$R(P_j)$ 为有限维的，且若 $i\neq j$，$P_iP_j=0$.

这个结果被称为**谱定理**，它给出了 A 的谱分解. 若在(2)式中和式为有限和，则它等价于

$$A(x)=\sum_{n\geqslant 1}t_nP_n(x),\quad x\in H. \tag{3}$$

若(2)式中的和式为无穷和，则(2)式和(3)式是不同的. 一般地由(2)式可以推出(3)式，这是由于若在 $BL(H)$ 中 $A_n\to A$，则

$$\|A_n(x)-A(x)\|\leqslant\|A_n-A\|\,\|x\|,\quad x\in H.$$

在问题 7.1.19 中，我们已经证明了这个结果的有限维形式. 在这种情形下，我们甚至在假设 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ 时对正规算子证明了这个结果.

练习

1. 设 $H=\mathbb{R}^2$，$A\in BL(H)$ 由矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}$ 表示. 找出相互正交的子空间 Y_1，Y_2，及纯量 t_1，t_2 使得

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2,\quad \boldsymbol{y}_i\in Y_i,\quad A\boldsymbol{x}=t_1\boldsymbol{y}_1+t_2\boldsymbol{y}_2.$$

2. 设 $H=\mathbb{R}^2$，$A\in BL(H)$ 由矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}2&1\\1&0\end{bmatrix}$ 表示. 找出相互正交的子空间 Y_1 和 Y_2，纯量 t_1，t_2 使得

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2,\quad \boldsymbol{y}_i\in Y_i,\quad A\boldsymbol{x}=t_1\boldsymbol{y}_1+t_2\boldsymbol{y}_2.$$

3. 设 $H=\mathbb{R}^2$，$A\in BL(H)$ 由矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}2&1\\1&0\end{bmatrix}$ 表示，找出纯量 t_1，t_2，及正交投影 P_1，P_2 使得

$$\boldsymbol{x}=P_1\boldsymbol{x}+P_2\boldsymbol{x},\quad A\boldsymbol{x}=t_1P_1\boldsymbol{x}+t_2P_2\boldsymbol{x}$$

对 $\boldsymbol{x}\in H$ 成立.

4. 设 $H=\mathbb{R}^3$，$A\in BL(H)$ 由矩阵

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

表示. 找出纯量 t_1，t_2，t_3，及正交投影 P_1，P_2，P_3 使得

$$\boldsymbol{x}=P_1\boldsymbol{x}+P_2\boldsymbol{x}+P_3\boldsymbol{x},\quad A\boldsymbol{x}=t_1P_1\boldsymbol{x}+t_2P_2\boldsymbol{x}+t_3P_3\boldsymbol{x}$$

对 $\boldsymbol{x}\in H$ 成立.

5. 设 $H=\mathbb{R}^3$，$A\in BL(H)$ 由矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$ 表示. 找出纯量 t_1，t_2，t_3，及正交投影

P_1, P_2, P_3 使得

$$x = P_1x + P_2x + P_3x, \quad Ax = t_1P_1x + t_2P_2x + t_3P_3x$$

对 $x \in H$ 成立.

6. 设 $H=\mathbb{C}^3$, $A \in BL(H)$ 由矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ 表示. 找出纯量 t_1, t_2, t_3 及正交投影 P_1, P_2, P_3 使得

$$x = P_1x + P_2x + P_3x, \quad Ax = t_1P_1x + t_2P_2x + t_3P_3x$$

对 $x \in H$ 成立.

问题

问题 7.2.1 设 H 为 Hilbert 空间, $A \in BL(H)$. 求证:

(a) A 为紧算子当且仅当 A^*A 为紧算子.

(b) 若 A 为紧的, 则 A^* 为紧的.

解答 (a) 设 A 为紧的, 设 $\{x_n\}$ 为 H 中的有界列, $y_n = A(x_n)$, $z_n = A^*A(x_n) = A^*(y_n)$. 则 $\{y_n\}$ 有子列 $\{y_{n_j}\}$ 收敛到 H 中某元 y. 从而

$$z_{n_j} = A^*(y_{n_j}) \to A^*(y).$$

这说明 $\{z_{n_j}\}$ 为 $\{A^*A(x_n)\}$ 的收敛子列. 这就证明了 A^*A 为紧的.

反之, 设 A^*A 为紧的, 若 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 如上, 则 $\{z_n\}$ 有一收敛子列 $\{z_{n_j}\}$. 假设任取 n 有 $\|x_n\| \leqslant \alpha$, 则对所有的 n, m 有

$$\begin{aligned} \langle y_n - y_m, y_n - y_m \rangle &= \langle A(x_n - x_m), A(x_n - x_m) \rangle \\ &= \langle x_n - x_m, A^*A(x_n - x_m) \rangle \\ &= \langle x_n - x_m, z_n - z_m \rangle. \end{aligned}$$

因此有

$$\|y_n - y_m\|^2 \leqslant \|x_n - x_m\| \, \|z_n - z_m\| \leqslant 2\alpha \|z_n - z_m\|.$$

由于 $\{z_{n_j}\}$ 为柯西列, 由上式知 $\{y_{n_j}\}$ 也为柯西列. 因此 $\{y_{n_j}\}$ 在 H 中收敛. 这说明 A 为紧的.

(b) 若 A 为紧的, 设 $\{x_n\}$ 为 H 的有界列, $y_n = A^*(x_n)$. 则 $\{y_n\}$ 为有界列, 这是由于 A^* 为有界的. 因此 $\{Ay_n\}$ 有一收敛子列 $\{Ay_{n_j}\}$, 即 $\{AA^*x_n\}$ 有一收敛子列 $\{AA^*x_{n_j}\}$. 这就证明了 AA^* 为紧的. 但 $AA^* = (A^*)^*A^*$, 故由(a)知 A^* 为紧的. ■

问题 7.2.2 设 H 为复 Hilbert 空间, A 为 H 上的紧正规算子. 求证: 存在 $x \in H$ 使得

$$\langle Ax, x \rangle = \|A\|, \quad \|x\| = 1.$$

解答 我们知道 Banach 空间上有界算子 A 的谱 $\sigma(A)$ 为数域 $\mathbb{K}$ 的紧子集. 由于 $|k|$ 为 k 的连续函数, 所以

$$\sup\{|k| : k \in \sigma(A)\} = |\lambda|$$

对某个 $\lambda\in\sigma(A)$ 成立，即有 $r_\sigma(A)=|\lambda|$. 由于 H 为复 Hilbert 空间，故谱半径公式

$$\lim_{n\to\infty}\|A^n\|^{1/n}=r_\sigma(A)$$

成立. 由于 A 为正规的，从而 $\|A^2\|=\|A\|^2$. 由于 $A^2,A^4,\cdots$ 也为正规的，所以

$$\|A^n\|=\|A\|^n,\quad n=2^j,\quad j=1,2,\cdots.$$

因此对这样的 n 有 $\|A^n\|^{1/n}=\|A\|$. 对这样的 n 令 $n\to\infty$ 则可以得到 $r_\sigma(A)=\|A\|$. 因此存在 $\lambda\in\sigma(A)$ 使得 $|\lambda|=\|A\|$. 若 $\lambda=0$，则 $A=0$，则要证的结论显然成立. 下设 $\lambda\neq0$.

由问题 7.1.2(b)知 λ 为 A 的近似特征值. 因此存在 $\{x_n\}$，$\|x_n\|=1$，$\|Ax_n-\lambda x_n\|\to0$. 由于 A 为紧算子，$\{Ax_n\}$ 有一收敛子列 $\{Ax_{n_j}\}$. 若 $Ax_{n_j}\to y$，则

$$\lambda x_{n_j}=(\lambda x_{n_j}-Ax_{n_j})+Ax_{n_j}\to y. \tag{4}$$

从而 $\lambda x_{n_j}=A(\lambda x_{n_j})\to Ay$. 因此有 $\lambda y=Ay$. 又由于 $\|\lambda x_{n_j}\|=|\lambda|$ 对所有 j 成立，由(4)式知 $\|y\|=|\lambda|\neq0$. 因此 λ 为 A 的特征值. 所以存在 $x\in H$，$\|x\|=1$，$Ax=\lambda x$. 对这个 x 有

$$|\langle Ax,x\rangle|=|\langle\lambda x,x\rangle|=|\lambda|=\|A\|.$$ ■

问题 7.2.3 设 H 为 Hilbert 空间，$S,T\in BL(H)$. 若 T 为紧的且

$$\text{(i) } S^*S\leqslant T^*T \quad\text{或}\quad \text{(ii) } SS^*\leqslant TT^*,$$

求证：S 为紧算子.

解答 记号 $A\leqslant B$ 的意思是 A,B 为自伴的且对所有 $x\in H$ 有 $\langle Ax,x\rangle\leqslant\langle Bx,x\rangle$. 现假设 $S^*S\leqslant T^*T$，$\{x_n\}$ 为 H 中一有界列. 则对 $x\in H$ 有

$$\langle Sx,Sx\rangle=\langle S^*Sx,x\rangle\leqslant\langle T^*Tx,x\rangle=\langle Tx,Tx\rangle,$$

$$\|Sx\|^2\leqslant\|Tx\|^2.$$

因此对所有 n,m 有

$$\|S(x_n-x_m)\|\leqslant\|T(x_n-x_m)\|. \tag{5}$$

由于 T 为紧算子，$\{Tx_n\}$ 有收敛子列 $\{Tx_{n_j}\}$. 这由(5)式可以推出 $\{Sx_{n_j}\}$ 为 H 的柯西列，因而必收敛. 这就证明了若(i)成立则 S 为紧算子.

现设(ii)成立. 由问题 7.2.1(b)知 T^* 为紧的，由已证的第一种情形知 S^* 必为紧算子，因此 S 也必为紧算子. ■

问题 7.2.4 设 A 为 Hilbert 空间 H 上的紧算子，$\{u_n\}$ 为 H 的无穷标准正交序列，求证：在 H 中有 $Au_n\to0$.

解答 假设 $\{Au_n\}$ 不收敛到 0. 则存在 $\varepsilon>0$，及子列 $\{Au_{n_r}\}$ 使得任取 r 有 $\|Au_{n_r}\|\geqslant\varepsilon$. 设 $v_r=u_{n_r}$. 由于 $\|v_r\|=1$ 且 A 为紧算子，$\{Av_r\}$ 有收敛子列 $\{Av_{r_i}\}$. 设 $w_i=v_{r_i}$ 且 $A(w_i)\to x$，则

$$\langle A(w_i),y\rangle\to\langle x,y\rangle,\quad y\in H.$$

但由 Bessel 不等式

$$\sum_i|\langle Aw_i,y\rangle|^2=\sum_i|\langle w_i,A^*y\rangle|^2\leqslant\|A^*y\|^2.$$

由于 $\|A^*y\|<\infty$，故当 $i\to\infty$ 时有 $\langle Aw_i,y\rangle\to0$. 因此对任意的 $y\in H$ 有 $\langle x,y\rangle=0$. 所以

$x=0$. 这说明 $A(w_i)\to 0$. 这与

$$\| Aw_i \| = \| Av_{r_i} \| \geqslant \varepsilon, \quad i=1,2,\cdots$$

矛盾. 因此我们有 $Au_n\to 0$. ■

问题 7.2.5 设 A 为 Hilbert 空间 H 上的紧算子，$\delta>0$. 求证：

(a) 设 M 为 H 的线性无关子集，且 M 中元都是满足 $|k|>\delta$ 的特征值 k 所对应的特征向量. 则 M 必为有限集.

(b) 若 k 为 A 的非零特征值，则其对应的特征空间必为有限维的.

(c) A 仅有可数个不同的特征值.

解答 (a) 假设 M 为无穷集，则存在 $|k_n|>\delta$，存在对应于 k_n 的特征向量 x_n，使得 $\{x_n\}$ 为线性无关的. 设 $\{u_n\}$ 是从 $\{x_n\}$ 出发由 Gram-Schmiat 标准正交化方法得到的 H 的标准正交序列. 令

$$F_n = \operatorname{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\} = \operatorname{span}(u_1,u_2,\cdots,u_n).$$

若 $x=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$ 为 F_n 中任意一元，则

$$A(x) = \sum_{j=1}^{n} c_jA(x_j) = \sum_{j=1}^{n} c_jk_jx_j \in F_n,$$

$$A(x)-k_nx = \sum_{j=1}^{n} c_j(k_j-k_n)x_j = \sum_{j=1}^{n-1} c_j(k_j-k_n)x_j \in F_{n-1}.$$

若 $n>m$，$y=A(u_n)-k_nu_n-A(u_m)$. 由于 $u_m\in F_m\subset F_{n-1}$，我们有

$$A(u_m)\in F_{n-1}, \quad A(u_n)-k_nu_n\in F_{n-1},$$

因此 $y\in F_{n-1}$. 从而有 $\langle y,k_nu_n\rangle=0$，所以

$$\| Au_n-Au_m \|^2 = \| y+k_nu_n \|^2 = \| y \|^2 + \| k_nu_n \|^2 \geqslant |k_n|^2 > \delta^2.$$

因此只要 $n>m$ 就有 $\| Au_n-Au_m \|>\delta$，这说明 $\{Au_n\}$ 不可能有收敛子列. 由于 $\{u_n\}$ 为有界序列，这就与 A 的紧性矛盾. 因此(a)成立.

(b) 若 k 为 A 的非零特征值，其对应的特征空间为无穷维的，则这个特征空间必包含有无穷多个线性无关的向量. 若取定 $\delta>0$ 使得 $\delta<|k|$，则这与(a)矛盾.

(c) 假设 A 有无穷多个不同特征值 $k_1,k_2,\cdots$，使得 $|k_n|>\delta$. 设 $Ax_n=k_nx_n$，$x_n\neq 0$. 易证对应于不同特征值的特征向量为线性无关的，故上述假设与(a)矛盾. 因此对 $m=1,2,\cdots$

$$E_m = \left\{k\in\sigma_e(A):\ |k|>\frac{1}{m}\right\}$$

为有限集. 由于

$$\sigma_e(A)\subset\{0\}\cup\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}E_m\right),$$

所以 $\sigma_e(A)$ 为可数的. ■

问题 7.2.6 设 H 为 Hilbert 空间，A 为 H 上的非零紧算子. 求证：

(a) 若 A 为正规的，则 A 的每个非零谱值都为特征值.

(b) 若 A 为自伴的，则 $\| A \|$ 或 $-\| A \|$ 为 A 的特征值.

(c) 若 A 不为自伴的,则有可能对任意 A 的谱值 λ 有 $|\lambda|<\|A\|$.

(d) 若 A 为自伴的,则 A 的非零特征值可以排列为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$,使得

$$\|A\| = |\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \cdots.$$

解答 (a) 设 $A\in BL(H)$ 为紧的且为正规的,λ 为 A 的某个非零谱值. 则由问题 7.1.2(b) 知 λ 为 A 的近似谱值. 因此存在 $\{x_n\}$ 使得任取 $n\geqslant 1$ 有 $\|x_n\|=1$ 且 $\|Ax_n-\lambda x_n\|\to 0$. 利用与问题 7.2.2 解答最后一部分相同的方法,我们可以证明 λ 为 A 的特征值.

(b) 设 $A\in BL(H)$ 为非零紧自伴的. 则 A 的数值域 $W(A)$ 的界 m_A,M_A 都为 A 的谱值,且

$$\|A\| = \max\{|m_A|,|M_A|\}.$$

因此存在 A 的谱值 λ(λ 可能是 m_A 或 M_A),使得 $|\lambda|=\|A\|\neq 0$. 又由于 A 的谱值均为实数,故 $\lambda=\|A\|$ 或 $\lambda=-\|A\|$. 再利用(a)知 λ 为 A 的特征值. 这就完成了(b)的证明.

(c) 设 $H=\mathbb{R}^2$,$A\in BL(H)$ 由矩阵

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

表示. 利用问题 1.2.13 有 $\|A\|=(1/2)(\sqrt{10}+\sqrt{2})$. A 的特征值就是 $\boldsymbol{M}$ 的特征多项式的根,故 A 的特征值为 2 和 1. 对这个非自伴紧算子 A,任取 A 的特征值 λ 有 $|\lambda|<\|A\|$.

(d) 利用与问题 7.2.5(c)解答相同的方法,可以证明对任意 $\delta>0$,仅存在有限个 A 的特征值 k 使得 $|k|>\delta$. 因此 A 的所有非零特征值可以排列为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$,使得 $|\lambda_1|\geqslant|\lambda_2|\geqslant\cdots$. 由于

$$\sigma(A)\subset\overline{W(A)}=[m_A,M_A]$$

且 $\|A\|=\max\{|m_A|,|M_A|\}$,所以任取 n 有 $|\lambda_n|\leqslant\|A\|$. 又由(b)知存在 A 的特征值 λ_1 使得 $|\lambda_1|=\|A\|$. 这就证明了(d). ■

问题 7.2.7 设 A 为 Hilbert 空间 H 上的非零紧算子. 求证:存在有限或无限单调下降的正数列 $\{\alpha_n\}$,存在 H 的标准正交序列 $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 使得

$$A(x)=\sum_{n\geqslant 1}\alpha_n\langle x,u_n\rangle v_n,\quad x\in H, \tag{6}$$

$$A^*(x)=\sum_{n\geqslant 1}\alpha_n\langle x,v_n\rangle u_n,\quad x\in H. \tag{7}$$

解答 由于 A 为紧的,故 A^*A 为紧自伴正算子. 所以 A^*A 的非零特征值都为正的,故可以写为 $\alpha_1^2,\alpha_2^2,\cdots$,其中任取 n 有 $\alpha_n\geqslant\alpha_{n+1}>0$,且若 $\{\alpha_n\}$ 为无穷序列,则 $\alpha_n\to 0$. 因此由本节开始时给出的定理,我们有

$$A^*A(x)=\sum\alpha_n^2\langle x,u_n\rangle u_n,\quad x\in H, \tag{8}$$

其中 $\{u_n\}$ 为对应于 $\{\alpha_n^2\}$ 的特征向量,且 $\{u_n\}$ 为标准正交的. 令 $v_n=A(u_n/\alpha_n)$,

$$A_m(x)=\sum_{n=1}^{m}\alpha_n\langle x,u_n\rangle v_n,\quad x\in H, \tag{9}$$

$B_m=A-A_m$. 则 $A(u_n)=\alpha_n v_n$ 且

$$\alpha_j\alpha_n\langle v_j,v_n\rangle=\langle Au_j,Au_n\rangle=\langle u_j,A^*Au_n\rangle=\langle u_j,\alpha_n^2u_n\rangle,$$

$$\alpha_j\langle v_j,v_n\rangle=\alpha_n\langle u_j,u_n\rangle.$$

从而$\{v_n\}$为 H 的标准正交序列. 进一步地由(8)式得

$$\alpha_n\langle Ax,v_n\rangle=\langle Ax,Au_n\rangle=\langle A^*Ax,u_n\rangle=\alpha_n^2\langle x,u_n\rangle.$$

由(9)式有

$$\alpha_n\langle x,u_n\rangle=\langle A_mx,v_n\rangle,\quad n\leqslant m.$$

因此

$$\langle B_mx,v_n\rangle=\langle Ax-A_mx,v_n\rangle=\langle Ax,v_n\rangle-\langle A_mx,v_n\rangle=0$$

对 $1\leqslant n\leqslant m$ 成立,且

$$\langle x,A^*v_n\rangle=\langle Ax,v_n\rangle=\langle x,\alpha_nu_n\rangle$$

对 $n\geqslant1$ 成立. 由于这对任取的 $x\in H$ 均成立,故有 $A^*(v_n)=\alpha_nu_n$, $n\geqslant1$. 因此若 $x,y\in H$,则

$$\langle A_m^*B_mx,y\rangle=\langle B_mx,A_my\rangle=\left\langle B_mx,\sum_{n=1}^{m}\alpha_n(y,u_n)v_n\right\rangle=0.$$

由此推知任取 $x\in H$ 有 $A_m^*B_mx=0$. 所以

$$B_m^*B_m(x)=(A^*-A_m^*)B_m(x)=A^*B_m(x)$$

$$=A^*A(x)-A^*A_m(x)$$

$$=\sum_{n\geqslant1}\alpha_n^2\langle x,u_n\rangle u_n-\sum_{n=1}^{m}\alpha_n(x,u_n)\alpha_nu_n.\tag{10}$$

由于若 $n>m$ 有 $\alpha_n\leqslant\alpha_m$, $\{u_n\}$为标准正交的,故

$$\|B_m^*B_m(x)\|^2=\left\|\sum_{n>m}\alpha_n^2\langle x,u_n\rangle u_n\right\|^2=\sum_{n>m}\alpha_n^4|\langle x,u_n\rangle|^2\leqslant\alpha_{m+1}^4\|x\|^4.$$

在上式中我们用到了 Bessel 不等式. 因此

$$\langle B_mx,B_mx\rangle=\langle B_m^*B_mx,x\rangle\leqslant\|B_m^*B_m(x)\|\,\|x\|\leqslant\alpha_{m+1}^2\|x\|^2,$$

$$\|B_m(x)\|\leqslant\alpha_{m+1}\|x\|,\quad x\in H.$$

若$\{\alpha_n\}$为无穷列,则当 $m\to\infty$有 $\alpha_{m+1}\to0$,因此

$$\|A(x)-A_m(x)\|=\|B_m(x)\|\to0.$$

这就证明了(6)式. 若$\{\alpha_n\}$仅包含有限个元 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_N$,则我们仅对 $1\leqslant m\leqslant N$ 定义 A_m 和 B_m,在这种情形下,在(10)式中取 $m=N$ 得 $B_N^*B_N(x)=0$. 因此如上面的证明一样,对任意 $x\in H$ 有$\langle B_N(x),B_N(x)\rangle=\langle B_N^*B_Nx,x\rangle=0$. 这说明 $A(x)=A_N(x)$. 因此在这种情形(6)式也成立.

为证(7)式,我们注意到对 $x,y\in H$ 有

$$\langle x,A^*y\rangle=\langle Ax,y\rangle=\left\langle\sum\alpha_n\langle x,u_n\rangle v_n,y\right\rangle$$

$$= \sum \alpha_n \langle x, u_n \rangle \langle v_n, y \rangle = \left\langle x, \sum \alpha_n \langle y, v_n \rangle u_n \right\rangle.$$

因此

$$A^*(y) = \sum \alpha_n \langle y, v_n \rangle u_n, \quad y \in H.$$

这就证明了(7)式. ■

问题 7.2.8 设$\{u_\alpha : \alpha \in L\}$为 Hilbert 空间 H 的标准正交基. 设 $A \in BL(H)$使得

$$\sum_{\alpha \in L} \| A(u_\alpha) \|^2 < \infty. \tag{11}$$

求证:

(a) $\sum_{\alpha \in L} \| A^*(u_\alpha) \|^2 = \sum_{\alpha \in L} \| A(u_\alpha) \|^2$.

(b) 若$\{v_i : i \in J\}$为 H 的另一标准正交基,则

$$\sum_{i \in J} \| A(v_i) \|^2 = \sum_{\alpha \in L} \| A(u_\alpha) \|^2.$$

(c) A 为紧算子.

[使(11)成立的算子称为 **Hilbert-Schmidt 算子**.]

解答 (a) 若(11)式成立,则和式中仅有可数项不为 0. 对每一 $\beta \in L$,对 $A^*(u_\beta)$利用 Parseval 公式则有

$$\| A^* u_\beta \|^2 = \sum_\alpha | \langle A^* u_\beta, u_\alpha \rangle |^2 = \sum_\alpha | \langle u_\beta, A u_\alpha \rangle |^2.$$

因此对 $A(u_\alpha)$利用 Parseval 公式有

$$\begin{aligned} \sum_{\beta \in L} \| A^* u_\beta \|^2 &= \sum_\beta \sum_\alpha | \langle u_\beta, A u_\alpha \rangle |^2 \\ &= \sum_\alpha \sum_\beta | \langle A u_\alpha, u_\beta \rangle |^2 = \sum_\alpha \| A u_\alpha \|^2. \end{aligned}$$

在上述运算中,由于和式中每一项都为非负的,故交换求和顺序是允许的.

(b) 和(a)中一样,我们有

$$\begin{aligned} \sum_{i \in J} \| A v_i \|^2 &= \sum_i \sum_\alpha | \langle A v_i, u_\alpha \rangle |^2 = \sum_i \sum_\alpha | \langle v_i, A^* u_\alpha \rangle |^2 \\ &= \sum_\alpha \sum_i | \langle A^* u_\alpha, v_i \rangle |^2 = \sum_\alpha \| A^* u_\alpha \|^2 \\ &= \sum_\alpha \| A u_\alpha \|^2, \end{aligned}$$

其中在最后一个等式中我们用到了(a),而在前一个等式则用到了 Parseval 公式及$\{v_i\}$为标准正交基这个假设.

(c) 由于

$$\sum_\alpha \| A^* u_\alpha \|^2 = \sum_\alpha \| A u_\alpha \|^2 < \infty.$$

所以 $E = \{u_\alpha : A^*(u_\alpha) \neq 0\}$为可数集. 设 $E = \{w_n\}$,则对 $x \in H$ 有

$$A(x)=\sum_{\alpha}\langle Ax,u_\alpha\rangle u_\alpha=\sum_{\alpha}\langle x,Au_\alpha\rangle u_\alpha=\sum_{n\geqslant 1}\langle x,A^*w_n\rangle w_n. \tag{12}$$

若 E 仅有有限个元，则 A 的值域 $R(A)$ 为 span$E$，因此为有限维空间，所以在这种情形 A 为紧的.

若 E 为无穷集，对 $m=1,2,\cdots$，令

$$A_m(x)=\sum_{n=1}^{m}\langle x,A^*w_n\rangle w_n,\quad x\in H, \tag{13}$$

$B_m=A-A_m$. 由于 A_m 的值域为有限维空间，故 A_m 为紧算子. 由 $\{w_n\}$ 的标准正交性，再利用(12)式和(13)式有

$$\|B_m(x)\|^2=\left\|\sum_{n=m+1}^{\infty}\langle x,A^*w_n\rangle w_n\right\|^2=\sum_{n=m+1}^{\infty}\|\langle x,A^*w_n\rangle w_n\|^2$$

$$=\sum_{n=m+1}^{\infty}|\langle x,A^*w_n\rangle|^2\leqslant\sum_{n=m+1}^{\infty}\|x\|^2\|A^*w_n\|^2.$$

上式对任取的 $x\in H$ 成立，故

$$\|B_m\|\leqslant\left(\sum_{n=m+1}^{\infty}\|A^*w_n\|^2\right)^{1/2}.$$

上式当 $m\to\infty$ 收敛到 0，所以 $A_m\to A$. 因此 A 为紧算子. ■

问题 7.2.9 设 H 为无穷维 Hilbert 空间，$\{u_n\}$ 为 H 的标准正交基，$\{v_n\}$ 为 H 的某一标准正交序列，$\{k_n\}$ 为一纯量列. 求证：

(a) 若 $\{k_n\}$ 为有界的，则

$$A(x)=\sum_{n=1}^{\infty}k_n\langle x,u_n\rangle v_n,\quad x\in H$$

定义了 $BL(H)$ 中一元.

(b) A 为紧的当且仅当 $k_n\to 0$.

(c) A 为 Hilbert-Schmidt 算子当且仅当 $\sum_n|k_n|^2<\infty$.

解答 (a) 若 $|k_n|\leqslant\alpha$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}|k_n\langle x,u_n\rangle|^2\leqslant\alpha^2\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,u_n\rangle|^2=\alpha^2\|x\|^2.$$

再应用 Riesz-Fischer 定理就说明任取 $x\in H$，$A(x)\in H$ 存在. $\{v_n\}$ 的标准正交性给出

$$\|A(x)\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|k_n\langle x,u_n\rangle v_n\|^2\leqslant\alpha^2\|x\|^2.$$

由于 A 显然为线性的，故有 $A\in BL(H)$.

(b) 首先假设 $k_n\to 0$. 对 $m=1,2,\cdots$，令

$$\alpha_m=\sup_{n\geqslant m}|k_n|,\quad A_m(x)=\sum_{n=1}^{m}k_n\langle x,u_n\rangle v_n,\quad x\in H$$

且 $B_m=A-A_m$. 由于 A_m 的值域为有限维空间，所以 A_m 为紧算子. 进一步地

$$B_m(x)=\sum_{n=m+1}^{\infty}k_n\langle x,u_n\rangle v_n,\quad x\in H.$$

因为$\{v_n\}$为标准正交的，故

$$\|B_m(x)\|^2=\sum_{n=m+1}^{\infty}\|k_n\langle x,u_n\rangle v_n\|^2\leqslant\alpha_m^2\sum_{n=m+1}^{m}|\langle x,u_n\rangle|^2\leqslant\alpha_m^2\|x\|^2.$$

这可以推出当$m\to\infty$时，$\|B_m\|\leqslant\alpha_m\to0$. 因此$A_m\to A$，从而$A$为紧的.

若$\{k_n\}$不收敛到0，则存在$\varepsilon>0$，且$|k_n|\geqslant\varepsilon$对无穷多个$n$成立，设为$n_1,n_2,\cdots$. 由$A(x)$的定义知$A(u_m)=k_mv_m$对$m=1,2,\cdots$成立. 因此

$$\|A(u_{n_i})-A(u_{n_j})\|^2=\|k_{n_i}v_{n_i}-k_{n_j}v_{n_j}\|^2=|k_{n_i}|^2+|k_{n_j}|^2\geqslant2\varepsilon^2$$

对所有的$i\neq j$成立. 从而$\{A(u_{n_i})\}$不可能有柯西子列，因此也就没有收敛子列，所以由于$\{u_{n_i}\}$为有界列故A不为紧算子. 这就证明了(b).

(c) 由于$A(u_n)=k_nv_n$，故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|A(u_n)\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|k_nv_n\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|k_n|^2.$$

由于$\{u_n\}$为H的标准正交基，这就证明了(c). ■

问题 7.2.10 求证：问题6.1.1中给出的Jacobi矩阵相对于l^2的典范标准正交基表示一个l^2上的紧算子当且仅当$a_n\to0,b_n\to0$且$c_n\to0$.

解答 若算子A由矩阵

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}a_1&b_1&0&0&0&\cdots\\c_2&a_2&b_2&0&0&\cdots\\0&c_3&a_3&b_3&0&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\end{bmatrix}$$

表示且若e_n为l^2的第n个单位向量，则

$$A(e_n)=\sum_{i=1}^{\infty}\langle Ae_n,e_i\rangle e_i=\sum_{i=1}^{\infty}k_{in}e_i=b_{n-1}e_{n-1}+a_ne_n+c_{n+1}e_{n+1},$$

其中$b_0=0,c_0=0$. 因此

$$\|Ae_n\|^2=|b_{n-1}|^2+|a_n|^2+|c_{n+1}|^2.$$

若A为紧算子，则由问题7.2.4知$A(e_n)\to0$. 这就推出了$b_n\to0,a_n\to0$且$c_n\to0$.

反之，设$b_n\to0,a_n\to0$且$c_n\to0$，设

$$B(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_{n-1}\langle x,e_n\rangle e_{n-1},\quad x\in H,$$

$$C(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\langle x,e_n\rangle e_n,\quad x\in H,$$

$$D(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_{n+1}\langle x,e_n\rangle e_{n+1},\quad x\in H.$$

则由问题 7.2.9(b)知 B,C 和 D 为紧算子. 由问题 6.1.1 知 $\boldsymbol{M}$ 表示一个 $A\in BL(H)$. 进一步地

$$B(e_m)+C(e_m)+D(e_m)=b_{m-1}e_{m-1}+a_me_m+c_{m+1}e_{m+1}=A(e_m).$$

因此任取 $x\in H$ 有 $A(x)=B(x)+C(x)+D(x)$. 所以 A 为紧算子. ■

问题 7.2.11 设 $k(s,t)$为单位正方形$[0,1]\times[0,1]$上的纯量连续函数,k 不恒为 0,且任取 $s,t\in[0,1]$有 $k(s,t)=\overline{k(t,s)}$. 设 A 定义在 $L^2[0,1]$为

$$A(x)(s)=\int_0^1 k(s,t)x(t)\mathrm{d}t,\quad 0\leqslant s\leqslant 1,\quad x\in L^2[0,1].$$

求证:存在非零实序列$\{\lambda_n\}$,存在由$[0,1]$上的连续函数组成的标准正交序列$\{u_n\}$,使得对 $x\in L^2[0,1]$

$$A(x)(s)=\sum_{n\geqslant 1}\lambda_n\langle x,u_n\rangle u_n(s),$$

其中,若上述级数为无穷级数,则这个级数对 $0\leqslant s\leqslant 1$ 一致收敛. 证明 $\sum|\lambda_n|^2<\infty$.

解答 设 $H=L^2[0,1]$. 由问题 4.1.15 知 A 为 H 上的紧算子. 易知 A 不为 0,且由问题 6.2.20 知 A 为自伴的. 设$\{\lambda_n\}$为由 A 的所有非零特征值组成的有限或无穷序列,使得 $|\lambda_n|\geqslant|\lambda_{n+1}|$,设$\{v_n\}$为其对应的由特征向量组成的标准正交序列. 则

$$A(x)=\sum_{n\geqslant 1}\lambda_n\langle x,v_n\rangle v_n. \tag{14}$$

这里,和的收敛性及等式都是在 H 中考虑的.

由于 k 为连续的,故为$[0,1]\times[0,1]$上的一致连续函数. 对每一 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得若$|s_1-s_2|<\delta$,$0\leqslant t\leqslant 1$,则有

$$|k(s_1,t)-k(s_2,t)|<\varepsilon.$$

因此对 $x\in H$,若$|s_1-s_2|<\delta$,有

$$\begin{aligned}|Ax(s_1)-Ax(s_2)|&=\left|\int_0^1[k(s_1,t)-k(s_2,t)]x(t)\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\int_0^1|k(s_1,t)-k(s_2,t)||x(t)|\mathrm{d}t\\&\leqslant\left(\int_0^1\varepsilon^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_0^1|x(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}=\varepsilon\|x\|,\end{aligned}$$

这说明 Ax 为$[0,1]$上的连续函数,其中 $x\in H$ 为任取的.

若 $x\in H$,由于

$$\sum_n|\langle x,v_n\rangle|^2\leqslant\|x\|^2<\infty,$$

所以由 Riesz-Fischer 定理知

$$y=\sum_n\langle x,v_n\rangle v_n \tag{15}$$

在 H 中存在. 设

$$y_m = \sum_{n=1}^{m} \langle x, v_n \rangle v_n, \quad m = 1,2,\cdots. \tag{16}$$

我们首先考虑$\{v_n\}$为无穷序列情形. 此时在 H 中 $y_m \to y$. 设任取 $s,t \in [0,1]$有$|k(s,t)| \leqslant a$. 对 $0 \leqslant s \leqslant 1$ 有

$$\begin{aligned} |A(y_m)(s) - A(y)(s)| &\leqslant \int_0^1 |k(s,t)||y_m(t) - y(t)| \mathrm{d}t \\ &\leqslant \left(\int_0^1 |k(s,t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} \left(\int_0^1 |y_m(t) - y(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} \\ &\leqslant a \| y_m - y \|. \end{aligned}$$

这证明了当 $m \to \infty$时,对 $0 \leqslant s \leqslant 1$,$A(y_m)(s)$一致地收敛到 $A(y)(s)$.

由(14)式有 $A(v_n) = \lambda_n v_n$,因而由(14)式及(15)式有

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, v_n \rangle A(v_n) = A(y).$$

所以 $A(x) - A(y)$为 $L^2[0,1]$中的零元. 但 $A(x) - A(y) = A(x-y)$为$[0,1]$上的连续函数,因此它必在$[0,1]$上恒为 0,即任取 $0 \leqslant s \leqslant 1$ 有 $A(x)(s) = A(y)(s)$. 所以当 $m \to \infty$时,对 $0 \leqslant s \leqslant 1$,$A(y_m)(s)$一致地收敛到 $A(y)(s)$.

设 $u_n = (1/\lambda_n)A(v_n)$,则 u_n 为$[0,1]$上的连续函数. 由于 $A(v_n) = \lambda_n v_n$,所以 u_n 和 v_n 在 H 中表示同一元素. 因此$\{u_n\}$为 $L^2[0,1]$的标准正交序列且有$\langle x, v_n \rangle = \langle x, u_n \rangle$. 所以由(16)式有

$$A(y_m) = \sum_{n=1}^{m} \langle x, v_n \rangle A(v_n) = \sum_{n=1}^{m} \langle x, u_n \rangle \lambda_n u_n.$$

上述等式为 H 中的等式. 但第一项和最后一项为$[0,1]$上的连续函数,因此,正如上面的论证一样我们有

$$A(y_m)(s) = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n \langle x, u_n \rangle u_n(s).$$

所以当 $m \to \infty$

$$\sum_{n=1}^{m} \lambda_n \langle x, u_n \rangle u_n(s) \to A(x)(s),$$

且上面的收敛对 $0 \leqslant s \leqslant 1$ 是一致的.

若$\{v_n\}$仅有有限个元素,设为 $v_1, v_2, \cdots, v_N$. 若 $u_n = (1/\lambda_n)A(v_n)$,则(14)式变为

$$A(x) = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, v_n \rangle v_n = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, u_n \rangle u_n.$$

由此可以推出

$$A(x)(s) = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, u_n \rangle u_n(s).$$

现在还剩下要证明 $\sum |\lambda_n|^2 < \infty$. 对 $0 \leqslant s \leqslant 1$,令 $k_s(t) = k(s,t)$. 则$\overline{k}_s$ 在$[0,1]$上连

续，因此也在 $L^2[0,1]$ 中. 从而

$$A(v_n)(s)=\int_0^1 k(s,t)v_n(t)\mathrm{d}t=\langle v_n,\bar{k}_s\rangle.$$

所以由 Bessel 不等式

$$\sum_{n\geqslant 1}\|A(v_n)\|^2=\sum_{n\geqslant 1}\int_0^1|A(v_n)(s)|^2\mathrm{d}s=\int_0^1\sum_{n\geqslant 1}|A(v_n)(s)|^2\mathrm{d}s$$

$$=\sum_{n\geqslant 1}|\langle\bar{k}_s,v_n\rangle|^2\leqslant\int_0^1\|\bar{k}_s\|^2\mathrm{d}s.$$

若 $|k(s,t)|\leqslant\alpha$，则

$$\int_0^1\|\bar{k}_s\|^2\mathrm{d}s=\int_0^1\mathrm{d}s\int_0^1|\overline{k(s,t)}|^2\mathrm{d}t\leqslant\alpha^2.$$

由于 $A(v_n)=\lambda_n v_n$，故有

$$\sum_{n\geqslant 1}|\lambda_n|^2=\sum_{n\geqslant 1}\|A(v_n)\|^2\leqslant\alpha^2.$$ ■

问题 7.2.12 设 $z\in L^2(-\pi,\pi]$ 且延拓 z 为 $\mathbb{R}$ 上的周期为 2π 的函数. 若 $x\in L^2[-\pi,\pi]$，设

$$A(x)(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}z(s-t)x(t)\mathrm{d}t.$$

求证：

(a) 若 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{int}$ 为 z 的 Fourier 级数，则对 $x\in L^2[-\pi,\pi]$ 有

$$A(x)(s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\mathrm{e}^{-int}\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{ins},$$

这个级数在 $[-\pi,\pi]$ 上一致绝对收敛.

(b) A 为紧算子.

(c) A 的特征值由 z 的 Fourier 系数 c_n 给出，其对应的**特征函数**为 e^{ins}，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

解答 (a) 设 $u_n(t)=(2\pi)^{-1/2}\mathrm{e}^{int}$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 则 $\{u_n\}$ 为 $L^2[-\pi,\pi]$ 的标准正交基. 若 $s\in[-\pi,\pi]$，令 $z_s(t)=z(s-t)$. 则 $z_s\in L^2[-\pi,\pi]$，因此由问题 5.2.14(c) 给出的公式有

$$A(x)(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}z_s(t)x(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\langle x,\bar{z}_s\rangle=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\langle x,u_n\rangle\langle u_n,\bar{z}_s\rangle. \tag{17}$$

但

$$\langle u_n,\bar{z}_s\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}(2\pi)^{-1/2}\mathrm{e}^{int}z(s-t)\mathrm{d}t$$

$$=(2\pi)^{-1/2}\mathrm{e}^{ins}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-in(s-t)}z(s-t)\mathrm{d}t$$

$$=(2\pi)^{1/2}\mathrm{e}^{ins}c_n,$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} z(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t = (2\pi)^{-1/2}\langle z, u_n\rangle.$$

设

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t = (2\pi)^{-1/2}\langle x, u_n\rangle.$$

则(17)式变为

$$Ax(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,\hat{x}(n)\mathrm{e}^{ins} \tag{18}$$

对 $s\in[-\pi,\pi]$成立. 由于

$$|\,c_n\,\hat{x}(n)\mathrm{e}^{ins}\,| = |\,c_n\,||\,\hat{x}(n)\,|,$$

$$\begin{aligned}\sum |\,c_n\,||\,\hat{x}(n)\,| &= \frac{1}{2\pi}\sum |\,\langle z,u_n\rangle\,||\,\langle x,u_n\rangle\,| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\left(\sum |\,\langle z,u_n\rangle\,|^2\right)^{1/2}\left(\sum |\,\langle x,u_n\rangle\,|^2\right)^{1/2} \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\|z\|\,\|x\|,\end{aligned}$$

所以(18)式中的级数对 s 是一致绝对收敛的.

(b) 由于(18)式中的级数一致收敛,它也必在 $L^2[-\pi,\pi]$范数意义下收敛. 因此(18)式给出

$$A(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\langle x,u_n\rangle u_n, \quad x\in H. \tag{19}$$

上式为 H 中两个元素的等式. 由于 $\sum |\,c_n\,|^2<\infty$, 所以当 $n\to\infty$时,$c_n\to 0$. 由问题 7.2.9(b)知 A 为紧算子.

(c) 由问题 7.1.10 所得到的,我们知道若 A 由(19)式给出,则

$$\sigma_e(A) = \{c_n : n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}.$$

由(19)式还有 $A(u_n)=c_nu_n$. 所以 u_n 为对应于 c_n 的特征向量. 这就完成了证明. ■

问题 7.2.13 设 H 为 $L^2[0,1]$,$\mathbb{K}=\mathbb{R}$. $k(s,t)=\min\{s,t\}$,$0\leqslant s,t\leqslant 1$,且 $\mu\neq 0$. 求证:若 $\mu\neq\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2$,$n=1,2,\cdots$,则积分方程

$$x(s) - \mu\int_0^1 k(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t = y(s), \quad x,y\in H$$

有唯一的解. 在这种情况下求出这个解.

解答 对 $x\in H$,令 $k(s,t)=\min\{s,t\}$且

$$A(x)(s) = \int_0^1 k(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t, \quad 0\leqslant s\leqslant 1.$$

则 k 在$[0,1]\times[0,1]$上连续且 $k(s,t)=k(t,s)$,因此正如在问题 7.2.11 解答开始我们注意

到事实一样，A 必为紧自伴的.

若 $x\in H, y\in A(x)$，则

$$y(s)=\int_0^1 k(s,t)x(t)\mathrm{d}t=\int_0^s tx(t)\mathrm{d}t+s\int_s^1 x(t)\mathrm{d}t.$$

后两个积分是关于 s 的绝对连续函数. 因此 y 为绝对连续的，且对几乎所有的 s

$$y'(s)=sx(s)+s(-x(s))+\int_s^1 x(t)\mathrm{d}t=\int_s^1 x(t)\mathrm{d}t.$$

从而 y' 为绝对连续的且几乎处处有 $y''(s)=-x(s)$. 由于 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$，我们有

$$\langle Ax,x\rangle=\int_0^1 y(s)x(s)\mathrm{d}s=-\int_0^1 y(s)y''(s)\mathrm{d}s=-[y(s)y'(s)]_0^1+\int_0^1 y'(s)^2\mathrm{d}s.$$

因为 $y(0)=0=y'(1)$，故任取 $x\in H$ 有 $\langle Ax,x\rangle\geqslant 0$.

设 λ 为 A 的非零特征值，则由于 A 为正算子知 $\lambda>0$. 设 $A(x)=\lambda x, x\neq 0, y=A(x)$. 则 $y=-\lambda y''$. 这个微分方程的解为

$$y(s)=c_1\sin(\alpha s)+c_2\cos(\alpha s),$$

其中 $\alpha=\lambda^{-1/2}$. 由于 $y(0)=0=y'(1)$，故

$$c_2=0,\quad c_1\alpha\cos\alpha=0.$$

因此 $\alpha=\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi$ 且 $\lambda=\left(n-\frac{1}{2}\right)^{-2}\pi^{-2}$，$y(s)=c_1\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi s$. 对于 $n=1,2,\cdots$，令

$$\lambda_n=\left(n-\frac{1}{2}\right)^{-2}\pi^{-2},\quad u_n(s)=\sqrt{2}\sin\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi s\right).\tag{20}$$

则有 $\|u_n\|=1$，A 的非零特征值为所有的 λ_n，其对应的特征向量为 cu_n. 因此

$$A(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x,u_n)u_n,\quad x\in H,\tag{21}$$

其中 λ_n, u_n 由(20)式给出.

题设的积分方程可以化为 $x(s)-\mu A(x)(s)=y(s)$，即

$$Ax-\frac{1}{\mu}x=-\frac{1}{\mu}y,\quad x\in H.\tag{22}$$

由于 $\mu\neq\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2$，易见 $1/\mu$ 不为 A 的特征值. 又由于 A 为紧自伴的，所以它的非零谱值必为特征值，为证此事实，只需应用问题 7.2.2 解答中同样的方法. 因此 $1/\mu$ 不为 A 的谱值，这样 $B=(A-(1/\mu)I)^{-1}$ 必在 $BL(H)$ 中存在. 从而(22)有唯一的解 $x=-(1/\mu)B(y)$.

在问题 7.1.12(c)中取 $k=1/\mu, k_n=\lambda_n$，可得：若 A 由(21)式定义，则 $B=\left(A-\frac{1}{\mu}I\right)^{-1}$ 由下式给出

$$\frac{1}{\mu}B(x)=-x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu\lambda_n}{\mu\lambda_n-1}\langle x,u_n\rangle u_n,\quad x\in H.$$

因此(22)式的解为

$$x = -\frac{1}{\mu}B(y) = y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu\lambda_n}{1-\mu\lambda_n}\langle y, u_n\rangle u_n.$$

由(20)式知

$$\langle y, u_n\rangle u_n(s) = 2c_n \sin\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi s\right),$$

其中

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle y, u_n\rangle = \int_0^1 y(t)\sin\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi t\right)\mathrm{d}t. \tag{23}$$

因为

$$\frac{\mu\lambda_n}{1-\mu\lambda_n} = \frac{\mu}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 - \mu},$$

所以(22)式的解为

$$x(s) = y(s) + 2\mu\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 - \mu}\sin\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi s\right)$$

对几乎所有的 $0\leqslant s\leqslant 1$,其中 c_n 由(23)式给出. ■

问题 7.2.14 设 H 为 Hilbert 空间,$P\in BL(H)$. 求证:

(a) P 为正交投影当且仅当 $P=P^* P$.

(b) 每一正交投影都是自伴的

解答 若 P 为正交投影,对 $x\in H$ 有

$$P(x-Px) = Px - P^2x = Px - Px = 0,$$

因此 $x-Px\in Z(P)$. 由于 $Z(P)\perp R(P)$,故任取 $x,y\in H$

$$\langle x-Px, Py\rangle = 0, \quad \langle x, Py\rangle = \langle Px, Py\rangle.$$

变换 x,y 的角色则有

$$\langle y, Px\rangle = \langle Py, Px\rangle = \overline{\langle x, Py\rangle}.$$

因此

$$\langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle, \quad x,y\in H.$$

这就证明了 $P^* = P$,从而(b)成立. 进一步地有 $P^* P = P^2 = P$.

反之,若 $P=P^* P$,则 $P^* = (P^* P)^* = P^* P = P$ 且 $P = P^* P = P^2$. 所以 P 为自伴且为幂等的. 若 Px 为 $R(P)$ 中一元,$y\in Z(P)$,则

$$\langle Px, y\rangle = \langle x, P^* y\rangle = \langle x, Py\rangle = \langle x, 0\rangle = 0.$$

这证明了 $R(P)\perp Z(P)$. 因此 P 为正交投影. ■

问题 7.2.15 设 H 为 Hilbert 空间,$P\in BL(H)$. 求证:P 为正交投影当且仅当 P 为幂等的且 $\|P\|\leqslant 1$.

解答 设 P 为正交投影,则由问题 7.2.14 知 $P=P^* P$,且 P 为幂等的. 因此,若 $x\in H$

$$\langle Px,Px\rangle=\langle P^*Px,x\rangle=\langle Px,x\rangle,$$
$$\|Px\|^2=\langle Px,x\rangle\leqslant\|Px\|\,\|x\|,$$
$$\|Px\|\leqslant\|x\|.$$

所以有 $\|P\|\leqslant 1$.

反之,设 P 为幂等的且 $\|P\|\leqslant 1$. 设 $x\in H, y\in Z(P), y\neq 0$. 令

$$k=\frac{\langle Px,y\rangle}{\|y\|^2},\quad z=Px-ky.$$

则 $Pz=P^2x-kPy=Px$,这是由于 $Py=0$. 所以

$$\langle Px-ky,Px-ky\rangle=\langle Px,Px\rangle-\bar{k}\langle Px,y\rangle-k\langle y,Px\rangle+k\bar{k}\langle y,y\rangle$$
$$=\|Px\|^2-\bar{k}k\|y\|^2-k\bar{k}\|y\|^2+k\bar{k}\|y\|^2,$$
$$\|z\|^2=\langle Px-ky,Px-ky\rangle=\|Pz\|^2-|k|^2\|y\|^2.$$

但我们有 $\|Pz\|\leqslant\|P\|\,\|z\|\leqslant\|z\|$,故

$$|k|^2\|y\|^2=\|Pz\|^2-\|z\|^2\leqslant 0,$$

这就推出了 $k=0$,即有 $\langle Px,y\rangle=0$. 由于这当 $y=0$ 时显然成立,故任取 $x\in H, y\in Z(P)$ 有 $Px\perp y$. 因此 $R(P)\perp Z(P)$,即 P 为正交投影. ■

问题 7.2.16 设 H 为 Hilbert 空间,$P\in BL(H)$,

$$\langle Px,x\rangle=\|Px\|^2,\quad x\in H. \tag{24}$$

求证:若

(i) P 为自伴的或

(ii) 数域 $\mathbb{K}$ 为 $\mathbb{C}$,

则 P 为正交投影. 证明若 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$,则(24)一般推不出 P 为正交投影.

解答 设 $A=P^*P-P$,则由(24)式知

$$\langle P^*Px,x\rangle=\langle Px,Px\rangle=\langle Px,x\rangle,\quad x\in H,$$
$$\langle Ax,x\rangle=0,\quad x\in H. \tag{25}$$

若 P 为自伴,则 A 也必自伴. 由问题 6.2.3 知由(25)式可以推出 $A=0$. 若 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$,则(25)式和问题 6.2.4(a)可以推出 A 为自伴的. 因此无论是(i)成立还是(ii)成立,都有 $A=0$,即 $P^*P=P$. 从而由问题 7.2.14 知 P 为正交投影,这就证明了第一部分.

为证第二部分,设 $H=\mathbb{R}^2$,$\mathbb{K}=\mathbb{R}$. 设 $P:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 由矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2\end{bmatrix}$ 表示. 若 $\boldsymbol{y}=P\boldsymbol{x}$,则

$$y(1)=\frac{1}{2}x(1)+\frac{1}{2}x(2),\quad y(2)=-\frac{1}{2}x(1)+\frac{1}{2}x(2).$$

因此

$$\langle Px,x\rangle=y(1)x(1)+y(2)x(2)=\frac{1}{2}x(1)^2+\frac{1}{2}x(2)^2,$$

$$\| Px \|^2 = y(1)^2 + y(2)^2 = \frac{1}{2}x(1)^2 + \frac{1}{2}x(2)^2.$$

所以$\langle Px, x\rangle = \| Px \|^2$对$x \in \mathbb{R}^2$成立. 若$Px = y, P^2x = Py = z$,则

$$z(1) = \frac{1}{2}y(1) + \frac{1}{2}y(2) = \frac{1}{2}x(2),$$

$$z(2) = -\frac{1}{2}y(1) + \frac{1}{2}y(2) = -\frac{1}{2}x(1).$$

这说明$P^2 \neq P$,故P不为投影. ■

问题 7.2.17 设H为Hilbert空间,P_1, P_2为H上的正交投影. 求证:

(a) P_1P_2为正交投影当且仅当$P_1P_2 = P_2P_1$.

(b) $P_1 + P_2$为正交投影当且仅当$P_1P_2 = 0 = P_2P_1$.

(c) $P_1 + P_2$及$P_1 - P_2$为正交投影当且仅当$P_2 = 0$.

解答 (a) 正交投影均为自伴的且为幂等的,故若P_1P_2为正交投影,则

$$P_1P_2 = (P_1P_2)^* = P_2^*P_1^* = P_2P_1.$$

反之,若$P_1P_2 = P_2P_1$,则

$$\begin{aligned}(P_1P_2)^*(P_1P_2) &= (P_2^*P_1^*)(P_1P_2) = P_2P_1P_1P_2 \\ &= P_2P_1P_2 = P_1P_2P_2 = P_1P_2.\end{aligned}$$

因此由问题 7.2.14 知P_1P_2为正交投影.

(b) 由问题 7.2.14,$P_1 + P_2$为正交投影当且仅当

$$\begin{aligned}P_1 + P_2 &= (P_1 + P_2)^*(P_1 + P_2) = (P_1^* + P_2^*)(P_1 + P_2) \\ &= (P_1 + P_2)(P_1 + P_2) = P_1^2 + P_1P_2 + P_2P_1 + P_2^2 \\ &= P_1 + P_1P_2 + P_2P_1 + P_2.\end{aligned}$$

因此$P_1 + P_2$为正交投影当且仅当

$$P_1P_2 + P_2P_1 = 0. \tag{26}$$

若$P_1P_2 = 0 = P_2P_1$,则这显然成立. 反之假设(26)式成立,则在(26)式中左乘P_2有

$$P_2P_1P_2 + P_2^2P_1 = 0. \tag{27}$$

在(27)式中右乘P_2有

$$P_2P_1P_2^2 + P_2^2P_1P_2 = 0, \quad P_2P_1P_2 + P_2P_1P_2 = 0.$$

因此有$P_2P_1P_2 = 0$. 这个结果与(27)式一起可以推出$P_2P_1 = 0$. 再由(26)式知$P_1P_2 = 0$.

(c) 若$P_2 = 0$,则$P_1 + P_2 = P_1 = P_1 - P_2$显然为正交投影. 反之,若$P_1 + P_2$和$P_1 - P_2$为正交投影,则由(b)知$P_1P_2 = 0 = P_2P_1$. 又

$$P_1 - P_2 = (P_1 - P_2)(P_1 - P_2) = P_1^2 - P_1P_2 - P_2P_1 + P_2^2 = P_1 + P_2.$$

从而必有$P_2 = 0$. ■

问题 7.2.18 设P_1, P_2为Hilbert空间H上的正交投影,$P = P_1 + P_2 - P_1P_2$. 求证:

(a) P为正交投影当且仅当$P_1P_2 = P_2P_1$.

(b) 若 $P_1P_2=P_2P_1$，则 $R(P)=R(P_1)+R(P_2)$.

解答 (a) 若 P 为正交投影，则 $P^*=P$，从而

$$P_1+P_2-P_1P_2=P_1^*+P_2^*-P_2^*P_1^*=P_1+P_2-P_2P_1.$$

因此有 $P_1P_2=P_2P_1$.

反之，若 $P_1P_2=P_2P_1$，设 $P_3=P_2-P_2P_1$. 则

$$P_3P_1=P_2P_1-P_2P_1^2=0,$$

$$P_1P_3=P_1P_2-P_1P_2P_1=P_1P_2-P_1^2P_2=0,$$

$$P_2P_3=P_2^2-P_2^2P_1=P_3.$$

由此可知

$$P_3^*P_3=(P_2^*-P_1^*P_2^*)P_3=P_2P_3-P_1P_2P_3=P_3-P_1P_3=P_3.$$

所以由问题 7.2.14 知 P_3 为正交投影. 从而由问题 7.2.17(b)知 $P=P_1+P_3$ 也为正交投影，这是由于 $P_1P_3=0=P_3P_1$.

(b) 设 $P_1P_2=P_2P_1$，对 $x\in H$ 有

$$P(x)=P_1(x)+P_2(x)-P_1P_2(x)=P_1(y)+P_2(x),$$

其中 $y=x-P_2(x)$. 这说明 $R(P)\subset R(P_1)+R(P_2)$.

另外，设 $y_1=P_1(x_1)$，$y_2=P_2(x_2)$，则

$$\begin{aligned}Py_1&=P_1y_1+P_2y_1-P_1P_2(y_1)\\&=P_1(P_1x_1)+P_2(P_1x_1)-P_2P_1(P_1x_1)\\&=P_1x_1+P_2P_1x_1-P_2P_1x_1=P_1x_1,\\Py_2&=P_1(P_2x_2)+P_2(P_2x_2)-P_1P_2(P_2x_2)\\&=P_1P_2x_2+P_2x_2-P_1P_2x_2=P_2x_2.\end{aligned}$$

因此

$$y_1+y_2=P_1x_1+P_2x_2=P(y_1+y_2)\in R(P).$$

这就证明了 $R(P_1)+R(P_2)\subset R(P)$. 因此有 $R(P)=R(P_1)+R(P_2)$. ■

问题 7.2.19 设 H 为 Hilbert 空间，$P\in BL(H)$为正交投影. 求证：

(a) $R(P)=Z(P)^\perp$，

(b) 若 Q 为 $R(P)$上的正交投影，则 QP 为 H 上的正交投影.

解答 (a) 若 P 为正交投影，则 $R(P)\perp Z(P)$，故有 $R(P)\subset Z(P)^\perp$. 设 $y\in Z(P)^\perp$，则

$$Py\in R(P)\subset Z(P)^\perp,$$

从而 $y-Py\in Z(P)^\perp$. 但

$$P(y-Py)=Py-P^2y=0.$$

因此 $y-Py\in Z(P)$. 这可以推出 $y-Py=0$，即 $y=Py\in R(P)$. 这说明 $Z(P)^\perp\subset R(P)$，也就证明了(a).

(b) 设 $E=QP$. 显然 E 将 H 映到 H，E 为线性的且为连续的. 若 $y\in R(P)$，则 $y=Px$，

从而

$$Py = P^2x = Px = y.$$

设 $x\in H$,$z=Ex=QPx$,则 $z\in R(Q)\subset Y$. 由于 $z\in Y=R(P)$,则有 $Pz=z$. 类似地,$Qz=z$. 所以

$$E^2x = Ez = QPz = Qz = z = Ex.$$

这就证明了 $E^2=E$.

设 $x\in Z(E)$,$y\in R(E)$,则 $PQy=Py=y$,这是由于 $y\in R(Q)$ 且 $y\in R(P)$. 因此

$$\langle x,y\rangle=\langle x,PQy\rangle=\langle Px,Qy\rangle=\langle QPx,y\rangle=\langle Ex,y\rangle,$$

其中在上述运算中我们用到了 P 在 H 上的自伴性及 Q 在 Y 上的自伴性. 因为 $Ex=0$,故有 $\langle x,y\rangle=0$. 这说明 $Z(E)\perp R(E)$. 从而 E 为 H 上的正交投影. ■

问题 7.2.20 设 H 为有限维 Hilbert 空间,$A\in BL(H)$. 设 $P_1,P_2,\cdots,P_m$ 为 H 的非零正交投影使得

$$P_iP_j = 0,\quad i\neq j, \tag{28}$$

$$I = P_1+P_2+\cdots+P_m, \tag{29}$$

$k_1,k_2,\cdots,k_m$ 为 m 个两两不等的纯量,使得

$$A = k_1P_1+k_2P_2+\cdots+k_mP_m. \tag{30}$$

求证:$k_1,k_2,\cdots,k_m$ 为 A 不同特征值的全体,且 $P_1,P_2,\cdots,P_m$ 为到相应特征空间的正交投影.

解答 设 $Y_j=Z(A-k_jI)$ 为 $A-k_jI$ 的零空间. 若 $y\in R(P_j)$,则对某一 $x\in H$ 有 $y=P_jx$,因此利用(30)式和(28)式知

$$Ay=\sum_{i=1}^{m}k_iP_iy = \sum_{i=1}^{m}k_iP_iP_jx = k_jP_j^2x = k_jy,$$

这说明 $y\in Y_j$.

反之,若 $y\in Y_j$,则 $Ay=k_jy$,且

$$y=\sum_{i=1}^{m}P_iy, \tag{31}$$

$$Ay=\sum_{i=1}^{m}k_iP_iy,$$

在上面的运算中我们用到了(29)式和(30)式. 因此

$$0 = Ay-k_jy = \sum_{i=1}^{m}(k_i-k_j)P_iy.$$

由于对 $i\neq r$ 有 $P_rP_i=0$,故

$$0 = P_r(0)=\sum_{i=1}^{m}(k_i-k_j)P_rP_iy = (k_r-k_j)P_r^2y.$$

由于若 $r\neq j$,$k_r-k_j\neq0$,故若 $r\neq j$ 则有 $P_ry=0$. 因此由(31)式有

$$y = P_j y \in R(P_j).$$

这样我们就证明了 $R(P_j)=Y_j$.

由于 P_j 为非零的,故 $Y_j=R(P_j)$中有非零元. 由此可以推知 k_j 为特征值且 Y_j 为与之相对应的特征空间,我们还需证明除 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 之外 A 没有别的特征值. 为此假设 λ 和每一个 k_j 都不相等且 $Ax=\lambda x$. 则

$$Ax-\lambda x=\sum_{i=1}^{m}k_iP_ix-\lambda\sum_{i=1}^{m}P_ix=\sum_{i=1}^{m}(k_i-\lambda)P_ix,$$

从而

$$0=P_r(Ax-\lambda x)=\sum_{i=1}^{m}(k_i-\lambda)P_rP_ix=(k_i-\lambda)P_r^2x.$$

因为 $\lambda\neq k_i$,故有 $P_rx=0$ 对任取的 r 都成立. 因此由(29)式知

$$x=\sum_{r=1}^{m}P_rx=0.$$

这说明 λ 不可能为 A 的特征值. ■

问题 7.2.21 设 H 为 Hilbert 空间,$\{u_n\}$为 H 的无穷标准正交基,对 $n=1,2,\cdots$,设 $F_n=\mathrm{span}\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$. 若 P_n 为从 H 到 F_n 的正交投影. 求证:

(a) 任每一 $x\in H$ 有 $P_nx\to x$.

(b) $\|P_n-I\|$ 不收敛到 0.

解答 (a) 由于$\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$为 $F_n=R(P_n)$的标准正交基,故任取 $x\in H$ 有

$$P_nx=k_1u_1+\cdots+k_nu_n. \tag{32}$$

从而对 $1\leqslant j\leqslant n$

$$k_j^{\cdot}=\langle P_nx,u_j\rangle=\langle x,P_n^*u_j\rangle.$$

但 $P_n^*u_j=P_nu_j=u_j$,这是由于 $u_j\in F_n=R(P_n)$. 因此有 $k_j=\langle x,u_j\rangle$,再由(32)式有

$$P_nx=\sum_{j=1}^{n}k_ju_j=\sum_{j=1}^{n}\langle x,u_j\rangle u_j. \tag{33}$$

由于$\{u_n\}$为标准正交基,我们有 Fourier 展开式

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,u_n\rangle u_n,\quad x\in H,$$

上面级数在 H 中为收敛的. 这个级数的前几项和为由(33)式给出的 P_ny. 因此在 H 中有 $P_nx\to x$.

(b) 由(33)式有 $P_n(u_{n+1})=0$,我们有

$$\|(P_n-I)u_{n+1}\|=\|-u_{n+1}\|=1,$$

$$1\leqslant\|P_n-I\|\,\|u_{n+1}\|=\|P_n-I\|.$$

这说明 $\|P_n-I\|$ 不可能收敛到 0. ■

问题 7.2.22 设 H 为复 Hilbert 空间,A 为 H 上的紧正规算子. 求证:存在有限或无

限序列$\{c_n\}$,每一 c_n 为非零复数,$|c_1|\geqslant|c_2|\geqslant\cdots$,存在正交投影列$\{P_n\}$使得对 $n\neq m$ 有 $P_nP_m=0$ 且

$$A(x)=\sum_{n\geqslant 1}c_nP_nx,\quad x\in H.$$

解答 对 H 中的每一有界列$\{x_n\}$,$\{x_n\}$都有一子列$\{x_{n_j}\}$使得$\{Ax_{n_j}\}$在 H 中收敛,从而$\{A^*Ax_{n_j}\}$也在 H 中收敛.因此 A^*A 为紧自伴算子且为非零的.

设 t 为 A^*A 的非零特征值,$Y=Z(A^*A-tI)$为相应的特征空间.由于 A^*A 为紧的,故 Y 为有限维子空间.因为 A 为正规的且 $A^*Ay=ty$ 对 Y 中任意元 y 成立,故有

$$A^*A(Ay)=A^*AAy=A(ty)=tAy,$$
$$A^*A(A^*y)=A^*A^*Ay=A^*(ty)=tA^*y.$$

这就证明了任取 $y\in Y$ 有 $Ay,A^*y\in Y$.设 B 和 C 分别为 A 和 A^* 在 Y 上的限制.利用问题 7.1.19 解答最后一部分的方法可证 $C=B^*$,且 B 为有限维 Hilbert 空间 Y 上的正规算子.由问题 7.1.19 知存在 Y 的两两正交的子空间 $M_1,M_2,\cdots,M_m$,存在纯量 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,使得任取 $x\in Y$

$$x=y_1+y_2+\cdots+y_m,\quad y_j\in M_j,$$
$$Bx=k_1y_1+k_2y_2+\cdots+k_my_m.$$

设 Q_j 为从 H 到 M_j 的正交投影,则若 $i\neq j$,Q_j 在 M_i 上为 0,任取 $y\in M_j$ 有 $Q_jy=y$.因此

$$Q_1x+\cdots+Q_mx=x,\quad x\in Y,$$
$$k_1Q_1x+\cdots+k_mQ_mx=Bx,\quad x\in Y.\tag{34}$$

在问题 7.2.20 中取 $H=Y$,则可知 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 为 B 不同特征值的全体,$M_j=R(Q_j)$为对应于 k_j 的特征空间.由于 B 为正规的,故由问题 7.1.2(a)有

$$Z(B^*-\bar{k}_jI)=Z(B-k_jI)=M_j.$$

在 Y 中选取 x 使得 $Q_jx\neq 0$,由于 $Q_jx\in M_j\subset Y$,故

$$AQ_jx=BQ_jx=kQ_jx.$$

因此 k_j 为 A 的特征值.因为任取 $y\in Y$ 有 $A^*Ay=ty$,我们也有

$$tQ_jx=AA^*Q_jx=k_jA^*Q_jx=k_jB^*Q_jx=k_j\bar{k}_jQ_jx.$$

所以有 $|k_j|^2=t$.这对任取的 $1\leqslant j\leqslant m$ 都成立.

设 $t_1,t_2,\cdots$为 A^*A 不同的特征值,使得 $|t_1|\geqslant|t_2|\geqslant\cdots$,设 $Y_i=Z(A^*A-t_iI)$,B_i 为 A 在 Y_i 上的限制.由对紧自伴算子成立的谱定理知:若 S_i 为到 Y_i 上的正交投影,S_0 为到 $Y_0=Z(A^*A)$上的正交投影,则对 $x\in H$ 有

$$x=S_0x+\sum_{i\geqslant 1}S_ix,\tag{35}$$
$$Ax=\sum_{i\geqslant 1}t_iS_ix.$$

在上面已证结果中取 $t=t_i$,则 Y 和 B 分别变为 Y_i 和 B_i,与(34)式相对应的是

$$B_i x = \sum_{j=1}^{m_i} k_{ij} Q_{ij} x, \quad x \in Y_i, \tag{36}$$

其中 $k_{i1}, k_{i2}, \cdots$ 为 A 不同的特征值且

$$| k_{ij} |^2 = t_i, \tag{37}$$

Q_{ij} 为 Y_i 上的正交投影. 进一步地, 若 M_{ij} 为 Q_{ij} 的值域, 则 $M_{i1}, M_{i2}, \cdots$ 为 Y_i 的两两正交的子空间.

若 $x \in H, i \geqslant 1$, 则 $S_i x \in Y_i$, 从而由(36)式有

$$AS_i x = BS_i x = \sum_{j=1}^{m_i} k_{ij} Q_{ij} S_i x = \sum_{j=1}^{m_i} k_{ij} E_{ij} x, \tag{38}$$

其中 $E_{ij} = Q_{ij} S_i$. 若 $x \in Y_0 = Z(A^* A)$, 则

$$\langle Ax, Ax \rangle = \langle A^* Ax, x \rangle = 0,$$

即 $Ax = 0$. 因此任取 $x \in H$ 有 $AS_0 x = 0$. 从而由(35)式及(38)式得

$$Ax = AS_0 x + \sum_{i \geqslant 1} AS_i x = \sum_{i \geqslant 1} \sum_{j=1}^{m_i} k_{ij} E_{ij} x \tag{39}$$

对 $x \in H$ 成立. 由问题 7.2.19(b)知 $E_{ij} = Q_{ij} S_i$ 为 H 上的正交投影. 将复数列

$$k_{11}, k_{12}, \cdots, k_{21}, \cdots$$

由 $c_1, c_2, \cdots$ 来表示, 将投影列

$$E_{11}, E_{12}, \cdots, E_{21}, \cdots$$

由 $P_1, P_2, \cdots$ 来表示, 则(39)式可以写为

$$Ax = \sum_{n \geqslant 1} c_n P_n x, \quad x \in H.$$

由于 $|t_1| \geqslant |t_2| \geqslant \cdots$, 故由(37)式知 $|c_1| \geqslant |c_2| \geqslant \cdots$. 我们还有

$$R(E_{ij}) \subset R(Q_{ij}) = M_{ij} \subset Y_i.$$

对同一个 $i, M_{i1}, M_{i2}, \cdots$ 为两两正交的. 进一步地, Y_i 也为两两正交的, 这是由于它们为对应于 $A^* A$ 不同特征值 $t_1, t_2, \cdots$ 的特征空间. 所以 E_{ij} 的值域为两两正交的, $i \geqslant 1, j \geqslant 1$. 因此对 $n \neq m$ 有 $R(P_n) \perp R(P_m)$. 因此若 $n \neq m, x, y \in H$, 则

$$\langle P_n P_m x, y \rangle = \langle P_n x, P_m y \rangle = 0.$$

这可以推出任取 $n \neq m$ 有 $P_n P_m = 0$. 这就完成了证明. ■

问题 7.2.23 设 H 为 Hilbert 空间, $A \in BL(H)$. 设存在非零纯量列 $\{c_n\}$ 及非零正交投影列 $\{P_n\}$ 使得: 任取 $n \neq m$ 有 $P_n P_m = 0$,

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} c_n P_n x, \quad x \in H. \tag{40}$$

$c_n \to 0$, 每一个 $R(P_n)$ 都为有限维子空间. 求证:

(a) A 为紧正规的.

(b) $\{c_n\}$ 为 A 不同的特征值的全体.

(c) $R(P_n)$为对应于 c_n 的特征空间.

解答 (a) 由假设,(40)式中的级数在 H 中收敛. 而对 $n\neq m$ 及 $x\in H$ 有

$$\langle P_n x, P_m x\rangle = \langle x, P_n P_m x\rangle = 0,$$

故(40)式中级数的各项为两两正交的. 因此由(40)式知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| c_n P_n x \|^2 = \| Ax \|^2 < \infty. \tag{41}$$

设

$$Bx = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_n P_n x, \quad x \in H. \tag{42}$$

由于(42)式中级数的各项为两两正交的,所以利用(41)式及问题 5.2.5 知(42)式中的级数在 H 中收敛. 进一步地,

$$\| Bx \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \| \bar{c}_n P_n x \|^2 = \| Ax \|^2.$$

B 显然为线性的,因此 $B\in BL(H)$. 对 $x,y\in H$,

$$\langle Ax, y\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} c_n P_n x, y \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle P_n x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle x, P_n y\rangle$$

$$= \left\langle x, \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_n P_n y \right\rangle = \langle x, By\rangle.$$

所以 $B=A^*$. 由于

$$\| Ax \| = \| Bx \| = \| A^* x \|, \quad x \in H,$$

故由问题 6.2.16(a)知 A 为正规的.

设 $Y_i=R(P_i)$,$\{v_{ij}: 1\leqslant j\leqslant m_i\}$为 Y_i 的标准正交基,则对 $x\in H$ 有

$$\langle P_i x, v_{ij}\rangle = \langle x, P_i v_{ij}\rangle = \langle x, v_{ij}\rangle,$$

从而

$$\| P_i x \|^2 = \sum_j |\langle P_i x, v_{ij}\rangle|^2 = \sum_j |\langle x, v_{ij}\rangle|^2.$$

因为 $Y_i=R(P_i)$为两两正交的,故

$$\{v_{ij}: i \geqslant 1, 1 \leqslant j \leqslant m_i\}$$

为 H 的标准正交集. 对 $x\in H$,Bessel 不等式给出

$$\sum_{i=1}^{\infty} \| P_i x \|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_j |\langle x, v_{ij}\rangle|^2 \leqslant \| x \|^2. \tag{43}$$

设

$$\alpha_n = \sup_{i\geqslant n} |c_i|, \quad A_n = \sum_{i=1}^{n} c_i P_i.$$

则当 $n\to\infty$时有 $\alpha_n\to 0$,由(40)式有

$$Ax - A_n x = \sum_{i=n+1}^{\infty} c_i P_i x, \quad x \in H.$$

由于上面和式的各项两两正交，所以对 $x \in H$，由(43)式有

$$\| (A - A_n)x \|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} \| c_i P_i x \|^2 \leqslant \alpha_n^2 \sum_{i=n+1}^{\infty} \| P_i x \|^2 \leqslant \alpha_n^2 \| x \|^2.$$

因此 $\| A - A_n \| \leqslant \alpha_n \to 0$. 所以在 $BL(H)$ 中 $A_n \to A$. 但 A_n 的值域为由有限个 v_{ij} 生成的子空间，其中 $1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m_i$，故 A_n 为紧算子. 由此推知 A 为紧的.

(b) 设 $y \in Y_i = R(P_j)$，则 $y = P_j x, x \in H$. 由(40)式有

$$Ay = \sum_{n=1}^{\infty} c_n P_n P_j x = c_j P_j x = c_j y.$$

由于 Y_j 含有非零元，这就证明了 c_j 为 A 的特征值，我们同时证明了

$$Y_j \subset Z(A - c_j I). \tag{44}$$

若 $Ay = \lambda y$，利用(40)式有

$$\lambda P_i y = P_i(Ay) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n P_i P_n y = c_i P_i y. \tag{45}$$

首先假设任取 i 有 $\lambda \neq c_i$，则(45)式可以推出任取 $y, P_i y = 0$. 因此由(40)式得 $\lambda y = Ay = 0$. 即若 $\lambda \neq 0$，则有 $y = 0$. 这就证明了若 $\lambda \neq 0$，任取 i 有 $\lambda \neq c_i$，则 λ 不为 A 的特征值. 这就证明了(b).

(c) 在(45)式中取 $\lambda = c_j$，则若 $i \neq j, Ay = c_i y$，则 $P_i y = 0$. 因此由(40)式有

$$c_j y = Ay = c_j P_j y \in R(P_j) \in Y_j.$$

由于 $c_j \neq 0$，故有 $y \in Y_j$. 由于这对任意的 $y \in Z(A - c_j I)$ 成立，所以由(44)式有

$$Y_j = Z(A - c_j I). \qquad \blacksquare$$

问题 7.2.24 求证：若 H 为 Hilbert 空间，则任取 H 上的紧算子 A，存在 $A_n \in BL(H)$，使得每一个 A_n 的值域为有限维的且在 $BL(H)$ 中有 $A_n \to A$.

解答 设 A 为 H 上的非零紧算子，则正如在问题 7.2.22 解答开始部分所观察到的，算子 $A^* A$ 为紧的，它还是非零自伴的. 设 $t_1, t_2, \cdots$ 为 $A^* A$ 不同的特征值使得 $|t_1| \geqslant |t_2| \geqslant \cdots$，$t_0 = 0$，对 $j = 0, 1, 2, \cdots, P_j$ 为从 H 到 $Y_j = Z(A^* A - t_j I)$ 上的正交投影，则由谱定理

$$x = \sum_{i \geqslant 0} P_i x, \quad x \in H, \tag{46}$$

这个级数在 H 中收敛. 进一步地，若 $i \neq j$，则 $P_i P_j = 0$，若 $i \geqslant 1$，特征空间 $Y_i = R(P_i)$ 有有限的基 $\{v_{ij} : 1 \leqslant j \leqslant m_i\}$. 因此对 $x \in H$ 有

$$\langle P_i x, v_{ij} \rangle = \langle x, P_i v_{ij} \rangle = \langle x, v_{ij} \rangle, \quad i \geqslant 1, \quad j \geqslant 1,$$

$$P_i x = \sum_{j=1}^{m_i} \langle P_i x, v_{ij} \rangle v_{ij} = \sum_{j=1}^{m_i} \langle x, v_{ij} \rangle v_{ij}, \quad i \geqslant 1,$$

$$x - P_0 x = \sum_{i \geqslant 1} \sum_{j=1}^{m_i} \langle x, v_{ij} \rangle v_{ij},$$

其中在最后一步我们用到了(46)式. 若用 $u_1, u_2, \cdots$ 来表示 $v_{11}, v_{12}, \cdots, v_{21}, \cdots$，则我们可以将上式写为

$$x - P_0 x = \sum_{n \geqslant 1} \langle x, u_n \rangle u_n, \quad x \in H. \tag{47}$$

若 $i \neq j, x, y \in H$，则由于 $P_i P_j = 0$，

$$\langle P_i x, P_j y \rangle = \langle x, P_i P_j y \rangle = 0.$$

这说明 $Y_i = R(P_i)$ 为两两正交的，因此 $\{u_n\}$ 为标准正交集. 因为 $P_0 x \in Y_0, Y_0 = Z(A^* A)$，故

$$\langle AP_0 x, AP_0 x \rangle = \langle A^* AP_0 x, P_0 x \rangle = 0,$$

因此有 $AP_0 x = 0$ 对 $x \in H$ 成立. 故由(47)式有

$$Ax = \sum_{n \geqslant 1} \langle x, u_n \rangle Au_n, \quad x \in H. \tag{48}$$

我们首先假设 $A^* A$ 仅有有限个非零特征值 t_i，则(46)式中的和式为有限和，因此(48)式中的和式也为有限和. 所以 $R(A)$ 由 $Au_1, Au_2, \cdots, Au_m$ 生成，其中 m 为一整数. 在这种情况下，要证的结论显然成立.

若 $\{t_n\}$ 为无穷列，令

$$A_n x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, u_j \rangle Au_j, \quad x \in H.$$

则 $\{u_n\}$ 也为无穷列，且由(48)式有

$$Ax - A_n x = \sum_{j=n+1}^{\infty} \langle x, u_j \rangle Au_j, \quad x \in H. \tag{49}$$

每一个 u_n 都属于某一个 Y_i，因而 $A^* Au_n = t_i u_n$ 对某一个 i 成立. 因此若 $n \neq m$

$$\langle Au_n, Au_m \rangle = \langle A^* Au_n, u_m \rangle = t_i \langle u_n, u_m \rangle = 0.$$

所以(49)式中的和式的各项两两正交，从而

$$\| Ax - A_n x \|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} \| \langle x, u_j \rangle Au_j \|^2.$$

由 A 的紧性及问题 7.2.4 可以推出 $Au_n \to 0$. 因此若 $\alpha_n = \sup_{j > n} \| Au_j \|$，则 $\alpha_n \to 0$ 且由 Bessel 不等式有

$$\| (A - A_n) x \|^2 \leqslant \sum_{j=n+1}^{\infty} | \langle x, u_j \rangle |^2 \alpha_n^2 \leqslant \alpha_n^2 \| x \|^2.$$

由于上式对 $x \in H$ 都成立，故

$$\| A - A_n \| \leqslant \alpha_n \to 0.$$

因此在 $BL(H)$ 中有 $A_n \to A$，且每一个 $R(A_n)$ 都为有限维的. ■

问题 7.2.25 设 A 为 Hilbert 空间 H 上的紧算子. 求证：若 A 与 AA^* 可交换，则 A 为正规算子，且当 A 不为紧算子时，这个结论一般不成立.

解答 设 $\{x_n\}$ 为 H 的有界列，$y_n = A^* x_n$，则 $\{y_n\}$ 为有界的. 所以 $\{Ay_n\}$ 有收敛子列，从而 $\{AA^* x_n\}$ 有收敛子列. 这就说明了 AA^* 为紧的. 设 A 为非零的，则 AA^* 也非零，AA^* 还

为紧自伴的. 设 $t_1, t_2, \cdots$ 为 AA^* 不同的特征值使得 $|t_1| \geqslant |t_2| \geqslant \cdots$. 设 $t_0 = 0$, P_i 为从 H 到 $Y_i = Z(AA^* - t_i I)$ 的正交投影, $i = 0, 1, 2, \cdots$, 则由谱定理知

$$x = \sum_{i \geqslant 0} P_i x, \quad x \in H, \tag{50}$$

(50)式中的级数在 H 中收敛. 进一步地, 若 $i \neq j$, 则 $P_i P_j = 0$, 对 $i \geqslant 1$, $Y_i = R(P_i)$ 为有限维的.

设 $x \in Y_i$, 则 $A^* Ax = t_i x$. 由 $A(AA^*) = (AA^*)A$ 两边同时取伴随算子, 则有 $AA^* A^* = A^* AA^*$. 因此

$$AA^*(Ax) = AAA^* x = A(t_i x) = t_i Ax,$$
$$AA^*(A^* x) = A^* AA^* x = A^*(t_i x) = t_i A^* x.$$

这说明任取 $x \in Y_i$ 有 $Ax, A^* x \in Y_i$. 这对 $i = 0, 1, 2\cdots$ 都成立.

设 $i \geqslant 1$, B_i 和 C_i 分别表示 A 和 A^* 在 Y_i 上的限制, 则 $B_i, C_i \in BL(Y_i)$ 且任取 $x \in Y_i$

$$B_i C_i x = B_i A^* x = AA^* x = t_i x. \tag{51}$$

由于 $t_i \neq 0$, 所以(51)式证明了 B_i 为满射. 因此由于 Y_i 为有限维空间知 B_i 为 Y_i 到 Y_i 的一一映射. 所以 B_i^{-1} 存在且由(51)式知 $B_i C_i = t_i I$. 从而

$$C_i = tB_i^{-1} \quad C_i B_i = t_i I.$$

所以任取 $x \in Y_i$, $i \geqslant 1$, 有

$$A^* Ax = A^* B_i x = C_i B_i x = t_i x = AA^* x.$$

由于任取 $x \in H$ 有 $P_i x \in Y_i$, 所以

$$A^* AP_i x = AA^* P_i x, \quad x \in H, \quad i \geqslant 1. \tag{52}$$

设 $x \in Y_0 = Z(AA^*)$ 且 $y = Ax$. 则 $y \in Y_0$, 从而

$$\langle A^* y, A^* y \rangle = \langle AA^* y, y \rangle = 0.$$

因此

$$A^* Ax = Ay = 0 = AA^* x, \quad x \in Y_0.$$

因为任取 $x \in H$ 有 $P_0 x \in Y_0$, 故有

$$A^* AP_0 x = AA^* P_0 x, \quad x \in H. \tag{53}$$

利用(50)式有

$$A^* Ax = \sum_{i \geqslant 0} A^* AP_i x, \quad x \in H,$$

$$AA^* x = \sum_{i \geqslant 0} AA^* P_i x, \quad x \in H.$$

因此由(52)式和(53)式有

$$A^* Ax = AA^* x, \quad x \in H.$$

这说明 A 为正规的.

为证第二部分, 设 H 为无穷维可分 Hilbert 空间, $\{u_n\}$ 为 H 的标准正交基. 设

$$T_x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_{n+1} \rangle u_n.$$

T 显然为线性的且

$$\| Tx \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | \langle x, u_{n+1} \rangle |^2 \leqslant \| x \|^2.$$

所以 $T \in BL(H)$. 如在问题 6.1.13 解答中一样,我们有 $TT^* = I \neq T^* T$. 所以 T 与 TT^* 可交换,但 T 不为正规的. ■

参 考 文 献

Ahlfors, L. V. , *Gomplex Analysis* , McGraw-Hill, New York(1966)

Bachman, G. , *and* Narici, L. , *Functional Analysis* , Academic Press, New York(1966)

Kreyszig, E. , *Introductory Functional Analysis with Applications* , John Wiley & Sons, New York(1978)

Limaye, B. V. , *Functional Analysis* , Wiley Eastern, New Dehli(1981)

Royden, H. L. , *Real Analysis* , Macmillan, New York(1968)

Rudin, W. , *Principles of Mathematical Analysis* , *3rd ed*. McGraw-Hill, New York(1976)

Rudin, W. , *Real and Complex Analysis* , McGraw-Hill, New York(1966)

Simmons, G. F. , *Topology and Modern Analysis* , McGraw-Hill, New York(1963)