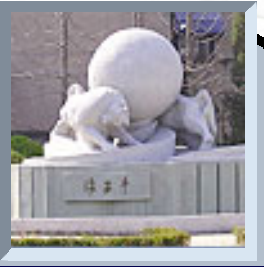
图论及其应用

侯新民

计算与应用数学系

xmhou@ustc.edu.cn



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示








目　录

1 图论介绍 **6**

2 图的基本概念 **11**

定义 11

常用说法 12

Ramsey Number 17

作业 19

3 图的同构 **21**

图的同构问题介绍 24

概率方法在图论中应用举例 25

作业 26



4 图的顶点度和运算 **27**

握手定理 29

图的运算 30

一些定义和记号 33

Turán Theorem 35

作业 43

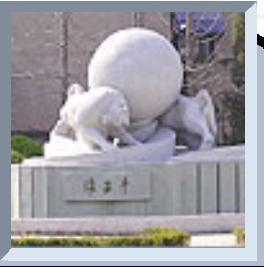
5 路与连通 **44**

Turán number for special family of graphs : stars, paths and cycles 51

连通和强连通 56

作业 60

6 回与圈 **62**



7 距离与直径定义 **67**

二部图判定定理 71

8 作业 **78**

9 欧拉(Euler)图 **79**

Euler图判定定理 80

作业 85

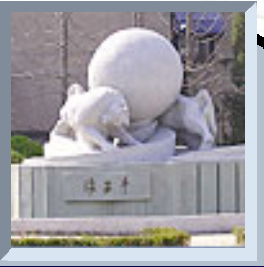
10 Hamilton 图 **86**

判定Hamilton图的充分条件 91

作业 99

11 P and NP **101**

Millennium Prize Problems 102



NP-complete 102
Well Known NP-Complete problems 103
A proof of 3-SAT to HCP 106

12 距离与直径 **111**
下界 112
(Δ, d)-Moore 图 116
一个上界 117
平均距离 121
线图 125
作业 130

13 图的矩阵表示 **131**
作业 142



1 图论介绍

- 图论(Graph Theory)是离散数学的一个分支。它以图为研究对象。

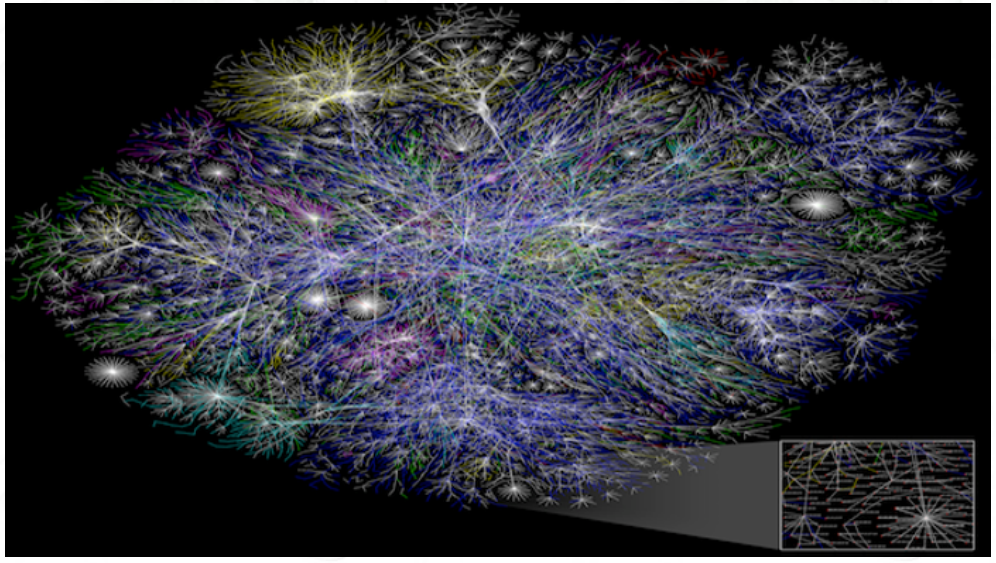


Figure 1: 一个大型互联网的图表示

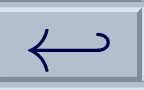
- 图论中的图是由若干给定的点及连接两点的线所



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



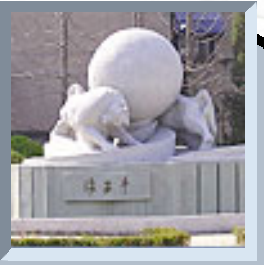





构成的图形，这种图形通常用来描述某些事物之间的某种特定关系，用点代表事物，用连接两点的线表示相应两个事物间具有这种关系。

- 图论是一个应用非常广泛的学科。图论提供了一个自然的结构，由此产生的数学模型几乎适合于所有科学(自然科学和社会科学)领域，只要这个领域研究的主题是“对象”和“对象”之间的关系.

- 图论起源于著名的哥尼斯堡七桥问题(1736年)。
- 哥尼斯堡（今俄罗斯加里宁格勒）是东普鲁士的首都，普雷格尔河穿城而过，河上有两座小岛通过7座桥与河岸相连。



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示









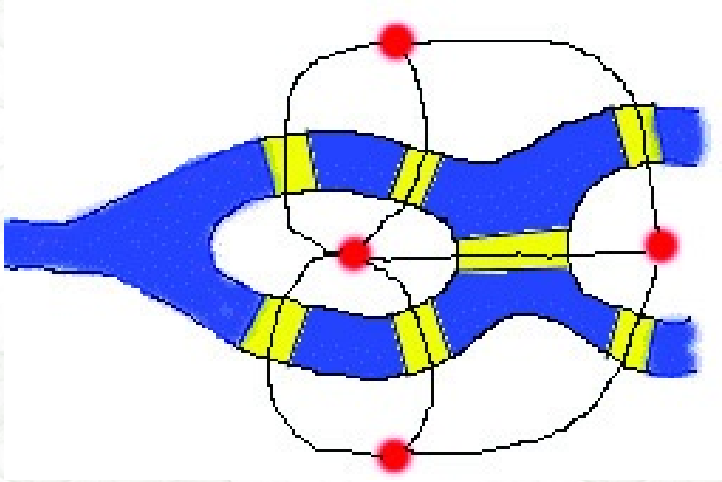



Figure 2: Leonhard Euler（1707-1783）及格尼斯堡七桥问题 欧拉是数学史上公认的4 名最伟大的数学家之一，另外三位分别是阿基米德(公元前287年-公元前212年)、牛顿(1643-1727)和高斯(1777-1855)。

- 传说当地居民想设计一次散步，从某处出发，经过每座桥恰好一次回到原地，中间不重复。这



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示













就是今天的‘一笔画’问题，但在当时没人能解决。

- 欧拉将这个问题抽象成一个数学模型，用点和线画出网络状图，证明这种走法不存在，解决了哥尼斯堡七桥问题。
- 对此类问题的讨论研究，开创并引导了图论和拓扑学两个学科的发展。
- 根据图论研究与发展的现状，可以分为如下分支：结构图论、算法图论、极值图论、随机图论、拓扑图论、代数图论、超图理论和拟阵理论。

参考书：

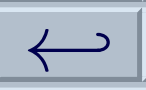
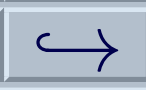
1 Bondy, J. A. and Murty, U. S. R., Graph Thory with Application. The MaCmillan Press ltd, London and Basingstoke, 1976 （第二版于2008 年



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示





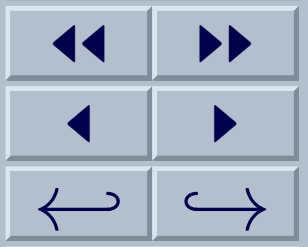
出版，GTM244）。中译本：《图论及其应用》（吴望名等译），科学出版社，1984。该书将无向图和有向图分开论述，图的理论部分写得通俗易懂，应用材料很精彩，习题很多. 张克民、林国宁和张忠辅《图论及其应用习题解答》（清华大学出版社，1988）已将该书的习题作了全部解答。

2 Diestel, R., GraphTheory , Springer-Verlag New York, 2005. 这是一本研究生水平的教材，有一定难度，但很受欢迎, GTM173。

3 Béla Bollobás, Modern Graph Theory, Springer-Verlag, 1998. 研究生教材，有一定难度，GTM184.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



2 图的基本概念

定义

- 无向简单图(simple graph)是指一个二元结构(V,E)，其中V是非空集，称为顶点集(vertex set)，

$$E \subseteq \binom{V}{2}$$

这里$\binom{V}{2}$表示V的所有2元子集的集合，E称为边集(edge set)，V中元素称为顶点(vertex)(或点(point))，E中元素称为边(edge).

- 有向简单图(direct graph or digraph)是指一个二元结构(V,A)，其中V是非空集，称为点集；$A \subseteq V \times V$称为弧集(arc set).



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



Proposition 2.1 *(i)* 设 G 是 n 阶简单无向图, 则 $|E(G)| \leq \frac{n(n-1)}{2}$;

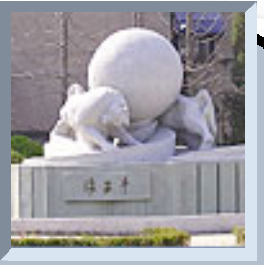
(ii) 若 D 是 n 阶简单有向图, 则 $|A(D)| \leq n(n-1)$.

注: 因为表示 V 中元素的点相对位置和表示 E 中元素的线段的曲直长短是无关紧要的, 所以图形表示并不是唯一的.

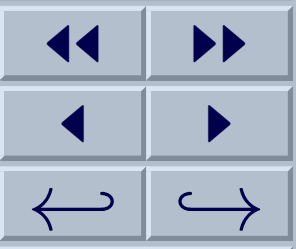
例 1.1.1 如4个顶点的完全图 K_4.

常用说法

- 用 $a = (x, y) \in A(D)$, 表示有向边(或弧), 称为从 x 到 y 的有向边 (directed edge from x to y). x 称为 a 的起点 (origin), y 称为 a 的终点 (terminus), 起点和终点统称为边 a 的端点 (end-vertices).
- 用 $e = xy \in E(G)$ 表示无向边, 称为连接 x 和 y 的边 (edge connecting x and y).



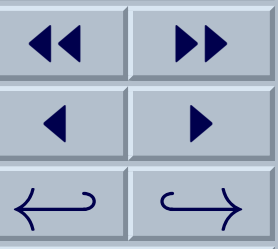
Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



- 边与它的两端点称为关联的 (incident); 与同一条边相关联的两端点或者与同一个顶点关联的两条边称为相邻的 (adjacent).
- 两端点相同的边称为环 (loop). 有公共起点并有公共终点的两条边称为平行边 (parallel edges) 或者称为重边 (multi edges).
- 两端点相同但方向互为相反的两条有向边称为对称边 (symmetric edges).
- 对有向图 D 称去掉边上的方向得到的无向图 G 称为 D 的基础图 (underlying graph).
- 任给一个无向图 G, 将 G 的每条边都指定方向从而得到一个有向图 D, 称这样的有向图 D 为 G 的定向图 (oriented graph).
- 任给一个无向图 G, 将 G 的每条边都用一对对称边代替得到的有向图 D, 称为 G 的对称有向图.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



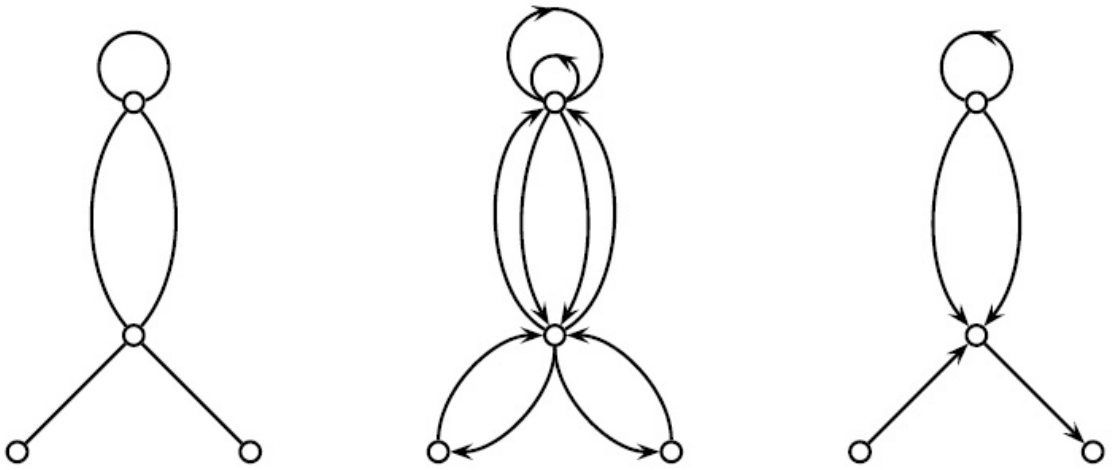
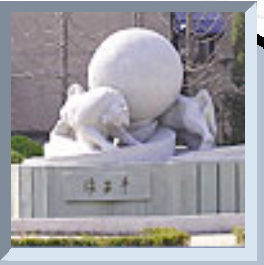


Figure 3: (a) 无向图 G (b) G 的对称有向图 D (c) G 的定向图 H

- 图中顶点数称为图的**阶** (order). 阶为 1 的简单图称为**平凡图** (trivial graph), 边数为零的图称为**空**



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示

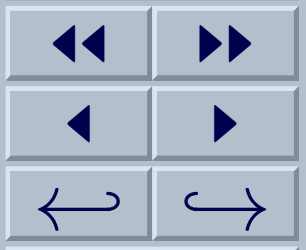


图 (empty graph). 点数和边数都是有限的图称为**有限图** (finite graph).

- K_n表示n个顶点的完全图，K_3称为三角形。

例 1.1.4　证明: 在任意六人中必存在三人, 要么都相识, 要么都不相识.

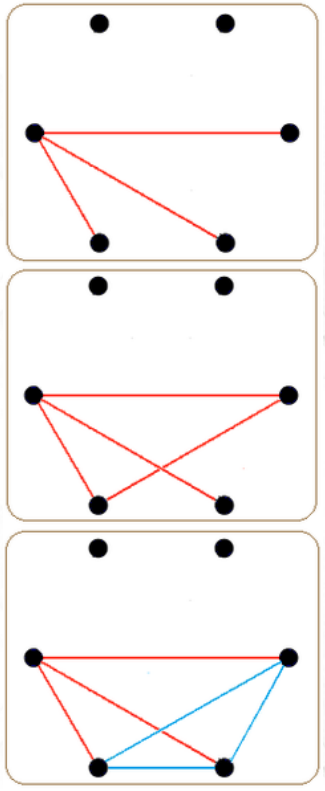


Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



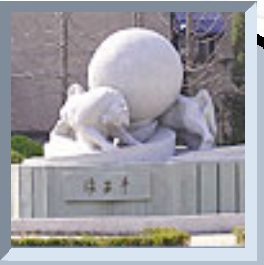




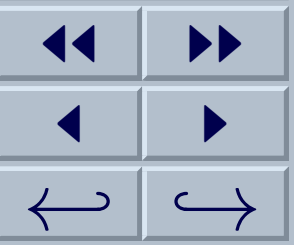



证明 用A,B,C,D,E,F代表这六个人，其中二人相识，则代表这二人的两顶点之间连一条红边；否则连一条蓝边. 于是，原来的问题就等价于证明在这样得到的图中必含同色三角形. 考察某一个顶点，设为F. 与F关联的五条边中必有三条同色. 不妨设它们是三条红边FA,FB和FC. 再看三角形ABC. 如果它有一条红边，设为AB，则FAB是红边三角形；如果三角形ABC没有红边，则它本身就是蓝边三角形. ∎

Figure 4: $R(3,3)=6$



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



Ramsey Number

In general, the Ramsey number $R(r,s)$, is the least N such that any blue-red coloring of a complete graph K_N, has a monochromatic subgraph K_r or K_s. We know few about the exact values of $R(r,s)$.

Theorem 2.2 (Ramsey, 1930, Erdős, 1947)

$$2^{r/2} < R(r,r) \leq 2^{2r-3}.$$

至今为止, 已知的$R(r,s)$ $(r,s \geq 3)$精确值只有9个. 保罗·埃尔德什(Paul Erdős) 曾以一个譬喻来描述寻找拉姆齐数的难度: “想像有队外星人军队在地球降落, 要求取得$R(5,5)$的值, 否则便会毁灭地球。在这个情况, 我们应该集中所有电脑和数学家尝试去找这个数值。



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示

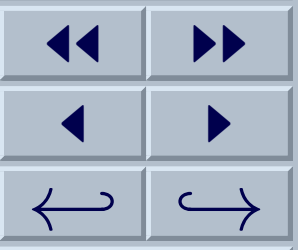




Figure 5: Erdős 和陶哲轩（10岁）讨论问题

若它们要求的是R(6,6)的值，我们要尝试毁灭这队外星人。”



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示





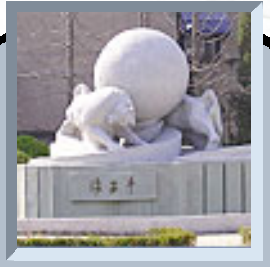



k \ l	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	6	9	14	18	23	28	36	40 43	46 51	52 59	59 69	66 78	73 88
4		18	25	35 41	49 61	56 84	73 115	92 149	98 191	128 238	133 291	141 349	153 417
5			43 49	58 87	80 143	101 216	126 316	144 442	171 633	191 848	213 1139	239 1461	265 1878
6				102 165	113 298	132 495	169 780	179 1171	253 1804	263 2566	317 3705	5033	401 6911
7					205 540	217 1031	241 1713	289 2826	405 4553	417 6954	511 10581	15263	22116
8						282 1870	317 3583	6090	10630	16944	817 27490	41525	861 63620
9							565 6588	581 12677	22325	39025	64871	89203	
10								798 23556		81200			1265

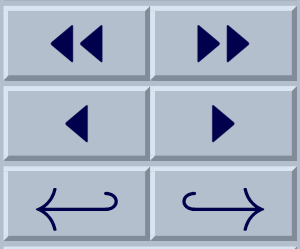
Figure 6: Known nontrivial values and bounds for $R(k,l)$

作业

1 证明$R(3,4)=9$.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



2 九位数学家在一次国际会议上相遇, 他们中任意三人中至少有两人会说同一种语言. 证明: 如果每位数学家最多只会说三种语言, 那么至少有三位数学家能用同一种语言交谈(美国第七届数学竞赛题, 1978 年 5 月 2 日).



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



3 图的同构

- $D=(V(D),E(D))$ 和 $H=(V(H),E(H))$ 称为同构的 (isomorphic), 记为 $D\cong H$, 如果存在双射

$$\theta: V(D)\to V(H),$$

使得对任何

$$(x,y)\in E(D)\Leftrightarrow(\theta(x),\theta(y))\in E(H).$$

映射 θ 称为 D 和 H 之间的同构映射 (isomorphic mapping).

- 要证明两个图是同构的, 就必须指出它们之间的一个同构映射.

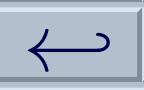
- 容易看到, 图的同构关系是一种等价关系. 这种等价关系将同阶图分成若干等价类, 同构的两个图



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示







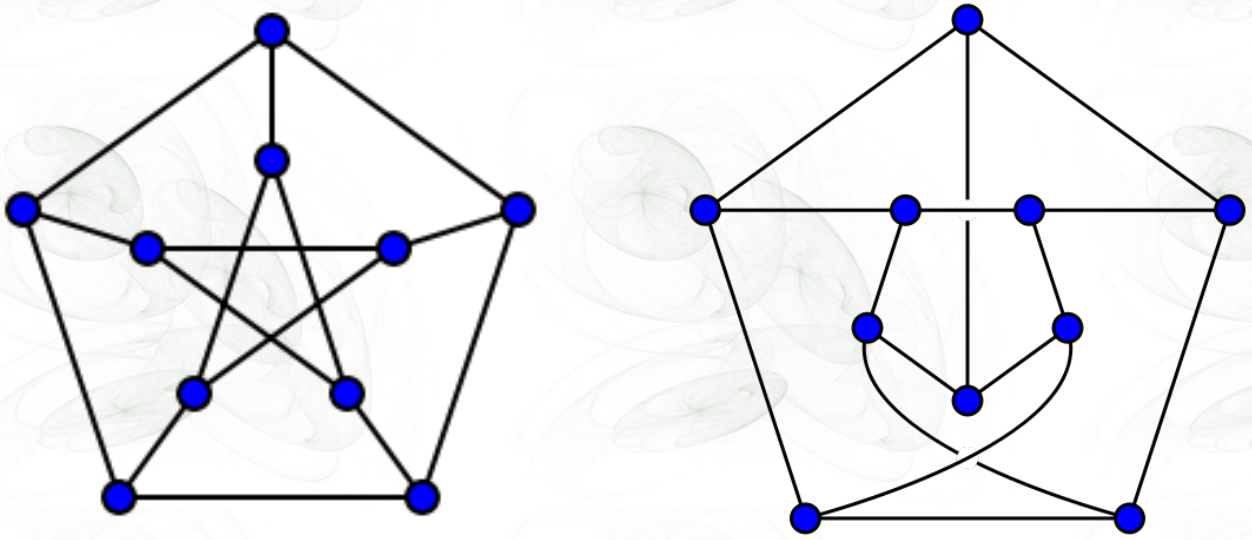
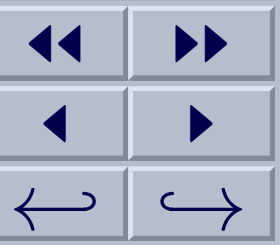



Figure 7: Petersen 图的两种画法

属于同一类. 同一类图有相同的结构, 差别仅在于顶点和边的名称不同.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



完全图 (complete graph): 任何不同两顶点之间都有边相连的简单无向图. n 阶完全图记为 K_n.

完全有向图 (complete digraph): 完全图的对称有向图. n 阶完全有向图记为 K_n^*.

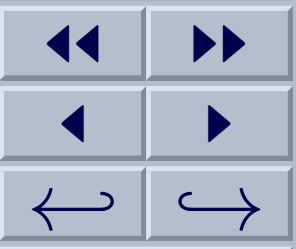
竞赛图 (tournament): 完全图的定向图.

(之所以用这个名称, 是因为这种图形象地描述了有 n 个选手参加的某项循环比赛的结果. 选手 x 战胜了选手 y, 则边 xy 定向从 x 到 y.)

2 部图 (bipartite graph): 若无环图的顶点集能划分为两个非空子集 X 和 Y 使得 X 中任何两顶点之间无边相连并且 Y 中任何两顶点之间也无边相连, 则称该图为2 部图, $\{X,Y\}$ 称为 2 **部划分** (bipartition). 2 部划分为 $\{X,Y\}$ 的2 部图记为 $(X \cup Y, E)$.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



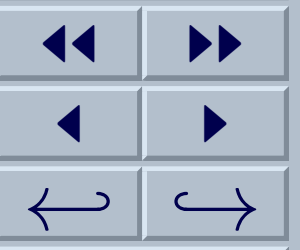
类似可定义一般k $(k \geq 2)$ 部图, 完全k 部图等。

图的同构问题介绍

- The set of all automorphisms of a graph G, with the operation of composition of permutations, is a permutation group on $V(G)$ (a subgroup of the symmetric group on $V(G)$). This is the automorphism group of G, denoted $Aut(G)$.
- Two algorithmic questions arising from the above definitions are graph isomorphism and finding the automorphism group.
- Determining if two graphs are isomorphic is thought to be neither an NP-complete problem nor a P-problem.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



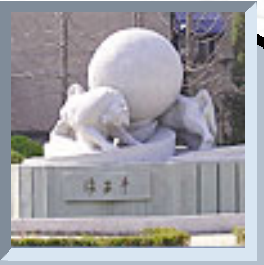
- $Aut(K_n) = Aut(K_n^c) = S_n$ (symmetric group); $Aut(C_n) = D_n$ (Dihedral group), etc.

概率方法在图论中应用举例

例 1.1.4　证明: 若$\binom{n}{k}(1-2^{-k})^{n-k} < 1$, 则必存在一$n$个顶点的竞赛图使得对任取的$k$ 个选手，都存在一个选手打败了这k个选手。

证明:

- 考虑$V = \{1,2,\cdots,n\}$ 上随机取竞赛图。对V 的任一固定k 元子集K, 用A_K 表示没有选手打败K 中所有选手的事件集合。



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



全　屏
搜　索
关　闭

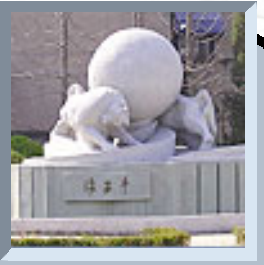
- 因为对任一$v \in V-K$, v 不能够打败K 中所有选手的概率为$1-2^{-k}$; 而且这$n-k$ 个事件是相互独立的，所以$Pr(A_K)=(1-2^{-k})^{n-k}$.
- 故

$$Pr(\cup_{\substack{K\subset V\\|K|=k}} A_K) \leq \sum_{\substack{K\subset V\\|K|=k}} Pr(A_K) = \binom{n}{k}(1-2^{-k})^{n-k} < 1.$$

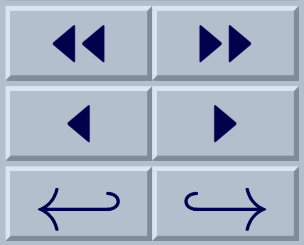
这表明A_K 不发生的概率为正，即结论成立。

作业

1 证明$Aut(C_n)=D_n$, 这里D_n表示二面体群.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



4 图的顶点度和运算

- 设G是无向图. $x \in V(G)$的顶点度 (vertex degree)定义为G中与x关联边的数目(一条环要计算两次), 记为$d_G(x)$.

  顶点度为d的顶点称为d **度点** (a vertex of degree d). 零度点称为**孤立点** (isolated vertex). 用$\Delta(G)$和$\delta(G)$分别表示G的**最大** (maximum)和**最小** (minimum) **顶点度**. 即,

$$\Delta(G) = \max\{d_G(x) : x \in V(G)\},$$
$$\delta(G) = \min\{d_G(x) : x \in V(G)\}.$$

- 无向图G称为k**正则的** (k-regular), 如果对每个$x \in V(G)$均有$d_G(x) = k$.

- 设D是有向图. $y \in V(D)$的顶点出度 (vertex out-degree) 定义为D中以y为起点的有向边的数



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示





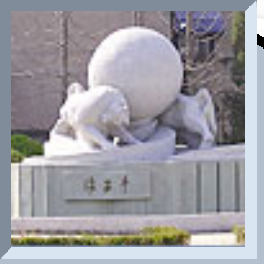



目，记为 $d_D^+(y)$. $y \in V(D)$ 的**顶点入度** (vertex in-degree) 定义为 D 中以 y 为终点的有向边的数目，记为 $d_D^-(y)$. $y \in V(D)$ 的**顶点度**定义为 $d_D^+(y) + d_D^-(y)$，记为 $d_D(y)$.

- 若 $d_D^+(y) = d_D^-(y)$，则称 y 为**平衡点** (balanced vertex). 每个顶点都为平衡点的有向图称为**平衡有向图** (balanced digraph).
- 无向图的对称有向图是平衡图.
-

$$\Delta^+(D) = \max\{d_D^+(y) : y \in V(D)\};$$
$$\Delta^-(D) = \max\{d_D^-(y) : y \in V(D)\};$$
$$\delta^+(D) = \min\{d_D^+(y) : y \in V(D)\};$$
$$\delta^-(D) = \min\{d_D^-(y) : y \in V(D)\}.$$

分别表示 D 的**最大和最小顶点出、入度**. 这 4 个参数都等于 k 的图称为 k **正则有向图** (k-regular digraph).



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示







全 屏

搜 索

关 闭

握手定理

Theorem 4.1 (L. Euler, 1736, 握手定理) 对任何无向图 G 均有

$$\sum_{x\in V(G)} d_G(x) = 2|E(G)|.$$

证明： [Double-counting] 计算集合

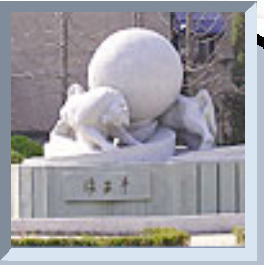
$$A = \{(x,e) : x \in V, e \in E \text{ 且} x \in e\}$$

的数目。

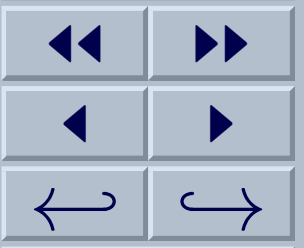
Corollary 1 任何无向图中奇度点的个数必为偶数。

证明 设 V_o 和 V_e 分别为 G 中奇度点集和偶度点集. 由定理 4.1知

$$\sum_{x\in V_o} d_G(x) + \sum_{x\in V_e} d_G(x) = 2|E(G)|.$$



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



上式的右端和左端中的第二项均为偶数，因此左端的第一项也为偶数. 由于当 $x \in V_o$ 时，$d_G(x)$ 为奇数，所以 $|V_o|$ 为偶数. ∎

Corollary 2 对任何有向图 D 均有

$$\sum_{x \in V(D)} d_D^+(x) = \sum_{x \in V(D)} d_D^-(x) = |A(D)|.$$

证明 略

图的运算

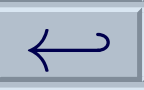
- 设 $G = (V(G), E(G))$ 和 $H = (V(H), E(H))$ 是两个图. 若 $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$, 则称 H 为 G 的子图 (subgraph), 记为 $H \subseteq G$. 称 G 是 H 的母图 (supergraph).



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



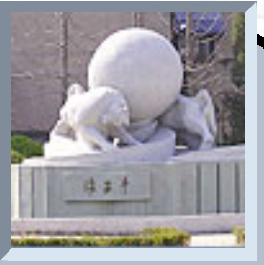




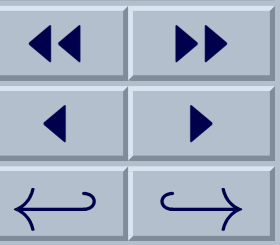

- 若$H \subseteq G$并且$V(H) = V(G)$, 则称H为G 的支撑子图 (spanning subgraph). 若$H \subseteq G$且$H \neq G$, 则称H为G的真子图 (proper subgraph), 记为$H \subset G$.

- 设V'是$V(G)$的非空真子集, 以V'为顶点集并以G中两端点均在V'中的边为边集的子图称为G的由V'导出的子图, 简称导出子图 (induced subgraph), 记为$G[V']$. 导出子图$G[V \setminus V']$记为$G - V'$. 若$V' = \{x\}$, 则简记$G - \{x\}$ 为$G - x$.

- 设E'是$E(G)$的非空子集. 以E'为边集并以G中由E'中边的端点为顶点集的子图称为G的由E'导出的子图,记为$G[E']$. $G - E'$表示从G中删去E'(但不删去端点)后得到的子图.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



- 设 $G_1 \subseteq G, G_2 \subseteq G$. 若 $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$, 则称 G_1 和 G_2 是**点不交的** (vertex-disjoint); 若 $E(G_1) \cap E(G_2) = \emptyset$, 则称 G_1 和 G_2 是**边不交的** (edge-disjoint).

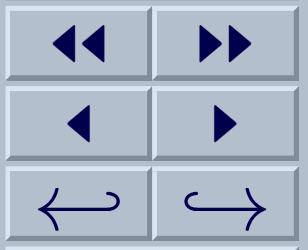
- G_1 和 G_2 的**并** (union) $G_1 \cup G_2$ 是以 $V(H) = V(G_1) \cup V(G_2)$ 为点集, $E(H) = E(G_1) \cup E(G_2)$ 为边集的 G 的子图。

- 若 G_1 和 G_2 点不交, 则记 $G_1 \cup G_2 = G_1 + G_2$. 若对每个 $i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 均有 $G_i \cong H$, 则记 $G_1 + G_2 + \cdots + G_n = nH$. 若 G_1 和 G_2 边不交, 则记 $G_1 \cup G_2 = G_1 \oplus G_2$.

- 若 $V(G_1) \cap V(G_2) \neq \emptyset$, 则类似可以定义 G_1 和 G_2 的



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



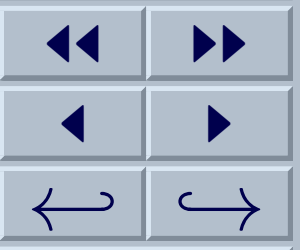
交 (intersection) $G_1 \cap G_2$.

一些定义和记号

- 设图$G=(V,E)$, $S \subseteq V$, 用$N_G(S)$ 表示G中和S中点相邻的点的集合，称为S的邻集。
- 若$G=(V,E)$是简单图，则$d_G(v)=|N_G(v)|$ 对$v \in V$。
- 设$S,T \subseteq V(G)$, 用$E_G(S)$ 和$E_G(S,T)$ 分别表示两个端点都在S中的边的集合及一个端点在S另一个端点在T中的边的集合。记$e_G(S)=|E_G(S)|$和$e_G(S,T)=|E_G(S,T)|$.
- 类似的我们可以定义$N_D^+(S)$称为S的**外邻集** (out-neighbor set)和$N_D^-(S)$称为S的**内邻集** (in-neighbor set).



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



例1：$2n$个人参加聚会，证明至少有两个人有偶数个公共朋友。

证明：

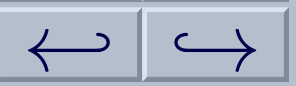
- 定义$2n$个顶点的图$G=(V,E)$，$xy\in E$ 当且仅当x和y是朋友。
- 则命题成立当且仅当存在 $x,y\in V$使得$|N(x)\cap N(y)|$ 为偶数。
- （反证）假设对任意$x,y\in V$，有$|N(x)\cap N(y)|$ 为奇数。
- 断言：G中所有点度为偶数。
- 取一点$x\in V$，则$d(x)\equiv 0 \pmod 2$.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示







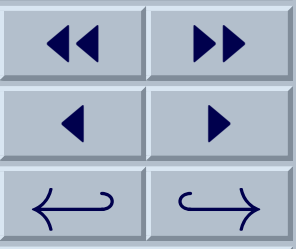
- 对任一$y \in V-(\{x\} \cup N(x))$, 则有 $|N(y) \cap N(x)| \equiv 1 \pmod 2$.
- 因为$d(y) \equiv 0 \pmod 2$, 故$|N(y) \cap (V - \{x\} \cup N(x))| \equiv 1 \pmod 2$.
- 令$H = G[V - \{x\} \cup N(x)]$, 即$H$ 的所有点都为奇度点, 故$|V - \{x\} \cup N(x)| \equiv 0 \pmod 2$.
- 得$|V| = |N(x)| + |V - \{x\} \cup N(x)| + 1 \equiv 1 \pmod 2$, 矛盾。

Turán Theorem

Theorem 4.2 (Mantel, 1907) 设G是n阶简单无向图且不含三角形. 则: $e(G) \leqslant \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$, 且等号成立当且仅当$G = K_{\lceil n/2 \rceil, \lfloor n/2 \rfloor}$, 这里$e(G) = |E(G)|$, $K_{\lceil n/2 \rceil, \lfloor n/2 \rfloor}$ 表示平衡的完全二部图.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



证明

- 若G是空图, 则$e(G)=0$, 结论成立.
- 下设G是非空图. 任取$xy \in E(G)$. 由于G是简单图且不含三角形, 所以,

$$(d_G(x)-1)+(d_G(y)-1) \leqslant n-2,$$

即

$$n \geqslant d_G(x)+d_G(y).$$



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示








- 上式两边对G中所有边求和, 并由 Cauchy 不等式和定理 4.1, 得

$$\begin{aligned} n\cdot e(G) &\geq \sum_{e=xy\in E(G)} (d_G(x)+d_G(y)) \\ &= \sum_{x\in V} d_G^2(x) \text{ (double counting)} \\ &\geq \frac{1}{n}\left(\sum_{x\in V} d_G(x)\right)^2 \text{ (Cauchy 不等式或Jensen不等式)} \\ &= \frac{4}{n}e(G)^2. \end{aligned}$$

即得 $e(G)\leqslant \frac{n^2}{4}$.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



-

$$\begin{aligned} \text{等号成立} &\Leftrightarrow d_G(x)+d_G(y)=n, \quad xy\in E(G) \\ &\Leftrightarrow d_G(x)=d_G(y)=\frac{n}{2}, \quad xy\in E(G) \\ &\Leftrightarrow G=K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

∎

注：Cauchy 不等式：$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \le (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2)$.

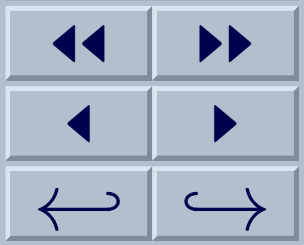
- 一般的，对给定图H, 定义

$$\mathrm{ex}(n,H)=\max\{e(G) \mid G\text{为不含}H\text{作为子图的}n\text{阶图}\},$$

称为Turán 数。边数为$\mathrm{ex}(n,H)$且不含H作为子图的图称为H的极值图。



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



- Mantel 定理告诉我们$\mathrm{ex}(n, K_3) = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$.
- 用$T_r(n)$ 表示r部平衡完全图(balanced r-partite graph), 即每一部顶点个数为$\lceil \frac{n}{r} \rceil$ 或$\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$.
- 显然，$\delta(T_r(n)) = n - \lceil \frac{n}{r} \rceil$ and $\Delta(T_r(n)) = n - \lfloor \frac{n}{r} \rfloor$; 且$T_r(n)$ 是不含K_{r+1} 的极大图（即$T_r(n)$任加一条边都会导出一个K_{r+1}子图），因此

$$\mathrm{ex}(n, K_{r+1}) \geq e(T_r(n)).$$

Theorem 4.3 (Turán, 1941) *For $r \geq 2$*

$$\mathrm{ex}(n, K_{r+1}) = e(T_r(n))$$

and $T_r(n)$ is the unique extremal graph for K_{r+1}.

Proof:



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



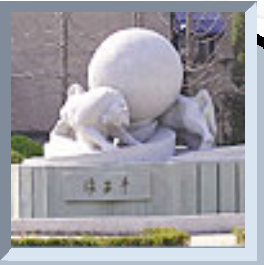




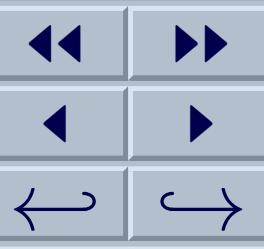
- By induction on n.
- For $n \leq r+1$, the result is trivial. Suppose $n > r+1$ and the result holds for smaller n.
- Let G be a graph on n vertices, $e(T_r(n))$ edges and it has no K_{r+1}. (WHY we can do this?)
- Then $\delta(G) \leq \delta(T_r(n)) \leq \Delta(T_r(n))$.
- Choose $x \in V(G)$ with $d(x) = \delta(G)$. Then

$$e(G-x) = e(G) - d(x) \geq e(T_r(n-1)).$$

- Note that $G-x$ has no K_{r+1} as a subgraph. By induction hypothesis $G-x \cong T_r(n-1)$.
- Hence $d(x) = \delta(T_r(n)) = n - \lceil \frac{n}{r} \rceil$. x is joined to all but $n-1-(n-\lceil \frac{n}{r} \rceil) = \lfloor \frac{n-1}{r} \rfloor$ vertices of $G-x$.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



- As x cannot be joined to a vertex in each class of $G-x$, it has to be joined to all but a small class of $G-x$. This shows that $G \cong T_r(n)$.

例 1.3.4 无环图 G 中存在 2 部支撑子图 H 使每个顶点 x 均有 $d_H(x) \geq d_G(x)/2$. 因而有 $e(H) \geq e(G)/2$.

证明

- Choose $H = (V = X \dot{\cup} Y, E) \subseteq G$ such that $e(H)$ is maximum.
- Then for each $x \in X$ or Y, $d_{G[X]}(x) \leq d_H(x)$.
- Since $d_G(x) = d_H(x) + d_{G[X]}(x)$, $d_H(x) \geq \frac{1}{2} d_G(x)$.
- $e(H) \geqslant e(G)/2$.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



和例1.3.4相关的公开问题：

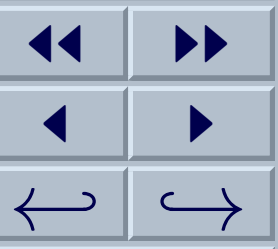
Problem 4.4 *For any given cubic (3-regular) graph* $G=(V,E)$, *if there is a partition* $X\cup Y$ *of* V *such that* $\Delta(X)\leq 1$ *and* $\Delta(Y)\leq 1$ *and* $||X|-|Y||\leq 2$.

Problem 4.5 *For any* d*-regular graph* $G=(V,E)$, *if there is a partition* $X\cup Y$ *of* V *such that* $\delta(X)\geq d/2$ *and* $\delta(Y)\geq d/2$.

Remark: True for $d\leq 4$ and $d=6$ and widely open for $d=5$ and $d\geq 7$.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



作业

1.3.12 证明: 设G是顶点集$V=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$且不含子图 K_{r+1} 的简单无向图, 则存在顶点集为V的完全r部图H使得对每个$i(1\leqslant i\leqslant n)$ 均有$d_G(x_i)\leqslant d_H(x_i)$ 并且等号成立$\Leftrightarrow G\cong H$. (P. Erdős, 1970)



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示













5 路与连通

- 图中连接顶点x和y的链 (chain or walk) W 称为xy链, 是指顶点x_i和边a_j交错出现的序列:

$$W = (x =)x_{i_0}a_{i_1}x_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}x_{i_k}(= y),$$

其中与边a_{i_j}相邻的两顶点$x_{i_{j-1}}$和x_{i_j}正好是a_{i_j}的两个端点(可能有$x_{i_{j-1}} = x_{i_j}$). x和y称为W的端点 (end-vertices), 其余的点称为内部点 (internal vertices). W中边的数目k称为W的长度 (length), 简称为长.

- 边互不相同的链称为迹 (trail).
- 点互不相同的迹称为路 (path).
- 两端点相同的链(迹) 称为闭链 (closed chain) (闭迹。



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示







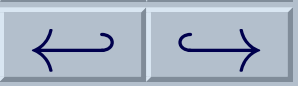
- 闭迹称为回 (circuit). 点不交的闭迹称为圈 (cycle).
- 对于简单图, 长为 k 的链 W 由顶点序列 $x_{i_0}x_{i_1}\cdots x_{i_k}$ 所唯一确定, 故简记 $W=(x_{i_0},x_{i_1},\cdots,x_{i_k})$ 或 $W=x_{i_0}x_{i_1}\cdots x_{i_k}$.
- 指定有向图 D 中 xy 链 (迹、路) W 的方向从 x 到 y. 若 W 中所有边的方向与此方向一致, 则称 W 为 D 中从 x 到 y 的**有向链 (迹、路)**, 记为 (x,y) 链 (迹、路).
- 图中长度最大的路称为最长路 (longest path).
- 包含图中每个顶点的路（圈）称为 Hamilton 路（圈）.
- 包含Hamilton 圈的图称为Hamilton图(Hamiltonian).



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示







Theorem 5.1 设G是简单无向图, $\delta=\delta(G)$, 则G中必含长至少为δ的路和长至少为$\delta+1$的圈(若$\delta\geq 2$)(作业).

证明

- 令$P=(x_0,x_1,\cdots,x_k)$是G 中最长路.
- 由P的最长性, $N_G(x_0)\subseteq\{x_1, x_2,\cdots,x_k\}$.
- 由于G是简单图, 所以 $k\geqslant|N_G(x_0)|=d_G(x_0)\geqslant\delta$.

∎

Theorem 5.2 *Let G be a simple connected graph with order $n\geq 3$ such that for any two non-adjacent vertices x,y we have*

$$d(x)+d(y)\geq k.$$



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示








If $k = n$ then G is Hamiltonian, and if $k < n$ then G contains a path of length at least k and a cycle of length at least $\frac{k+2}{2}$.

Proof.

- Suppose G is not Hamiltonian.
- Let

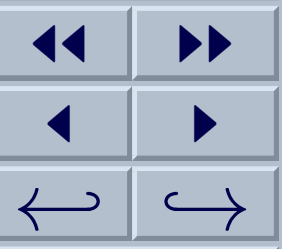
$$P = x_0 x_1 \cdots x_\ell$$

be a longest path in G. Then $x_0 x_\ell \notin E(G)$ (WHY?).

- Hence $N(x_0), N(x_\ell) \subseteq \{x_1, \cdots, x_{\ell-1}\}$.
- Let $N(x_0) = \{x_i \mid x_0 x_i \in E(G)\}$ and $N^+(x_\ell) = \{x_{i+1} \mid x_\ell x_i \in E(G)\}$. Then $N(x_0) \cap N^+(x_\ell) = \emptyset$ (WHY?).



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



- Note that $N^+(x_\ell) \subset \{x_2, x_3, \ldots, x_\ell\}$. Hence

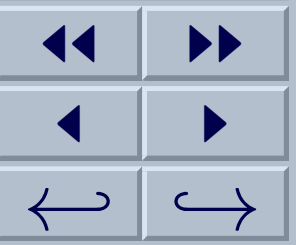
$$k \leq d(x_0) + d(x_\ell) = |N(x_0) \cup N^+(x_\ell)| \leq \ell \leq n-1.$$

- If $k = n$ then we have a CONTRADICTION. So G is Hamiltonian.
- If $k < n$ then $\ell \geq k$. We are DONE.
- Without loss of generality, assume $d(x_0) \geq d(x_\ell)$. Then $d(x_0) \geq \frac{k}{2}$.
- Let $N(x_0) = \{x_{i_1}, \cdots, x_{i_s}\}$. Then $i_s \geq \frac{k}{2}$.
- Hence $C = x_0 x_1 \cdots x_{i_s} x_0$ is a cycle of length at least $\frac{k}{2} + 1$. ∎

Remark: The following theorems are corollaries of Theorem 5.2.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



Theorem 5.3 (Dirac's Theorem, 1952) *Let G be a simple connected graph on n vertices with $\delta(G) \geq k$. If $k \geq n/2$ (Dirac's condition) then G is Hamiltonian, and if $n > 2k$ then G contains a path of length at least $2k$.*

Theorem 5.4 (O. Ore, 1960, Ore 条件)
设 G 是 $n(\geqslant 3)$ 阶简单图. 若 G 中任何不相邻两顶点 x 和 y 均有 $d_G(x) + d_G(y) \geqslant n$ (Ore's condition), 则 G 是 Hamilton 图.

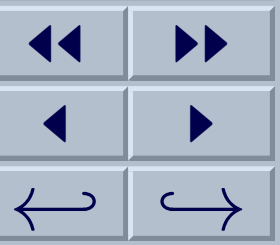
定理 1.4.1 (L. Rédei, 1934) 每个竞赛图都含Hamilton有向路.

证明

- 设 D 是 n 阶竞赛图, $P = (x_1, x_2, \cdots, x_k)$ 是 D 中最长有向路.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



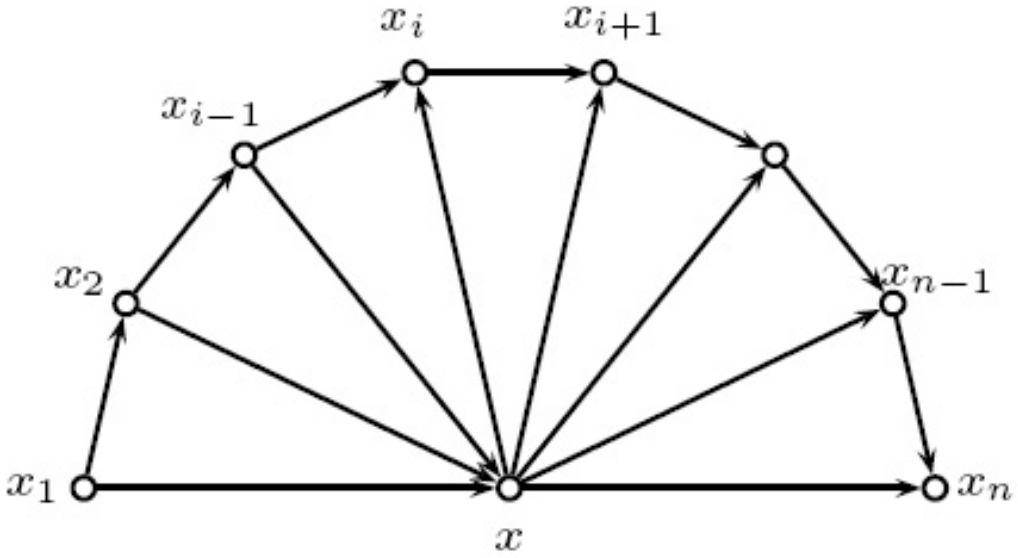
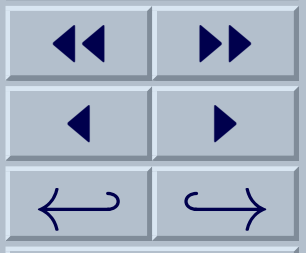


Figure 8: 定理1.4.1的证明

- 如果$k = n$, 则结论得证.
- 假设$k < n$. 则必存在$x \in V(D) \setminus V(P)$使 $(x, x_k) \in A(D)$, 而且$(x_1, x) \in A(D)$.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



- 因而必存在 $i(1 < i \leqslant k)$ 使 (x_{i-1}, x), $(x, x_i) \in A(D)$ (参见图 8).
- 于是, $(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_k)$ 是 D 中一条比 P 长 1 的有向路, 矛盾于 P 的最长性.
- 所以, P 是 Hamilton 有向路.

∎

Turán number for special family of graphs : stars, paths and cycles

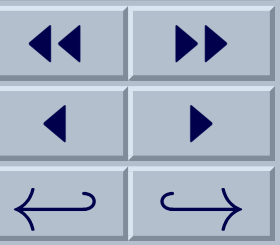
Theorem 5.5

$$\mathrm{ex}(n, K_{1,k}) \leq \frac{(k-1)n}{2},$$

with equality holds if and only if G is a $(k-1)$-regular graph.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



Theorem 5.6 (Erdős-Gallai Theorem, 1959)

$$\mathrm{ex}(n, P_{k+1}) \leq \frac{(k-1)n}{2},$$

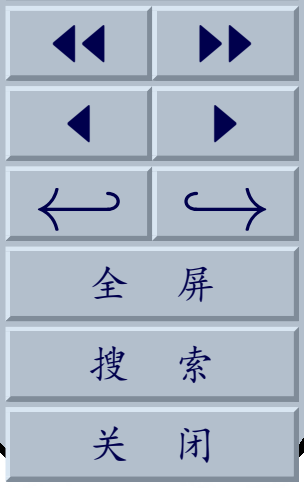
with equality holds if and only if G is the union of disjoint complete graphs K_k, where P_{k+1} is a path of length k.

Proof.

- By induction on n.
- If $n \leq k$ then the result is clearly true.
- Suppose $n > k$ and the result is true for smaller values of n.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



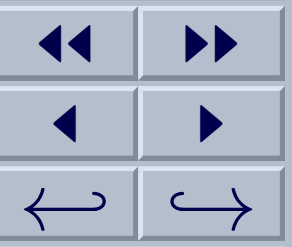
- If G is disconnected then the induction hypothesis implies the result.
- If G is connected, then G contains no K_k (WHY?) and, by Theorem 5.2, G has a vertex x with $d(x) \leq \frac{k-1}{2}$.
- As $G-x$ is not an extremal graph, (WHY?) by induction hypothesis, $e(G-x) < \frac{(k-1)(n-1)}{2}$.
- Therefore,

$$\begin{aligned} e(G) &= d(x)+e(G-x) \\ &< \frac{k-1}{2}+\frac{(k-1)(n-1)}{2} \\ &= \frac{(k-1)n}{2}. \end{aligned}$$

In fact, we have



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



Theorem 5.7

$$\mathrm{ex}(n, P_{k+1}) = \frac{(k-1)n}{2} - \frac{r(k-r)}{2},$$

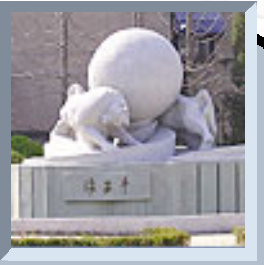
where $n \equiv r \pmod{k}$.

Conjecture 5.8 (Erdős-Sós Conjecture)

$$\mathrm{ex}(n, T_{k+1}) \leq \frac{(k-1)n}{2},$$

where T_{k+1} *is a tree (simple connected graph containing no cycle) on* $k+1$ *vertices.*

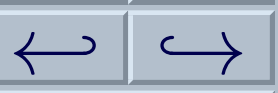
Remark: Theorem 5.5 and Theorem 5.6 imply that Erdős-Sós Conjecture is true for $K_{1,k}$ and P_{k+1}.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示







全 屏

搜 索

关 闭

Theorem 5.9 (Erdős-Gallai Theorem)

$$\mathrm{ex}(n, C_{\geq k+1}) \leq \frac{k(n-1)}{2},$$

with equality holds if and only if G is connected and all its blocks are complete graphs of order k.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示

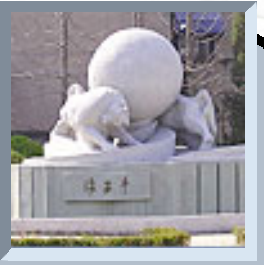




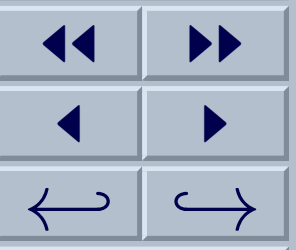



连通和强连通

- 设 $x, y \in V$. 若 D (或 G) 中存在连接 x 和 y 的路(不必是有向路), 则称 x 和 y 是连通的 (connected).
- V 中元素之间的连通关系是 V 上的等价关系. 这种等价关系将 V 中元素分成若干等价类 $V_1, V_2, \cdots, V_\omega$. x 和 y 属于同一类 $V_i \Leftrightarrow x$ 和 y 是连通的.
- 子图 $D[V_i]$ (或 $G[V_i]$) $(1 \leqslant i \leqslant \omega)$ 称为 D (或 G) 的连通分支 (connected component), ω 称为 D (或 G) 的连通分支数 (number of components), 记为 $\omega = \omega(D)$ (或 $\omega(G)$).
- 若 $\omega(D) = 1$ (或 $\omega(G) = 1$), 则称 D (或 G) 为连通图 (connected digraph or graph). 反之称为非连通图 (disconnected graph).



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



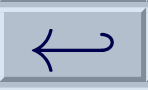
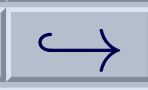
- 设 D 是有向图, $x,y \in V(D)$. 若 D 中既存在 (x,y) 路又存在 (y,x) 路, 则称 x 和 y 是**强连通的** (strongly connected).
- V 中元素之间的强连通关系是 V 上的等价关系. 由这种关系得到 V 的等价类 V_i 在 D 中导出子图 $D[V_i]$ 称为 D 的**强连通分支**. D 的**强连通分支数**记为 $\overrightarrow{\omega}(D)$.
- 若 $\overrightarrow{\omega}(D) = 1$, 则称 D 为**强连通图**. 反之, 称 D 为**非强连通图**.
- 设 $x \in V(G)$, $e \in E(G)$. 若 $\omega(G-x) > \omega(G)$, 则称 x 为**割点** (cut vertex); 反之称 x 为**连通点** (connected vertex).
- 若 $\omega(G-e) > \omega(G)$, 则称 e 为**割边** (cut edge), 亦称为**桥** (bridge); 反之称 e 为**连通边** (connected edge).



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示





- 不含割点的连通图称为块 (block). D 中不含割点的极大连通子图称为图 D 的块.

性质 1.4.2 (a) D (或 G) 是连通的 $\Leftrightarrow$ 对 V 的任何非空真子集 S 均有 $E(S,\overline{S}) \neq \emptyset$.

(b) D 是强连通的 $\Leftrightarrow$ 对 V 的任何非空真子集 S 均有 $E^+(S,\overline{S}) \neq \emptyset$ 且 $E^-(\overline{S},S) \neq \emptyset$. ∎

Proposition 5.10 设 G 是简单无向图, $V(G) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 并且 $d_G(x_1) \leqslant d_G(x_2) \leqslant \cdots \leqslant d_G(x_n)$. 若对任何自然数 $k(1 \leqslant k \leqslant n - d_G(x_n) - 1)$ 均有 $d_G(x_k) \geqslant k$, 则 G 是连通的.

证明 (反证法)

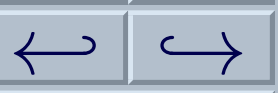
- 若 G 是非连通的, 由定理 1.4.2 (a), 则存在非空真子集 $S \subset V(G)$ 使得 $E(S,\overline{S}) = \emptyset$.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示







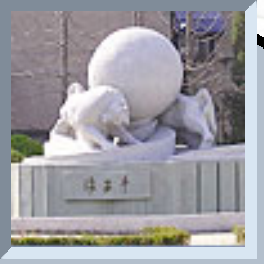
- 不妨设$x_n \in \overline{S}$, 并且令$k = |S|$. 由于G是简单图, 所以$|\overline{S}| \geqslant d_G(x_n) + 1$并且$k = |S| = n - |\overline{S}| \leqslant n - d_G(x_n) - 1$. 由假定, $d_G(x_k) \geq k$.
- 因为对每个$x \in S$均有$d_G(x) \leqslant |S| - 1 = k - 1$, 所以$x_k \in \overline{S}$. 故$S$中最多只含$(k-1)$个顶点, 和$|S| = k$矛盾(空间障碍). 所以$G$是连通的. ∎

Proposition 5.11 设D是n阶简单有向图, 且$|E(D)| > (n-1)^2$, 则D是强连通的.

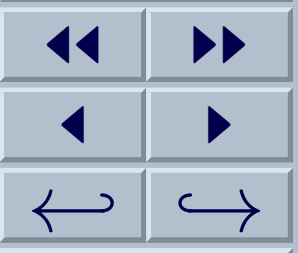
证明 (反证法) 若D是非强连通的, 由定理1.4.2(b), 则存在非空真子集$S \subset V(D)$使$E^+(S, \overline{S}) = \emptyset$. 令$k = |S|$, 则

$$\begin{aligned} |E(D)| \leqslant & \quad k(k-1) + (n-k)(n-k-1) + k(n-k) \\ = & \quad (n-1)^2 - (k-1)(n-k-1) \leqslant (n-1)^2, \end{aligned}$$

这与假设矛盾. 所以D是强连通的. ∎



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



作业

1.4.3 证明: 设D是简单图, 且$k=\max\{\delta^+,\delta^-\}$, 则$D$中含长至少为$k$的有向路.

1.4.7 设G是n阶简单图, 并且$\omega=\omega(G)$. 证明: (a) $e(G)\leqslant\frac{1}{2}(n-\omega)(n-\omega+1)$;

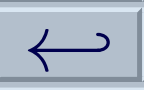
(b) 若$e(G)>\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, 则$G$是连通的.

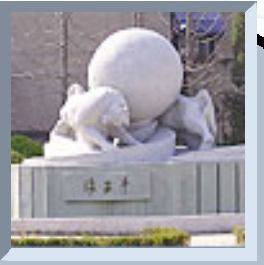


Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示







Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示








6 回与圈

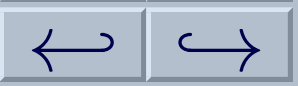
- 长为奇数、偶数的回(circuit)(圈(cycle))分别称为**奇** (odd)、**偶** (even) **回** (**圈**). 用 C_n 表示长为 n 的圈.
- 图中最大(或最小)长度的圈称为**最长**(或**最短**) **圈** (longest or shortest cycle).
- G (或D) 中最短圈(或有向圈)的长度称为G(或D)的围长 (girth), 记为 $g(G)$ (或 $g(D)$).
- G (或D) 中最长圈(或有向圈)的长度称为G(或D)的周长(circumference),记为 $c(G)$ (或 $c(D)$).
- 简单图 G(或 D) 被称为**泛圈的** (pancyclic), 如果对任何整数 $k(3 \leqslant k \leqslant |V|)$, G (或 D) 中存在长为 k 的圈 (有向圈).



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示







- G(或D)被称为**点泛圈的**(vertex-pancyclic), 如果对任意顶点u和任何整数$k(3 \leqslant k \leqslant |V|)$, G(或D)中存在长为k且含u的圈(有向圈).

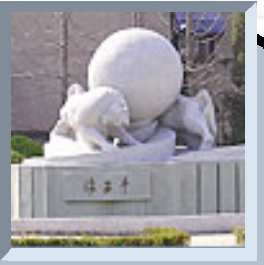
Proposition 6.1 设G是无向图. 若$\delta = \delta(G) \geq 2$, 则$G$含圈. 若$G$是简单图, 则$G$含长至少为$\delta+1$的圈.

证明 略, 见前面作业.

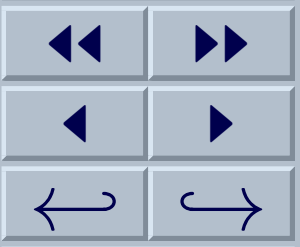
定理 1.5.1 (J. W. Moon, 1966) **阶至少为 3 的强连通竞赛图是点泛圈的.**

证明 设D是$n(\geqslant 3)$阶强连通竞赛图, u是D中任意顶点, $k(3 \leqslant k \leqslant n)$是任意整数. 对$k \geqslant 3$用归纳法.

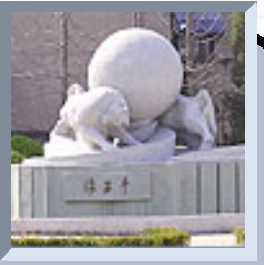
- 当$k=3$时, 令$S = N_D^+(u), T = N_D^-(u)$. 因为$D$是强连通的, 所以, $S \neq \emptyset$, $T \neq \emptyset$.



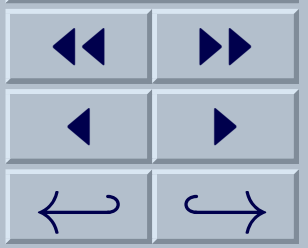
Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



- 又由于D是竞赛图，所以，$T\cup\{u\}=\overline{S}$. 因此由定理1.4.2(b)知，$E^+(S,T)=E^+(S,\overline{S})\neq\emptyset$.
- 于是，存在$x\in S$，$y\in T$使$(x,y)\in E(D)$，(u,x,y,u)是D中长为3的有向圈且含u(参见图10(a))．结论成立.
- 假设u含在长为$k(3\leqslant k<n)$的有向圈中，要证明u也含在长为$(k+1)$的有向圈中．设$C=(u_0,u_1,\cdots,u_k)$是D中长为k的有向圈，其中$u_0=u_k=u$.
- 若存在$x\in V\setminus V(C)$使$N_D^+(x)\cap V(C)\neq\emptyset$且$N_D^-(x)\cap V(C)\neq\emptyset$，则因为$D$是竞赛图，所以$C$中存在相邻两顶点$u_i$和$u_{i+1}$使$(u_i,x),(x,u_{i+1})\in E(D)$. 于是$u$含在长为$(k+1)$的有向圈$(u_0,u_1,\cdots,u_i,x,u_{i+1},\cdots,u_k)$中.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



- 下设对任何$x \in V \setminus V(C)$, $N_D^+(x) \cap V(C) = \emptyset$, 或者$N_D^-(x) \cap V(C) = \emptyset$. 令

$$S = \{x \in V \setminus V(C) : N_D^+(x) \cap V(C) = \emptyset\},$$
$$T = \{y \in V \setminus V(C) : N_D^-(y) \cap V(C) = \emptyset\}.$$

显然, $S \neq \emptyset$, $T \neq \emptyset$ 且$E^+(S,T) \neq \emptyset$.

- 设$x \in S$, $y \in T$ 使得$(x,y) \in E(D)$ (见图 10 (b)). 于是, u含在长为$(k+1)$的有向圈$(u_0, x, y, u_2, \cdots, u_k)$中. ∎



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示







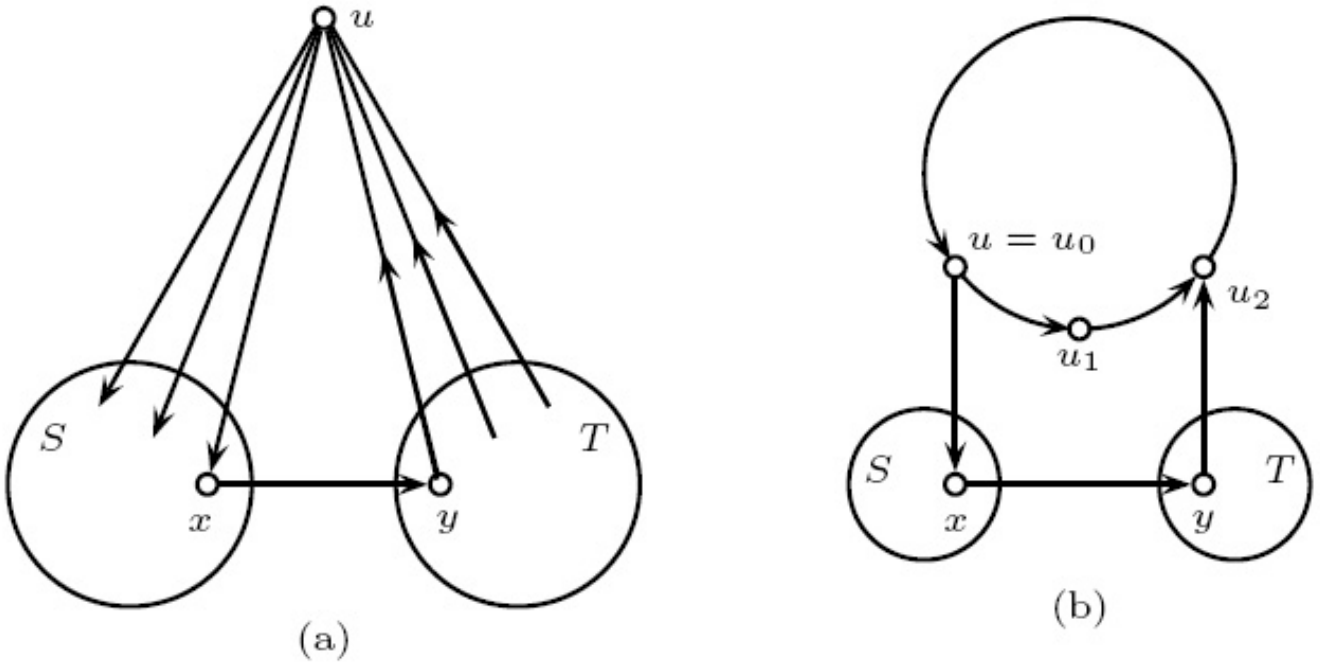



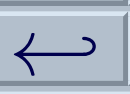
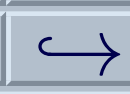
Figure 10: 定理 1.5.1 的证明辅助图



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示





7 距离与直径定义

- 设G是图, $x,y \in V(G)$. G 中所有$x-y$路的最短长度称为从x到y的距离 (distance), 记为 $d_G(x,y)$. 长度等于距离的路称为最短路 (shortest path).
- 若G中不存在$x-y$ 路, 则约定$d_G(x,y)=\infty$.

$$d(G)=diam(G) = \max\{d_G(x,y):\forall\ x,y\in V(G)\} = \max_{x\in V}\max_{y\in V} d_G(x,y)$$

称为G的直径 (diameter).

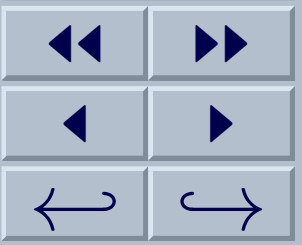
- 定义图G的半径(radius)

$$r(G)=rad(G)=\min_{x\in V}\max_{y\in V} d_G(x,y).$$

A vertex $x\in V(G)$ is called a central vertex if $\max_{y\in V} d_G(x,y)=rad(G)$.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



Proposition 7.1 (Triangle inequality) *For* $x, y, z \in V(G)$,

$$d_G(x,y) \leq d_G(x,z) + d_G(z,y).$$

Proposition 7.2

$$rad(G) \leq d(G) \leq 2rad(G).$$

Proposition 7.3 *Let* G *be a graph with* $\Delta(G) \leq \Delta$ *and* $rad(G) = k$. *Then*

$$|V(G)| < \frac{\Delta}{\Delta - 2}(\Delta - 1)^k.$$

Proof:

- Let z be a central vertex of G and let

$$N_i(z) = \{x \in V(G) \mid d_G(x,z) = i\}$$

for $i \in [0,k]$. Then $V(G) = \cup_{i=0}^{k} N_i(z)$.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示








- Moreover, $|N_0(z)| = 1, |N_1(z)| \leq \Delta, |N_2(z)| \leq \Delta(\Delta-1)$ and generally, $|N_i(z)| \leq \Delta(\Delta-1)^{i-1}$ for $i \in [0,k]$.
- Hence

$$\begin{aligned} |V(G)| &= \sum_{i=0}^{k} |N_i(z)| \\ &\leq 1 + \sum_{i=1}^{k} \Delta(\Delta-1)^{i-1} \\ &= 1 + \frac{\Delta}{\Delta-2}((\Delta-1)^k - 1) \\ &< \frac{\Delta}{\Delta-2}(\Delta-1)^k. \end{aligned}$$

Proposition 7.4 *Let G be a graph, then*

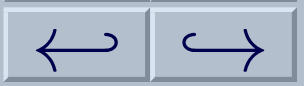
$$g(G) \leq 2d(G) + 1.$$



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示





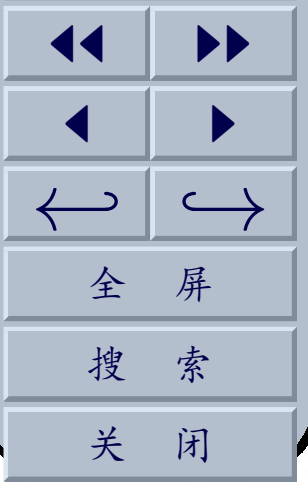


Proof: By contradiction.

- Assume C is a shortest cycle with length $\geq 2d(G)+2$. Then C has two vertices whose distance in $C \geq d(G)+1$.
- In G, these vertices have lesser distance; any shortest path P between them is therefore not a subgraph of C.
- Let xPy be the segment of P between x and y such that xPy contains no vertices of C except x and y.
- Together with the shorter of the two $x-y$ paths in C, this path xPy forms a shorter cycle than C, a contradiction. ∎



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



二部图判定定理

定理 1.5.2 (2部图判定定理, König, 1936) 图 G 是2部图 $\Leftrightarrow$ G 不含奇圈.

证明 ($\Rightarrow$)

- 设 G 是2部划分为 $\{X,Y\}$ 的2部图, $C = x_0x_1\cdots x_{k-1}x_0$ 是 G 中长为 k 的圈.
- 不失一般性, 设 $x_0 \in X$. 因为 G 是2部图, 所以 $x_1 \in Y, x_2 \in X, x_3 \in Y, \cdots$. 一般地, $x_{2i} \in X$, $x_{2i+1} \in Y$.
- 由于 $x_0 \in X$, 所以 $x_{k-1} \in Y$. 即 $k-1$ 为奇数, 于是 k 是偶数. 因此, C 是偶圈.

($\Leftarrow$)

- 不妨设 G 为连通图.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



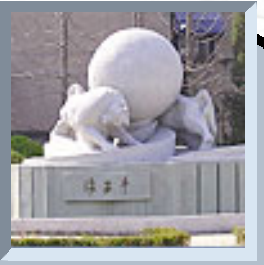





- 由于G不含奇圈, 所以G中无环. 不妨设$|V(G)| \geqslant 2$. 任取$u \in V(G)$. 令

$$X = \{x \in V(G) : \ d_G(u,x) \text{ 是偶数}\}$$
$$Y = \{y \in V(G) : \ d_G(u,y) \text{ 是奇数}\}.$$

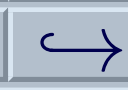
- 显然, $u \in X$ 且$Y \neq \emptyset$, $\{X,Y\}$是$V(G)$ 的划分.
- 下证$E(G[Y]) = \emptyset$. 若$|Y| = 1$, 则不证自明.
- 设$|Y| \geqslant 2$, $y,z \in Y, y \neq z$.
- 令 P和Q分别是最短u,y 路和u,z路,
- 由Y的定义知P和Q的长都是奇数.
- 若$yz \in E(G)$, 则$P \cup Q \cup \{yz\}$ (允许重边) 是G中奇长闭链, 又因为闭链可以分解成若干边不交的圈的并, 所以G含奇圈，和假设矛盾.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示





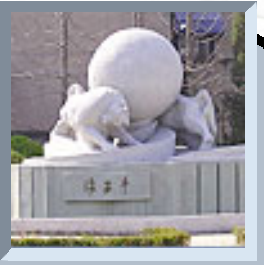
- 同样可证X中任何两顶点也不相邻, 因此G是2部图. ∎

推论 1.5.2.2 有向图D是2部图当且仅当D的基础图(underlying graph)是2 部图.

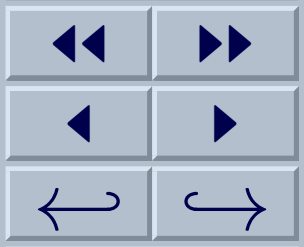
Proposition 7.5 若无向图G中不含奇度点, 则G存在平衡定向图.

证明

- 对边数$e(G) \geqslant 0$ 用归纳法.
- 当$e(G) = 0$时, G是空图, 结论自然成立.
- 假定$e(G) > 0$且结论对所有n阶且不含奇度点边数$< e(G)$的无向图都存在平衡定向图.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



全 屏
搜 索
关 闭

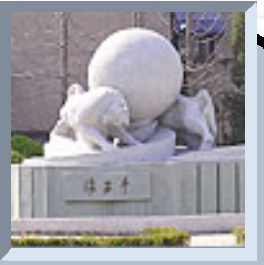
- 令 $S=\{x\in V(G):d_G(x)=0\}$, 并令 $G_1=G-S$, 则 $\delta(G_1)\geqslant 2$ 且不含奇度点.
- 则 G_1 含圈, 设 C 为 G 中的圈.
- 指定 C 的正向并按此方向将 C 的边定向得有向圈, 设为 C'.
- 令 $G_2=G-E(C)$, 则 $|V(G_2)|=n$,

$$e(G_2)=e(G)-e(C)<e(G),$$

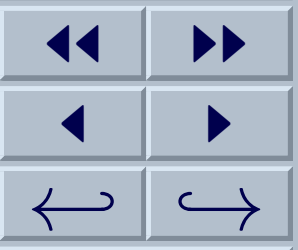
且 G_2 中无奇度点.

- 由归纳假设知 G_2 存在平衡定向图 D'. 于是, $D=D'\cup C'$ 即为 G 的平衡定向图. ∎

Proposition 7.6 *Any graph G has an almost balanced orientation (that is $|d^+(x)-d^-(x)|\leq 1$ for any $x\in V(G)$).*



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



Proof.

- By Hand-shaking Theorem, G has an even number of vertices of odd degree. Hence we can add extra edges (for example red edges) to G such that we obtain a graph H which has no vertices of odd degree.
- By Proposition 7.5, H has a balanced orientation D. Then delete the red edges from D, then we get an almost balanced orientation of G (WHY?).

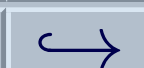
Proposition 7.7 设G是n阶非2部简单无向图，且$e(G) > \frac{1}{4}(n-1)^2+1$，则$G$含三角形. 或者等价地，$\mathrm{ex}_{nb}(n, K_3) \leq \frac{1}{4}(n-1)^2+1$，且等号成立当且仅当$G = C_5(\lceil \frac{n}{2} \rceil - 2, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, 1, 1, 1)$.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示





证明 (反证法)

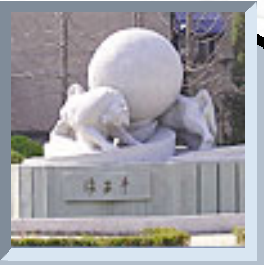
- 设G是不含三角形的非2部图, 则由推论1.5.2.2知G含奇圈.
- 取G中最短的奇圈C. 令$S=V(C)$, 则$s=|S|\geqslant 5$.
- 先证

$$|E(S,\overline{S})|\leqslant 2(n-s).$$

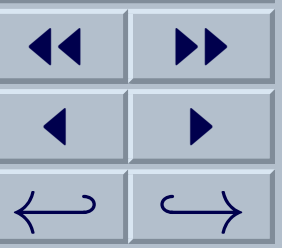
- (见后)
- 由C的选取知, $G[S]=C$, 即$e(G[S])=s$. 由于G不含三角形, 所以$G[\overline{S}]$不含三角形. 于是由Turán定理, 有

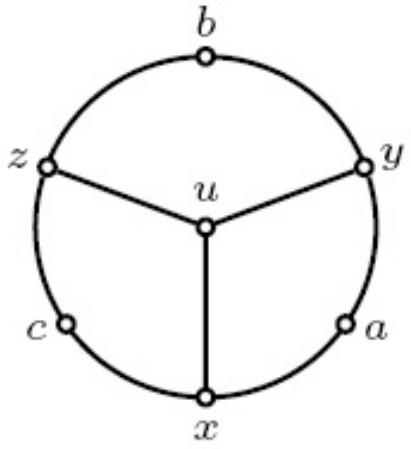
$$\begin{aligned} e(G) = &\quad e(G[S])+|(S,\overline{S})|+e(G[\overline{S}]) \\ \leqslant &\quad s+2(n-s)+\frac{1}{4}(n-s)^2\leqslant \frac{1}{4}(n-1)^2+1, \end{aligned}$$

矛盾于假定. 故G必含三角形. ∎



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



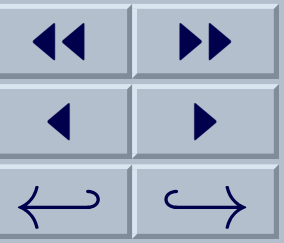


若不然，存在$u \in \overline{S}$使得$|N_G(u) \cap S| \geqslant 3$. 令$x,y,z \in N_G(u) \cap S$. 由于$G$不含三角形，所以存在三顶点$a,b,c \in S \setminus \{x,y,z\}$. 圈$C_1 = (u,x,\cdots,a,\cdots,y,u)$, $C_2 = (u,y,\cdots,b,\cdots,z,u)$和$C_3 = (u,z,\cdots,c,\cdots,x,u)$的长都小于$s$，且至少有一个是奇圈，矛盾于$C$的选取.

Figure 11: 例1.5.3



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示

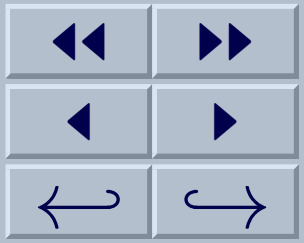


8 作业

1.5.6 设G是n阶非2部简单图，$k \geqslant 2$ 并且 $\delta(G) > \left\lfloor \frac{2n}{2k+1} \right\rfloor$. 证明: G中含有长$\leqslant 2k-1$的奇圈.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



9 欧拉(Euler)图

- 包含图中每条边的迹(或有向迹)称为该图的欧拉迹（Euler trail） (或欧拉有向迹).
- 起点为x终点为y的欧拉迹(或欧拉有向迹)记为欧拉xy迹(或欧拉(x,y) 迹).
- 闭的欧拉迹(欧拉有向迹)称为欧拉回(Euler circuit or Euler tour)(欧拉有向回).
- 含欧拉回的无向图和含欧拉有向回的有向图统称为欧拉图(Eulerian graph).



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示







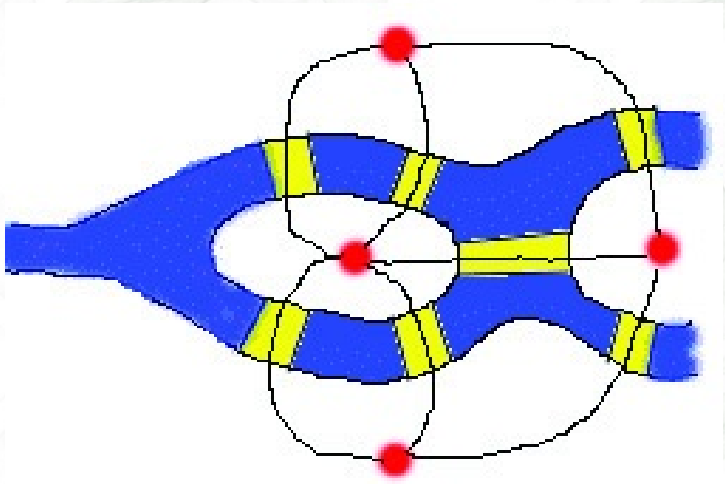



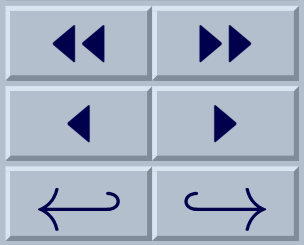
Figure 12: "Königsberg七桥问题"就归结为判断一个图是否为Euler图问题.

Euler图判定定理

下面结果首先由Euler在1736年在解决 Königsberg 七桥问题时给出, 但欧拉没有给出充分性证明, 其证明由C. Hierholzer (1840-1871)给出. 实际上, 1873 年, Hierholzer 已经去世了, 是他的同事把 Hierholzer 生前告诉他的证明整理出来, 并以 Hierholzer 的单独署名发表的.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示

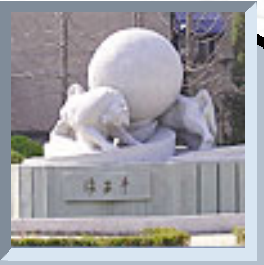


Theorem 9.1 (Euler, 1736) *G is Eulerian if and only if G is connected and has no vertex of odd degree.*

证明 ($\Rightarrow$) Clearly true since if a vertex v appears k times in a Euler tour of G, then $d_G(v) = 2k$.

($\Leftarrow$)

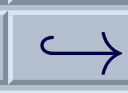
- Let
$$T = v_0 e_0 v_1 e_1 v_2 \cdots v_{l-1} e_{l-1} v_l$$
be a longest trail in G.
- Since T cannot be extended, it already contains all the edges at v_l. Since there are even number of edges at v_l, $v_l = v_0$ (WHY). That is T is closed.
- If T contains all the edges of G, then we are done.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示





- Suppose to the contrary that there is an edge $e = uv_i$ outside of T (such an edge exists since G is connected). Then

$$uev_ie_iv_{i+1}\cdots v_{l-1}e_{l-1}v_le_0v_1\cdots v_{i-1}e_{i-1}v_i = T + e$$

is a trail of length longer than T, a contradiction.

Corollary 9.2 非平凡图G有*Euler*迹$\Leftrightarrow$ G 连通且最多有两个奇度点.

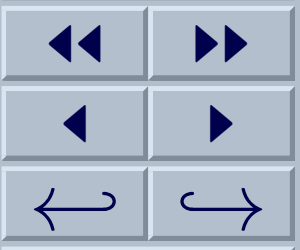
证明 略。

定理 1.6 (Euler 有向图判定定理) (D. König, 1936) 有向图D是Euler 图$\Leftrightarrow$ D是连通的平衡图.

证明 ($\Rightarrow$)



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



- 设D是 Euler 图, 则由定义知D是连通的.
- 设C是D中 Euler 有向回.
- 由于C包含连通图D中每条边和每个顶点, 所以对任意 $x \in V(C)$, 沿C的正向行进时, 作为C 的顶点x每出现一次, 就有一条边进入x, 同时也有一条边离开x. 于是$d_D^+(x) = d_D^-(x)$, 即D是平衡图.

($\Leftarrow$) 证发一：仿无向图

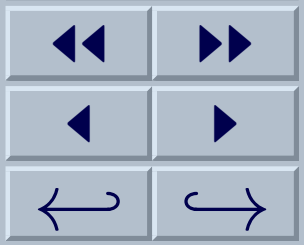
证法二：反证。

- 设D是不含Euler有向回的平衡图的最小反例.
- 由于$\delta^+ = \delta^- \neq 0$, 所以(习题1.6.2)$D$中含有向圈.
- 取D中有向圈C. 令$D' = D - E(C)$ 且

$$D'' = D' - \{x | d_{D'}^+(x) = d_{D'}^-(x) = 0\}.$$



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



则D''的每一个非平凡连通分支$D_1,\cdots,D_k$仍为连通平衡有向图且比D边数更少。

- 因此每个D_i含有向Euler回C_i且$C,C_1,\cdots,C_k$两两边不交. 则$C\cup C_1\cdots\cup C_k$就是D的欧拉有向回. 和假设矛盾. ∎

推论 1.6.1 设D是非平凡连通有向图, 则D有Euler (x,y) 迹$\Leftrightarrow$

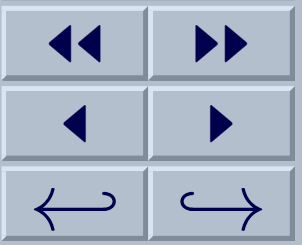
$$d_D^+(x)-d_D^-(x)=1=d_D^-(y)-d_D^+(y),$$

而且对任何$u\in V(D)\setminus\{x,y\}$均有$d_D^+(u)=d_D^-(u)$.

证明 令在D中添加一条以y为起点且以x为终点的有向边a后得到的有向图为D'.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



D 有Euler (x,y) 迹 $\Leftrightarrow$ D' 中Euler 有向回.

$\Leftrightarrow$ D' 是平衡图.

$\Leftrightarrow$ $d_D^+(u) = d_D^-(u),\ \forall\ u \in V(D) \setminus \{x,y\}$

$d_D^+(x) = d_D^-(x) + 1$

$d_D^-(y) = d_D^+(y) + 1.$

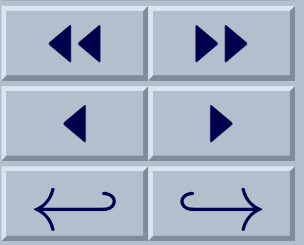
∎

作业

1.6.8 证明: 连通图 G 是 Euler 图 $\Leftrightarrow$ G 的每条边都包含在奇数条圈中.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



10 Hamilton 图

- 包含G(或D)中每个顶点的圈(或有向圈)称为Hamilton 圈 (或Hamilton 有向圈).
- 含Hamilton 圈的无向图和含Hamilton 有向圈的有向图统称为Hamilton 图(Hamiltonian graph). 不含Hamilton 圈的图称为非Hamilton 图.
- 例如，完全图K_n 和强连通的竞赛图都是Hamilton（有向）图.
- 判断一个给定的图是否是Hamilton 图的问题称为Hamilton 问题.
- Hamilton 问题是NPC 的，即从算法角度讲没有多项式时间算法判断一个图是否为Hamilton 图及找出一个图的Hamilton 圈。同时，我们也没有像Euler 问题那样的充分必要条件。



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示







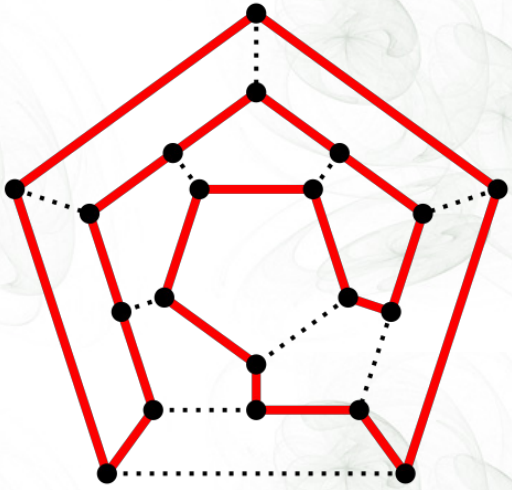
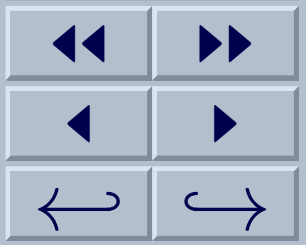


Figure 13: William Rowan Hamilton (1805 – 1865): 爱尔兰物理、天文、数学家. Hamilton 问题是从所谓的“周游世界问题”的游戏中提出来的. 1856 年, 著名的爱尔兰数学家 Sir William Hamilton (1805-1865) 设计了一个游戏: 给定世界上 20 个城市, 用一个代表地球的十二面体 (见图) 的 20 个顶点分别代表这 20 个城市. 从某一顶点出发, 沿着十二面体的棱, 经过每个顶点恰好一次, 最后回到出发点. 这个问题归结为在如图所示的图中寻找一条 Hamilton 圈. 这条圈是存在的, 如图中红边所示.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



非 Hamilton 图确实存在. 如下例所示Petersen 图。

例1.7.1 Petersen 图不是 Hamilton 图.

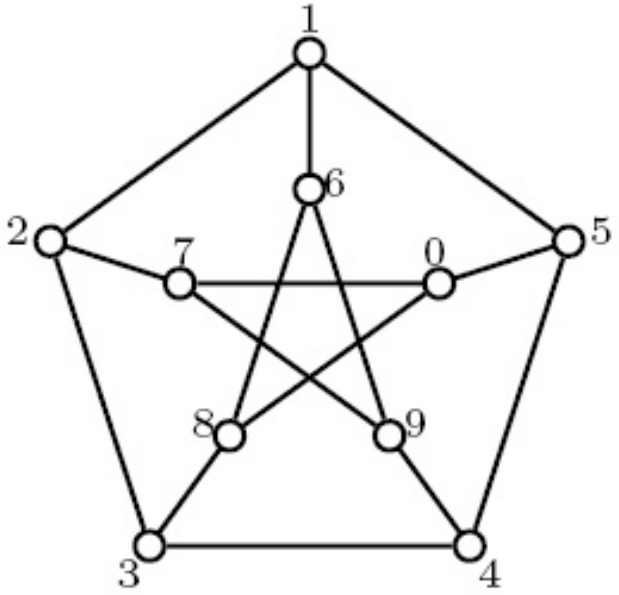
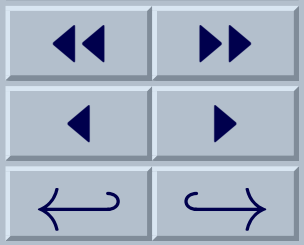


Figure 14: Petersen 图不是 Hamilton 图

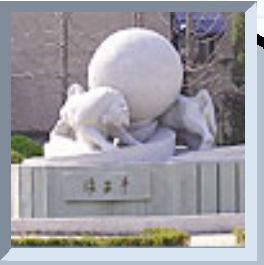


Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



证明：

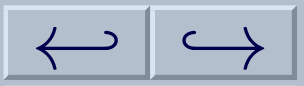
- 设 Petersen 图 G (如图所示) 是 Hamilton 图.
- 令边子集 $T = \{16, 27, 38, 49, 50\}$, 则 $G - T$ 是非连通图. 所以, G 中任何一条 Hamilton 圈必含 T 中偶条边.
- 容易看出, 若某圈只含 T 中两条边, 则该圈必不是 Hamilton 圈. 于是 G 中每条 Hamilton 圈必含 T 中 4 条边.
- 不妨设 C 是含边 $27, 38, 49, 50$ 不含 16 的 Hamilton 圈.
- 则 C 必含边 $12, 15, 68, 69,$ 并且边 $23, 45$ 必不在 C 中.
- 由于顶点 3 和 4 在 C 中, 所以边 34 必在 C 中. 于是边集 $\{34, 49, 96, 68, 83\}$ 构成一条圈且含在 C 中, 这不可能. 因而 Petersen 图不是 Hamilton 图. ∎



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示







定理 1.7.1 设 G 是 **Hamilton 图**, 则

$$\omega(G-S) \leqslant |S|, \ \forall\, S \subset V(G).$$

证明 设 C 是 G 中 Hamilton 圈, 则

$$\omega(C-S) \leqslant |S|, \ \forall\, S \subset V(C) = V(G).$$

由于 $C-S$ 是 $G-S$ 的支撑子图, 所以

$$\omega(G-S) \leqslant \omega(C-S) \leqslant |S|, \ \forall\, S \subset V(G).$$

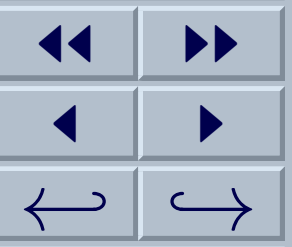
定理得证. ∎

推论 1.7.1.1 每个 **Hamilton 图都无割点.**

推论 1.7.1.2 奇阶 2 部图是非 **Hamilton 图.**



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



判定Hamilton图的充分条件

定理1.7.2 (O. Ore, 1960, Ore 条件) 设G是$n(\geqslant 3)$阶简单图. 若G中任何不相邻两顶点x 和y均有$d_G(x)+d_G(y)\geqslant n$, 则G是Hamilton 图.

证明　方法1

- 设G是满足假定条件的极大非Hamilton图, 即G是满足假定条件的非Hamilton 图, 但对G中任何不相邻的两顶点x 和y, $G+xy$是Hamilton图.
- 因为G不是完全图，故G中必有不相邻顶点.
- 取G 中不相邻两顶点x 和y. 由假定$G+xy$是Hamilton 图, 且$G+xy$ 中任何Hamilton 圈都含边xy.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示








- 因此, G 中含连接 x 和 y 的 Hamilton 路

$$P : (x =)x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n(= y).$$

- 令

$$N^-(x) = \{x_i \in V(P) :\ xx_{i+1} \in E(G),\ 1 \leqslant i \leqslant n-2\},$$
$$N(y) = \{x_j \in V(P) :\ yx_j \in E(G),\ 2 \leqslant j \leqslant n-1\}.$$

  由于 G 是简单图, 所以, $|N^-(x)| = d_G(x)$, $|N(y)| = d_G(y)$.

- 由于 $y \notin N^-(x) \cup N(y)$ 中, 所以 $|N^-(x) \cup N(y)| \leqslant n-1$.

- 断言 $|N^-(x) \cap N(y)| = 0$. 这是因为, 若存在 $x_i \in N^-(x) \cap N(y)$, 则

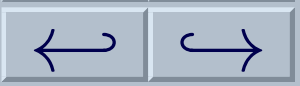
$$C = (x, x_{i+1}, \cdots, x_{\upsilon-1}, y, x_i, \cdots, x_2, x)$$



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示







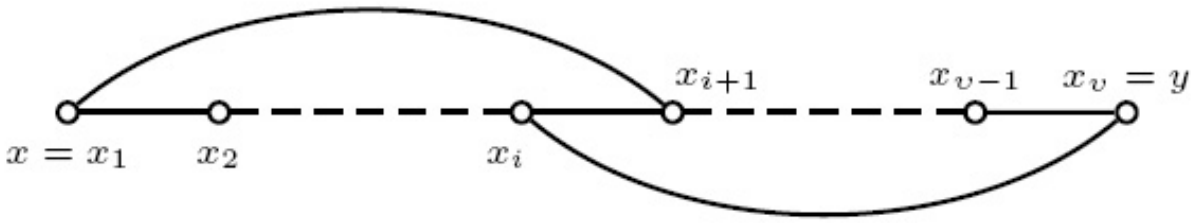


Figure 15: 定理1.7.2的证明辅助图

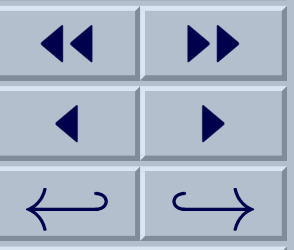
是G中Hamilton圈(见图 15). 和G 没有Hamilton圈的假定矛盾.

- 于是

$$d_G(x)+d_G(y)=|N^-(x)|+|N(y)|=|N^-(x)\cup N(y)|\leqslant n-1.$$



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示

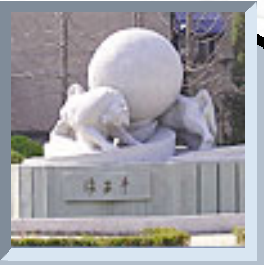


矛盾于定理中假定的条件. 所以, G 是 Hamilton 图.

方法 2 下面提供的论证方法对理解定理 1.7.3 的证明是很有用的.

- 由假设易知 G 是连通的并且含有圈. 设 $C=(x_1,x_2,\cdots,x_k,x_1)$ 是 G 中最长圈.
- 若 $k<n$, 则令 $R=V(G)\setminus\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$. 由于 G 是连通的, 所以存在 $y\in R$ 与 C 中某点相邻, 不妨设这个点为 x_k.
- 由 C 的最长性, $x_1y\notin E(G)$.
- 令

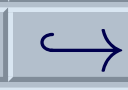
$$S=\{x_i\in V(C):\ x_1x_{i+1}\in E(G),\ 1\leqslant i\leqslant k-1\},$$
$$T=\{x_j\in V(C):\ yx_j\in E(G),\ 2\leqslant j\leqslant k\}.$$



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示





- 则

$$S\cap T=\emptyset \text{ 故 } |S\cup T|\leqslant k. \qquad (1)$$

这是因为, 若存在 $x_i\in S\cap T$, 则 G 含一条圈

$$C'=(x_1,x_{i+1},\cdots,x_k,y,x_i,\cdots,x_2,x_1)$$

且 $|C'|=|C|+1$, 矛盾于 C 的最长性.

- 由式(1), x_1 和 y 在 C 上的邻点数目 $d_C(x_1)$ 和 $d_C(y)$ 满足:

$$d_C(x_1)+d_C(y)=|S|+|T|=|S\cup T|\leqslant k. \qquad (2)$$

- 另一方面, 由 C 的最长性知, 对任何 $z\in R$, $z\neq y$, 边 x_1z 和 yz 至多有一条存在.

- 所以 x_1 和 y 在 R 中的邻点数目 $d_R(x_1)$ 和 $d_R(y)$ 满足:

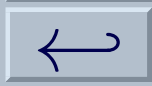
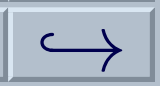
$$d_R(x_1)+d_R(y)\leqslant n-k-1. \qquad (3)$$



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示





- 由式(2)和(3), 有

$$d_G(x_1)+d_G(y)\leqslant k+n-k-1=n-1$$

和假设矛盾. 所以$k=n$, 即C是G中 Hamilton 圈.∎

方法三: 定理 5.2的推论。

推论 1.7.2 (G. A. Dirac, 1952, Dirac 条件) 设G是n阶简单图. 若$\delta(G)\geqslant\frac{n}{2}$, $n\geqslant 3$, 则G是 Hamilton 图. ∎

（不依赖Ore 条件，给出Dirac定理的证明！）

Theorem 10.1 (A. Ghouila-Houri, 1960) 设D是n阶强连通简单有向图. 若 $\delta^0(D)=\min\{\delta^+(D),\delta^-(D)\}\geqslant\frac{n}{2}$, 则$D$是 *Hamilton* 图.

证明:



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



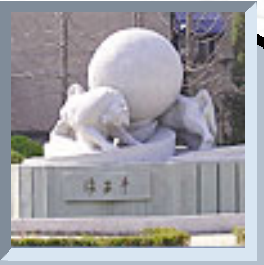





- By contradiction.
- Choose a longest directed cycle C in D. Then $|V(C)| \geq \frac{n}{2}$.
- Choose a longest dipath $P = v_1 v_2 \cdots v_k$ in $G - V(C)$. Then $N^-(v_1), N^+(v_k) \subseteq V(C) \cup V(P)$.
- Let $S = N^-(v_1) \cap V(C)$ and $T = N^+(v_k) \cap V(C)$. Then $T \cap S^+ = \emptyset$ and $dist_C(S^+, T) \geq k$, where $dist_C(S^+, T) = \min\{dist_C(s,t) : s \in S^+, t \in T\}$.
- Hence

$$\begin{aligned} n &\leq d^+(v_k) + d^-(v_1) \\ &\leq |S^+ \cup T| + 2(k-1) \\ &\leq |V(C)| - k + 1 + 2(k-1) \\ &\leq |V(C)| + k - 1, \end{aligned}$$

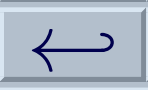
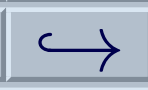
a contradiction.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示





Theorem 10.2 (H. Meyniel, 1973) 设D是n阶强连通简单图. 若对D中任何不相邻两顶点 x 和y 均有 $d_D(x)+d_D(y)\geqslant 2n-1$, 则$D$是 *Hamilton* 图.

证明： USING Bondy-Thomassen Theorem. (自学)

推论 1.7.3.4 (P. Camion, 1959) **每个强连通竞赛图都是 Hamilton 图.**

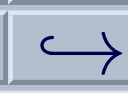
推论 1.7.3.6 (L. Rédei, 1934) **任何竞赛图含 Hamilton 路.**



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示





Conjecture 10.3 *(Seymour, 1974) Let G be a graph of order $n \geq 3$, and let k be a positive integer. If G has minimum degree*

$$\delta(G) \geq \frac{k}{k+1} n,$$

then G has a Hamilton cycle H such that $H^k \subseteq G$, where H^k is the graph on $V(G)$ in which two vertices are adjacent if and only if they have distance at most k in G.

For $k = 1$, this is precisely Dirac's Theorem.

Remark: Solved asymptopically?

作业

1.7.7 设G是不含割点, 且至少有$n \geq 3$个顶点的简单图. 证明: 若对任何距离为2的两顶点x和y均



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示








有 $\max\{d_G(x), d_G(y)\} \geqslant \frac{1}{2}n$ (称为Fan condition), 则 G 是Hamilton 图.

【参见Geng-Hua Fan （范更华）, New sufficient conditions for cycles in graphs, J. Combin. Theory Ser. B, 37 (1984), pp. 221-227】



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示








11 P and NP

- The class of problems solvable in polynomial time is usually denoted by P.
- The class *NP* consists, roughly speaking, of all those questions with the property that for any input that has a positive answer, there is a 'certificate' from which the correctness of this answer can be derived in polynomial time. Clearly, $P \subseteq NP$.
- For instance, the question:

  'Given a graph G, is G Hamiltonian?'

  belongs to NP. (WHY)
- In particular, NP does not mean: "non-polynomial time", the letters NP stand for "nondeterministic polynomial-time".



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示













Millennium Prize Problems

1. Birch and Swinnerton-Dyer conjecture (BSD)
2. Hodge conjecture
3. Navier – Stokes existence and smoothness
4. P versus NP problem
5. Poincaré conjecture (solved)
6. Riemann hypothesis
7. Yang-Mills existence and mass gap

NP-complete

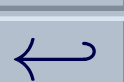
- A problem Π is *NP-complete* if $\Pi \in NP$ and every problem in NP can be reduced to Π, in polynomial time.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示








- It implies that if one NP-complete problem can be proved to be solvable in polynomial time, then each problem in NP can be solved in polynomial time. In other words: then $P = NP$ would follow.
- A problem Π is NP-hard if every problem in NP can be reduced in polynomial time to Π.
- For example, the halting problem:

  "Given a program and its input, will it run forever?"

  belongs to NP-hard but not belong to NP-complete.

Well Known NP-Complete problems

- SAT: Given a Boolean expression $f(x_1, \ldots, x_n)$, if there is $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \{0, 1\}$ such that $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) =$



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示







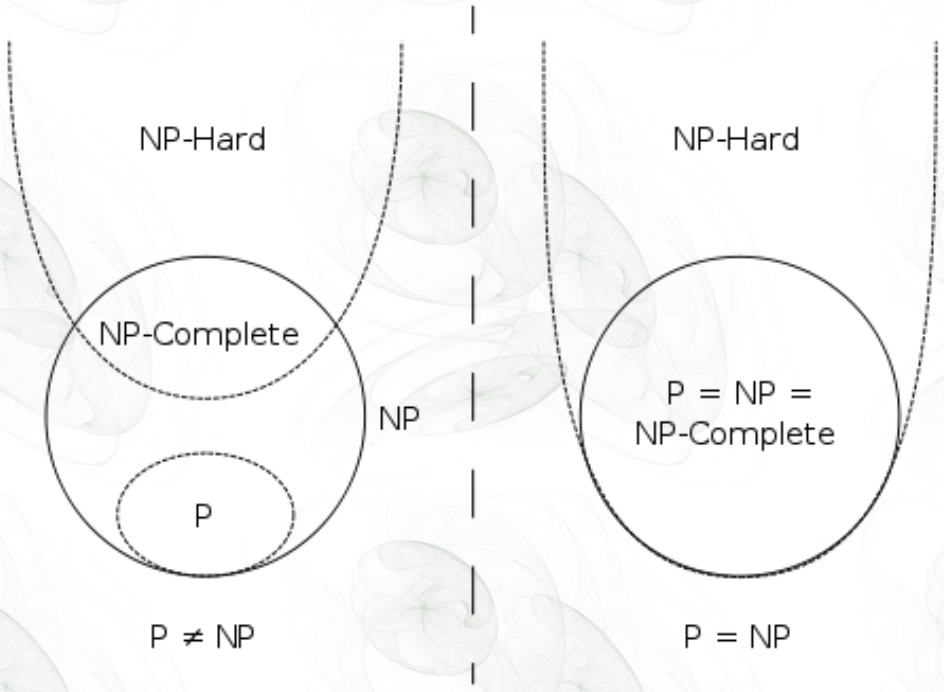
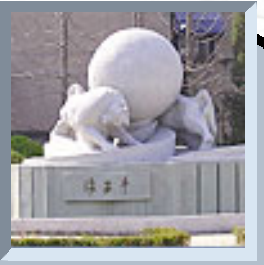
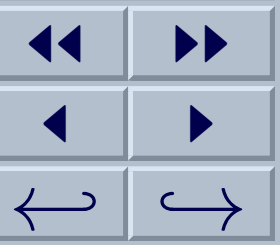



Figure 16: Relationship between P, NP, NP-Complete and NP-Hard

1. SAT is the first problem that was proven to be NP-complete



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



- 3-SAT: Determining the satisfiability of a Boolean expression in conjunctive normal form where each clause is limited to at most three literals is called 3-SAT.
- 3-SAT$\trianglelefteq$ Hamiltonian Cycle Problem.

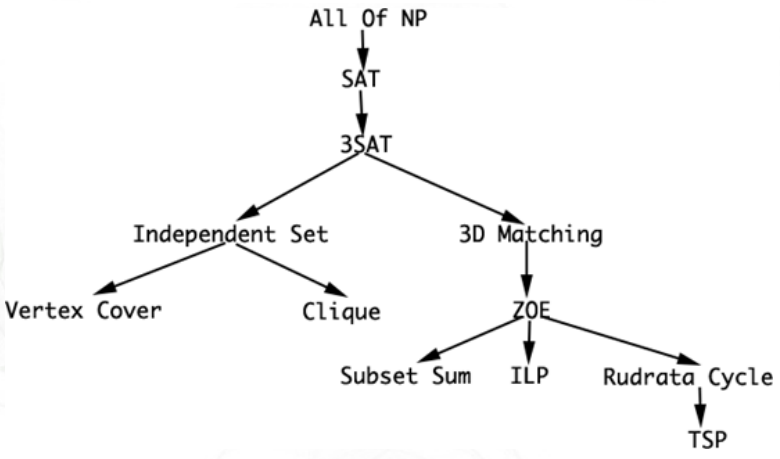


Figure 17: Reductions between NPCs



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示





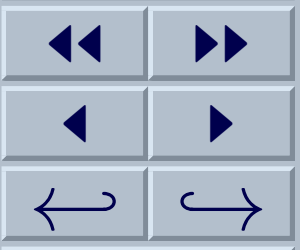



A proof of 3-SAT to HCP

- Construct n paths $P_1, \ldots, P_n$ corresponding to the n variables.
- Each path P_i consists of $2k$ vertices $v_{i,1}, \ldots, v_{i,2k}$, where k is the number of clauses in the Boolean expression.
- Add edges from $v_{i,j-1}$ to $v_{i,j}$ (resp. $v_{i,j}$ to $v_{i,j-1}$) on P_i to correspond to the assignment $x_i = 1$ (resp. $x_i = 0$).
- Add edges from $\{v_{i,1}, v_{i,2k}\}$ to $\{v_{i+1,1}, v_{i+1,2k}\}$.
- Add source s and target t, and add edges from s to $v_{1,1}, v_{1,2k}$, and from $v_{n,1}, v_{n,2k}$ to t, and from t to s.
- Add k vertices $c_1, \ldots, c_k$ to correspond to the k clauses in the Boolean expression.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



- If a clause c_j contains the variable x_i,

  1. Connect c_j to $v_{i,2j-1}, v_{i,2j}$

  2. The direction of the path connecting c_j, $v_{i,2j-1}$ and $v_{i,2j}$ should be

  a. right to left if c_j contains x_i

  b. left to right if c_j contains $\bar{x}_i$.

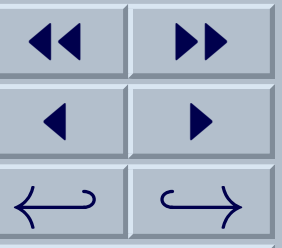
- For example,

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1\vee x_2\vee \bar{x}_3)\wedge(\bar{x}_2\vee x_3\vee \bar{x}_4)\wedge(\bar{x}_1\vee x_2\vee \bar{x}_4)$$

and its corresponding graph are shown in Fig 18.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



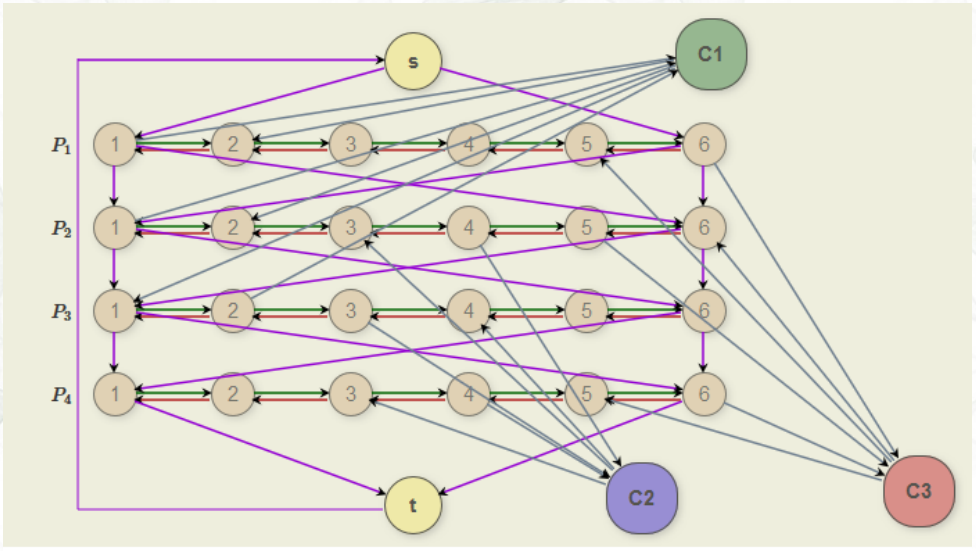
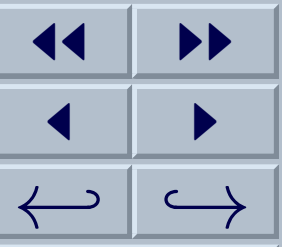


Figure 18: 3SAT to HCP

- Any Hamilton cycle in the constructed graph G traverses P_i either from right to left $(x_i = 0)$ or left to right $(x_i = 1)$.
- Fig. 20 shows a corresponding between a HC and an assignment of variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



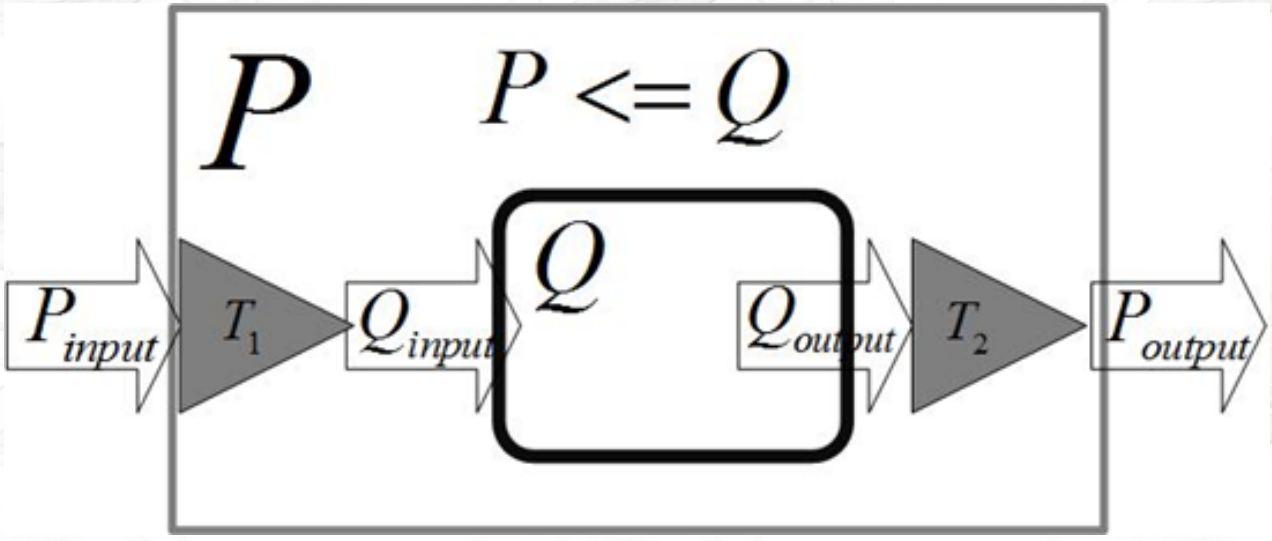
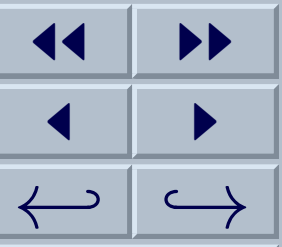


Figure 19: Reduction procedure



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



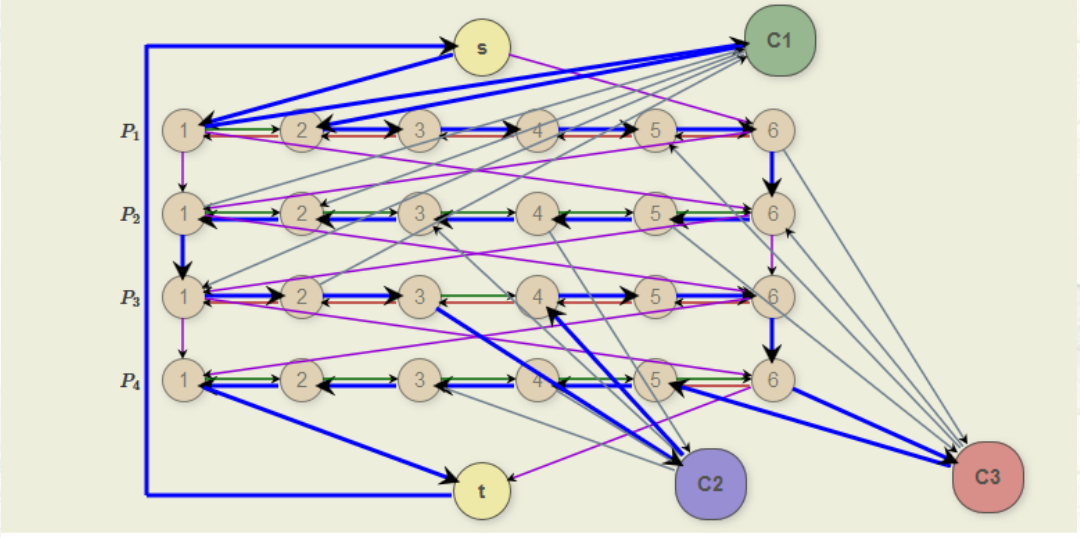


Figure 20: Hamiltonian Cycle and its corresponding assignment



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示








12 距离与直径

回顾距离与直径的概念。

- 对有向图D, 一般说来, $d_D(x,y) \neq d_D(y,x)$.

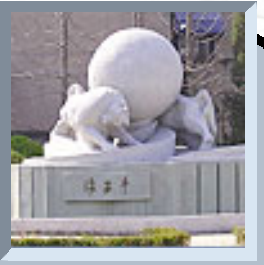
$$d(D) = \max\{d_D(x,y) : \forall\ x,y \in V(D)\}$$

称为 D 的**直径** (diameter).

- 对无向图G, $d_G(x,y) = d_G(y,x)$.

$$d(G) = \max\{d_G(x,y) : \forall\ x,y \in V(G)\}.$$

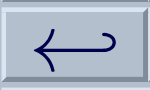
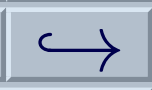
- 对于 n 个顶点的有向路 P_n, 它的直径 $d(P_n) = \infty$. 显然, $d(D) = 1 \Leftrightarrow K_n^* \subseteq D$.
- 对于 n 个顶点的无向路 P_n, 它的直径 $d(P_n) = n-1$; 并且也有 $d(G) = 1 \Leftrightarrow K_n \subseteq G$.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示





下界

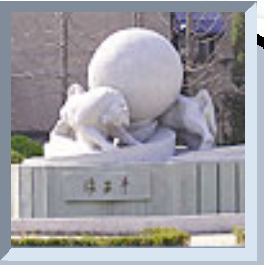
Proposition 12.1 设D 是强连通有向图. 如果它的阶$n \geqslant 2$, 最大度$\Delta = \max\{\Delta^+, \Delta^-\} \geqslant 1$, 那么

$$d(D) \geqslant \begin{cases} n-1, & \text{若 } \Delta = 1; \\ \lceil \log_{\Delta}(n(\Delta-1)+1) \rceil - 1, & \text{若 } \Delta \geqslant 2. \end{cases}$$

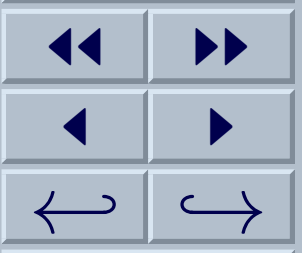
证明

- 因为G 是强连通有向图, 所以直径$d(G)$ 是确定的. 令$d(G) = d$.
- 对于给定的顶点x, 与x 距离为1 的顶点最多有Δ 个. 一般地, 与x 距离为i 的顶点最多有Δ^i 个. 因此,

$$n \leqslant 1 + \Delta + \Delta^2 + \cdots + \Delta^{d-1} + \Delta^d$$



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



$$= \begin{cases} d+1, & \text{若 } \Delta = 1; \\ \dfrac{\Delta^{d+1}-1}{\Delta-1}, & \text{若 } \Delta \geqslant 2. \end{cases} \tag{4}$$

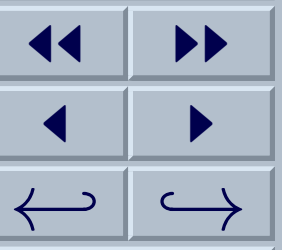
- 当 $\Delta = 1$ 时，由式(4)有，$n \leqslant d+1$，即 $d(G) = d \geqslant n-1$. 另一方面，显然有，$d(G) \leqslant n-1$. 所以，$d(G) = n-1$.
- 当 $\Delta \geqslant 2$ 时，由式(4)有 $(\Delta-1)n \leqslant \Delta^{d+1}-1$，即

$$d(G) = d \geqslant \lceil \log_{\Delta}(n(\Delta-1)+1) \rceil - 1.$$

得证. ∎



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



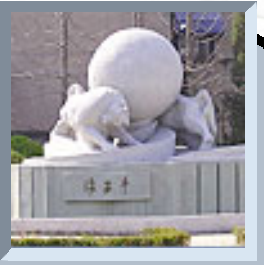
Proposition 12.2 设 G 是连通的无向图. 如果它的阶 $n \geqslant 3$, 最大度 $\Delta \geqslant 2$, 那么

$$d(G) \geqslant \begin{cases} \lfloor \frac{1}{2} n \rfloor, & \text{若 } \Delta = 2; \\ \left\lceil \log_{(\Delta-1)} \dfrac{n(\Delta-2)+2}{\Delta} \right\rceil, & \text{若 } \Delta \geqslant 3. \end{cases}$$

证明

- 因为 G 是连通的无向图, 所以直径 $d(G) = d < \infty$.
- 对于给定的顶点 x, 与 x 距离为 1 的顶点最多有 Δ 个; 与 x 距离为 2 的顶点最多为 $\Delta(\Delta-1)$ 个. 一般地, 与 x 距离为 i 的顶点最多有 $\Delta(\Delta-1)^{i-1}$ 个. 所以

$$n \leqslant 1 + \Delta + \Delta(\Delta-1) + \cdots + \Delta(\Delta-1)^{d-1}$$



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示





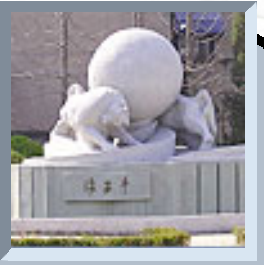


$$= \begin{cases} 2d+1, & \text{若 } \Delta = 2; \\ \dfrac{\Delta(\Delta-1)^d - 2}{\Delta - 2}, & \text{若 } \Delta \geqslant 3. \end{cases} \tag{5}$$

- 当 $\Delta = 2$ 时, 由式 (5) 有, $n \leqslant 2d+1$, 即 $d(G) = d \geqslant \lfloor \frac{1}{2} n \rfloor$.
- 当 $\Delta \geqslant 3$ 时, 由式 (5)有, $(\Delta-2)n \leqslant \Delta(\Delta-1)^d - 2$, 即

$$d(G) = d \geqslant \left\lceil \log_{(\Delta-1)} \frac{n(\Delta-2)+2}{\Delta} \right\rceil .$$

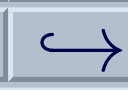
得证. ∎



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示





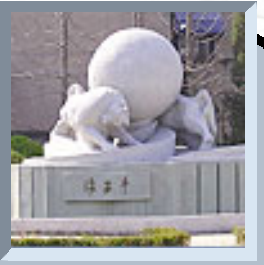



(Δ,d)-Moore 图

- 事实上，式(4)和(5)给出了给定最大度和直径的（有向）图阶数的上界称为(Δ,d)-**Moore界**. 记为

$$M(\Delta,d)=\max\{|V(G)|\mid \Delta(G)=\Delta,d(G)=d\}.$$

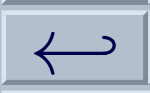
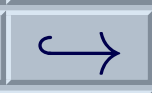
- 达到(Δ,d)-Moore界(4)的有向图称为(Δ,d)-**Moore有向图**;
- 达到(Δ,d)-Moore界(5)的无向图称为(Δ,d)-**Moore无向图**.
- 例如, 有向圈C_{d+1}是$(1,d)$-Moore有向图; 完全有向图$K^*_{\Delta+1}$是$(\Delta,1)$-Moore有向图.
- 无向圈C_{2d+1}是$(2,d)$-Moore无向图; 完全无向图$K_{\Delta+1}$是$(\Delta,1)$-Moore无向图.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示





- Petersen 图是 $(3,2)$-Moore 无向图.
- 事实上, 已知的 (Δ,d)-Moore 图很少. 在例 1.9.4 中, 我们将证明: 对于给定的 $\Delta \geqslant 2$ 和 $d \geqslant 2$, 不存在 (Δ,d)-Moore 有向图.

一个上界

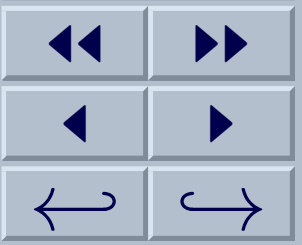
Proposition 12.3 设 G 是连通的无向图. 如果它的阶为 n, 最小度为 δ, 那么

$$d(G) \leqslant \frac{3n}{\delta+1}.$$

证明



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



- 因为对任何 n 阶连通无向图 G, 它的直径 $d(G) \leqslant n-1$, $n \geqslant \delta+1$, 所以, 在以下的讨论中, 不妨设 $\delta \geqslant 3$ 且 $d(G)=d \geqslant 4$.

- 设 $x,y \in V(G)$ 使得 $d_G(x,y)=d=d(G)$, 并设 $P=(x_0,x_1,\cdots,x_{d-1},x_d)$ 是 G 中最短的 (x,y) 路, 其中 $x_0=x$ 且 $x_d=y$.

- 由 P 的最短性知, 任何两顶点 x_{3i} 和 x_{3j} $(i \neq j)$ 有 $N_G(x_{3i}) \cap N_G(x_{3j})=\emptyset$.

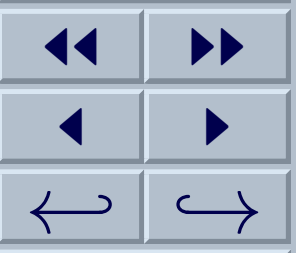
- 令 $h=\lfloor \frac{d}{3} \rfloor$. 则

$$\begin{aligned} n &\geqslant \sum_{i=0}^{h} |N_G(x_{3i}) \cup \{x_{3i}\}| \geq (h+1)(\delta+1) \\ &= \left(\left\lfloor \frac{d}{3} \right\rfloor +1 \right)(\delta+1) \geqslant \frac{d}{3}(\delta+1). \end{aligned}$$

命题得证. ∎



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



Proposition 12.4 (O. Ore, 1968) 设G是n阶连通直径为d的无向图, 则

$$e(G) \leqslant d + \frac{1}{2}(n-d+4)(n-d-1).$$

证明

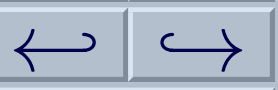
- 设x和y是G中使得$d_G(x,y) = d$的两顶点, 且P是最短xy路.
- 令$Z = V(G - V(P))$. 则对任何$z \in Z$均有$|N_G(z) \cap V(P)| \leqslant 3$.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示







- 因此,

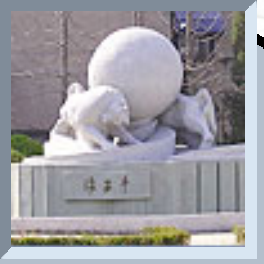
$$\begin{aligned} e(G) &= e(P)+e(G[Z])+|E_G(Z,P)| \\ &\leqslant d+\binom{n-d-1}{2}+3(n-d-1) \\ &= d+\tfrac{1}{2}(n-d-1)(n-d-2)+3(n-d-1) \\ &= d+\tfrac{1}{2}(n-d+4)(n-d-1) \end{aligned}$$

命题得证. ∎

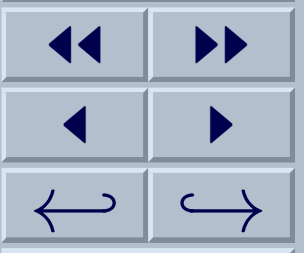
- 附注：(1) 这里我们没有刻画极图，能否刻画达到上界的极图；探索给定直径和阶数图的边数下界和极图；探索给定半径和阶数的极值问题。

  (2) The result is an induced version of Turán Problem: $\mathrm{ex}(n,H,P_{d+2}-ind)=\frac{1}{2}(n-d+4)(n-d-1)+d$ for some H (What's H here?).

  (3) What's the value of $\mathrm{ex}(n,H,C_{\geq d}-ind)=$ for some H?



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



平均距离

- 设G 是n 阶非平凡连通无向图或强连通有向图. G 的平均距离 (average or mean distance), 记为$m(G)$, 定义为

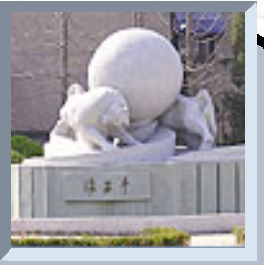
$$m(G)=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{x,y\in V}d_G(x,y).$$

- 因为$m(G)$仅是所有非零距离的算术平均值, 所有$m(G)\geqslant 1$, 等号成立$\Leftrightarrow G$ 是完全图.
- 令

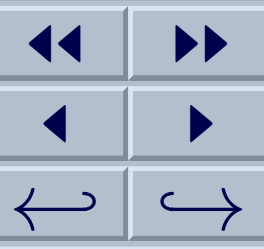
$$\sigma(G)=\sum_{x,y\in V}d_G(x,y).$$

表示图G 中所有不同顶点对之间的距离和.

- 例如, 对于n阶星$K_{1,n-1}$, 容易计算$\sigma(K_{1,n-1})=2(n-1)^2$, $m(K_{1,n-1})=2(n-1)/n$.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



- 考虑有向圈 $C_n(n \geqslant 3)$ 和 C_n 中固定的顶点 x_0. 因为从 x_0 到任何其它顶点的距离之和为 $1+2+\cdots+n-1=\frac{1}{2}n(n-1)$, 所以,

$$\sigma(C_n)=n^2(n-1)/2, \qquad m(C_n)=n/2.$$

下面的例子给出 $\sigma(G)$ 的下界, 它的无向图形式是由 R. C. Entringer, D. E. Jackson, P. J. Slater (1977) 得到的; 有向图形式是由 C. P. Ng, H. H. Teh (1978) 得到的.

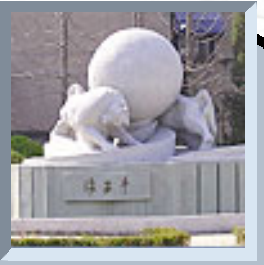
例 1.8.5 设 G 是 n 个顶点和 m 条边的图.

(a) 如果 G 是无向图, 那么 $\sigma(G) \geqslant 2n(n-1)-2m$;

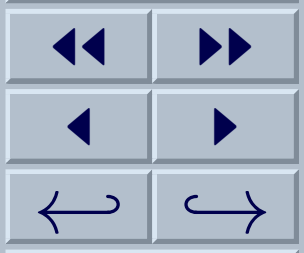
(b) 如果 G 是有向图, 那么 $\sigma(G) \geqslant 2n(n-1)-m$;

而且当 $d(G) \leqslant 2$ 时, 等号成立.

证明



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



- 设无向图G是从完全图K_n移去p条边得到的. 于是,

$$m = e(G) = \frac{1}{2}n(n-1) - p. \tag{6}$$

- 设移去的 p 条边为 $x_1y_1, x_2y_2, \cdots, x_py_p$. 那么

$$\sigma(G) = 2\sum_{xy \in E(G)} d_G(x,y) + 2\sum_{i=1}^{p} d_G(x_i,y_i). \tag{7}$$

- 显然, 若$xy \in E(G)$, 则$d_G(x,y) = 1$; 其余情形有$d_G(x,y) \geqslant 2$. 因此, 从式(7), 有

$$\sigma(G) \geqslant 2m + 4p. \tag{8}$$

结合式 (6) 和式(8) 得到结论(a).

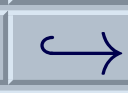
- 同样的, 考虑有向图D, 有$m = e(D) = e(K_n^*) - p = n(n-1) - p$.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示





- 于是,

$$\begin{aligned}\sigma(D) &= \sum_{(x,y)\in E(D)} d_D(x,y) + \sum_{i=1}^{p} d_D(x_i,y_i)\\ &\geqslant m+2p = 2n(n-1)-m.\end{aligned}$$

- 从证明中可以看出, 最后一个结论明显成立. ∎

至于 $m(G)$ 的上界, M. Kouider 和 P. Winkler (1997) 得到下面的结果:

$$m(G) \leqslant \frac{n}{\delta+1} + 2.$$

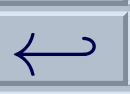
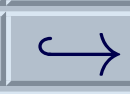
但证明有一定难度, 有兴趣的读者可以参考原文.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示





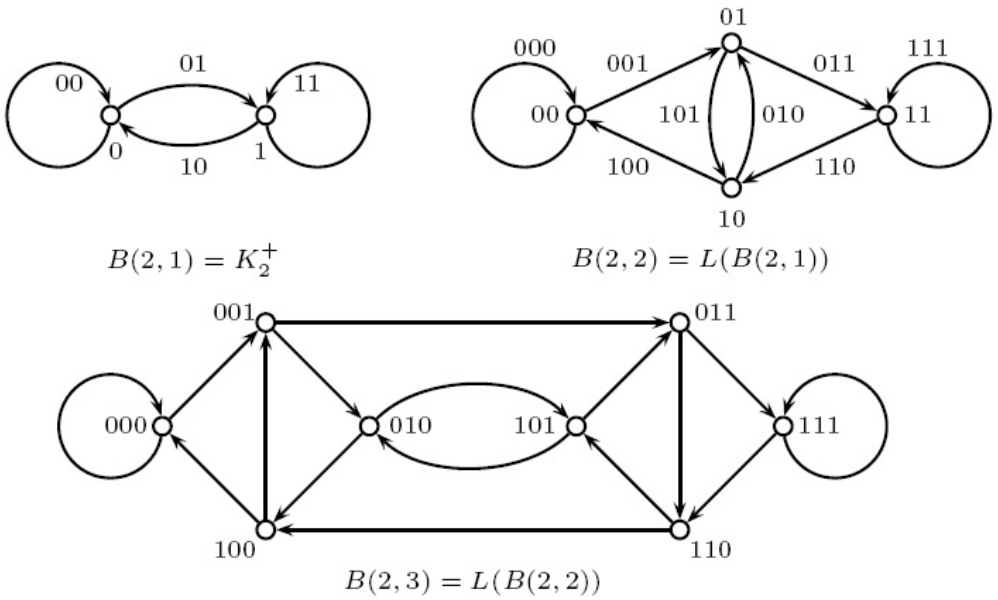


Figure 21: 有向图 D 和它的线图 $L(D)$

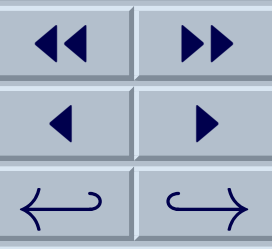
线图

- 非空有向图 D 的线图 (line digraph) $L(D)$ 是以 $E(D)$ 为顶点集的图, 并且对 $a_i, a_j \in E(D)$, 则

  $(a_i, a_j) \in E(L(D)) \Leftrightarrow$ 在 D 中, a_i 的终点是 a_j 的起点.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



- 设 $L(D)$ 是图 D 的线图. 如果 $L(D)$ 非空且没有孤立点, 那么存在 $L(D)$ 的线图 $L(L(D))$. 可以递归地定义 D 的 *n 重线图*

$$L^n(D) = L(L^{n-1}(D)),$$

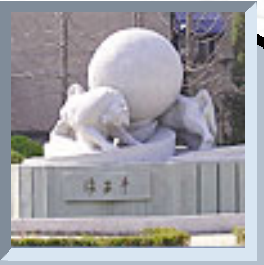
其中 $L^0(D)$ 和 $L^1(D)$ 分别为 D 和 $L(D)$, 并且假定 $L^{n-1}(D)$ 是非空的, 且没有孤立点.

- 例如, de Bruijn 有向图和Kautz 有向图

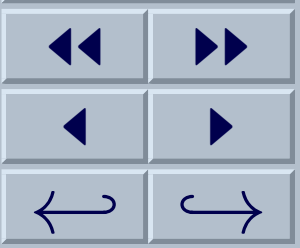
$$B(d,n) = L^{n-1}(B(d,1)) = L^{n-1}(K_n^+);$$

$$K(d,n) = L^{n-1}(K(d,1)) = L^{n-1}(K_{d+1}^*).$$

- A graph G is claw-free if G does not contain a $K_{1,3}$ as an induced subgraph of G.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



Proposition 12.5 *The line graph $L(G)$ of any graph G is claw-free.*

Proof: homework.

定理 1.8.1 (M. Aigner, 1967) 设 D 是非平凡的强连通有向图, L 是它的线图. 则

$$d(D) \leqslant d(L) \leqslant d(D)+1.$$

而且, $d(D)=d(L) \Leftrightarrow D$ 是有向圈.

证明

- 因为 D 是强连通的, 所以 L 也强连通, 故 $d(D)$ 和 $d(L)$ 都是确定的.
- 设 $x, y \in V(D)$ 使得 $d_D(x,y)=d(D)$, P 是 D 中最短 (x,y) 路.



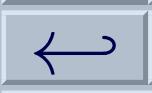
Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示

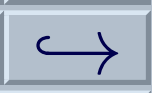












- 令 $a \in E_D^-(x)$, $b \in E_D^-(y) \cap E(P)$, 并令 $Q = a + P$.
- 则 $L(Q)$ 是 L 中一条最短 (a,b) 路. 于是,

$$d(L) \geqslant e(L(Q)) = e(P) = d(D). \qquad (9)$$

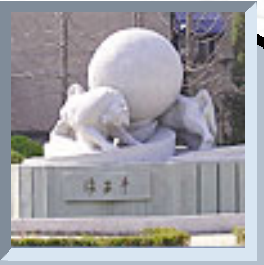
- 另一方面, 设 $a,b \in V(L)$ 使得 $d_L(a,b) = d(L)$. 则必存在 $x,y,z,u \in V(D)$ 使得 $a = (z,x), b = (y,u)$. 于是,

$$d(D) \geqslant d_D(x,y) = d_L(a,b) - 1 = d(L) - 1. \qquad (10)$$

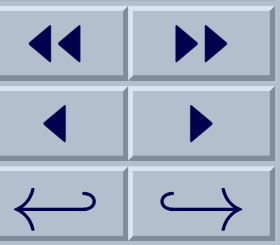
- 由 (9) 和 (10) 得 $d(D) \leqslant d(L) \leqslant d(D) + 1$.

下面证明: $d(D) = d(L) \Leftrightarrow D$ 是有向圈.

- 若 D 是有向圈, 则 $L \cong D$, 所以 $d(D) = d(L)$.
- 只需证明: 若 D 不是有向圈, 则 $d(L) = d(D) + 1$.



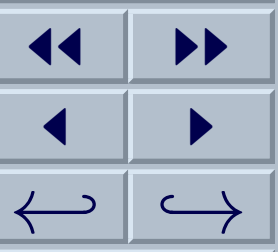
Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



- 为此, 令 $d = d(D)$, $x, y \in V(D)$ 使得 $d_D(x,y) = d$. 令 P 是 D 中最短 (x,y) 路.
- 因为 D 是强连通的, 所以 $d_D^-(x) \geqslant 1$, 且 $d_D^+(y) \geqslant 1$.
- 若存在 $x', y' \in V(D)$ 使得 $a = (x', x)$, $b = (y, y')$ 且 $a \neq b$, 则 $d_L(a,b) = d+1$.
- 若不然, 存在 $c \in E(D)$ 使得 $c = (y,x)$. 于是 $P \cup \{c\}$ 是 D 中有向圈, 用 $C = (x_0, x_1, \cdots, x_d, x_0)$ 表示这条有向圈, 其中 $x_0 = x$ 且 $x_d = y$.
- 因为 D 是强连通的, 但不是有向圈, 所以存在 $x_i \in V(C)$ 和 $z \in V(D)$ 使得 $(x_i, z) \in E(D)$ (z 可能是某个 x_j $(0 \leqslant j \leq d)$).
- 取这样的顶点 x_i 使得 $i (0 \leqslant i \leqslant d)$ 是尽可能的大. 则 $d_D(x_{i+1}, x_i) = d$. 令 $a = (x_i, x_{i+1})$ 和 $b = (x_i, z)$. 则 $d_L(a,b) = d+1$.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



- 于是, $d+1 \geqslant d(L) \geqslant d_L(a,b) = d+1$. 这意味着 $d(L) = d+1$. ∎

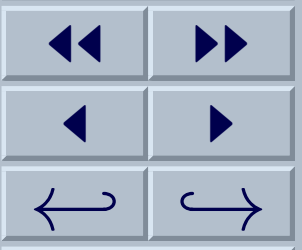
Remark. Line graphs are characterized by nine forbidden subgraphs and can be recognized in linear time.

作业

1.8.1 设 x,y,z 是强连通有向图 D 中三个不同顶点. 证明: $d_D(x,z) \leqslant d_D(x,y) + d_D(y,z)$.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



13 图的矩阵表示

图常以其邻接矩阵形式存储在计算机中。

- 所谓邻接矩阵 (adjacency matrix)是指$n \times n$阶矩阵:

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}, \quad \text{其中 } a_{ij} = \mu(x_i, x_j),$$

这里$\mu(x_i, x_j)$表示有向图D中以x_i为起点且以x_j为终点的有向边的数目或者无向图G中连接x_i和x_j的边的数目.

- 有向图D和无向图G的邻接矩阵分别记为$\mathbf{A}(D)$和$\mathbf{A}(G)$.

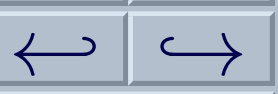
- $\mathbf{A}(G)$是对称矩阵, 而$\mathbf{A}(D)$一般说来不是对称矩阵.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示







- 图的关联矩阵(incidence matrix)是指$n \times m$阶矩阵:

$$\mathbf{M} = (m_{ij})_{n\times m},$$

其中 $v_i \in V$, $e_j \in E$, 并且对无环有向图D有

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ 为 } e_j\text{的起点}, \\ -1, & v_i \text{ 为 } e_j\text{的终点}, \\ 0, & \text{其它}; \end{cases}$$

而对无向图G有

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i\text{为 } e_j\text{的端点}, \\ 0, & \text{其它}; \end{cases}$$

有向图D和无向图G的关联矩阵分别记为$\mathbf{M}(D)$和$\mathbf{M}(G)$.

- 任何两个同构图的邻接矩阵是置换相似的, 而关联矩阵是置换相抵的.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示








- 设$\mathbf{A}$是顶点集$V=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$的无环无向图G的邻接矩阵, $\mathbf{D}$是对角元素$d_{ii}=d_G(x_i)$的n阶对角方阵. 矩阵$\mathbf{L}=\mathbf{D}-\mathbf{A}$称为$G$的Laplace矩阵. 容易验证

$$\mathbf{L}=\mathbf{D}-\mathbf{A}=\mathbf{M}\mathbf{M}^T,$$

这里M是G的任一定向图的关联矩阵。

矩阵$\mathbf{D}+\mathbf{A}$称为G的无符号Laplace矩阵.

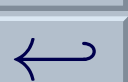
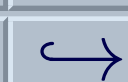
- 图的矩阵表示架起了图论与矩阵论之间的桥梁. 利用这种表示, 可以借助于矩阵的理论和分析方法来研究图论中的问题. 反之, 也可以借助于图的理论和分析方法来研究矩阵论中的问题.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示





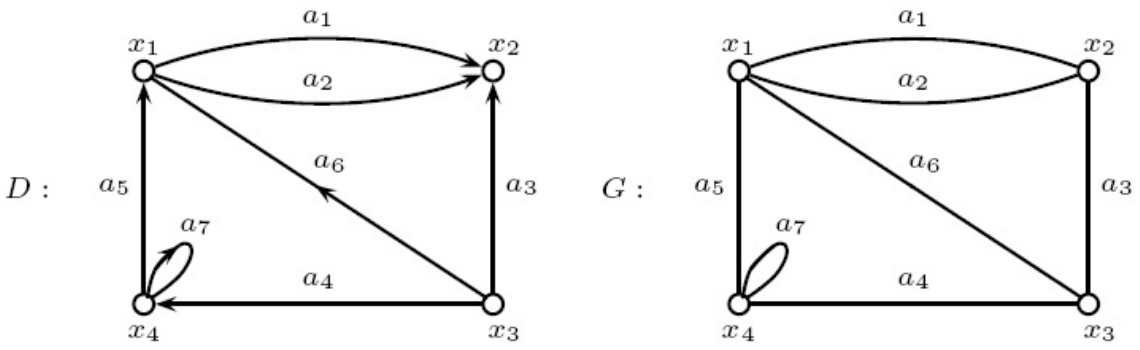


Figure 22: 有向图 D 和无向图 G

$$\mathbf{A}(D)=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(G)=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示







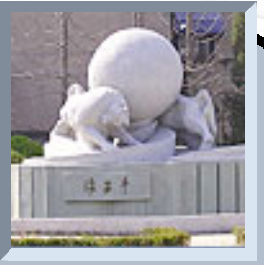

$$\mathbf{M}(D-a_7)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}(G)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

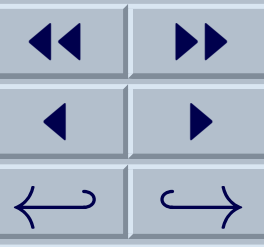
定理 1.9 (邻接矩阵定理) 设 $\mathbf{A}$ 是有向图 D 的邻接矩阵, 则 $\mathbf{A}^k$ 中的 (i,j) 元素是 D 中长为 k 的 (x_i,x_j) 链的数目.

证明 由矩阵乘法公式

$$a_{ij}^{(k)}=\sum_{1\le i_1,\cdots,i_{k-1}\le n} a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_{k-1}j} \qquad (11)$$



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



立得。 ∎

本原方阵及本原指数

- n阶非负方阵$\mathbf{A}$称为**本原的**(primitive), 如果存在正整数k使$\mathbf{A}^k$的每个元素都为正数(记为$\mathbf{A}^k > 0$).
- 使$\mathbf{A}^k > 0$成立的最小k称为$\mathbf{A}$的**本原指数**(primitive exponent), 记为$\gamma(\mathbf{A})$.
- 有向图D称为本原的, 如果D的邻接矩阵$\mathbf{A}$是本原的. $\gamma(\mathbf{A})$称为D的**本原指数**, 记作$\gamma(D)$.

定理1.10.1 (D. Rosenblatt, 1957) **有向图D是本原的$\Leftrightarrow$ D为强连通的, 而且 D中所有不同有向圈长$\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_c$的最大公约数为1, 即, g.c.d $(\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_c) = 1$.**

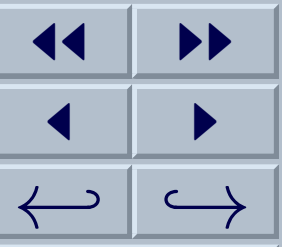
证明: 略.

Remark: 由定理1.10.1可得C_3是本原的, 但C_4不是

由定理1.9和推论1.5.1, 立即有



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



推论 1.9 $n(\geqslant 5)$ 阶强连通竞赛图 T_n 的邻接矩阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^{d+3} > 0$, 其中 $d = d(T_n)$.

图的邻接矩阵和关联矩阵在分析图的性质和结构时起到了非常重要作用. 下面举一个例子.

Let D be a (directed) graph and $A(D)$ be its adjacent matrix. Define the spectral radius of D as

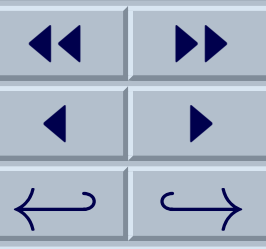
$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ is an eigenvalue of } A(D)\}.$$

Theorem 13.1 (The Perron-Frobenius Theorem) *Suppose A is a real nonnegative $n \times n$ matrix whose underling directed graph D is strongly connected. Then:*

(a) $\rho(A)$ is a simple eigenvalue of A. If x is an eigenvector for ρ, then no entries of x are zeros, and all have the same sign.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



(b) Suppose A_1 is a real nonnegative $n \times n$ matrix such that $A - A_1$ is nonnegative. Then $\rho(A_1) \leq \rho(A)$, with equality if and only if $A_1 = A$.

(c) If θ is an eigenvalue of A and $|\theta| = \rho(A)$, then $\theta/\rho(A)$ is an mth root of unity and $e^{2\pi ir/m}\rho(A)$ is an eigenvalue of A for all r. Further, all cycles of D have length divisible by m.

例 1.9.4 (J. Plesnik & Š. Znám (1974); W. G. Bridges & S. Touge, (1980)) 对于给定的 $\Delta \geqslant 2$ 和 $d \geqslant 2$, 不存在 (Δ, d)-Moore 有向图. 注意: $\Delta = \max\{\Delta^+, \Delta^-\}$.

证明



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示







- 设 D 是 (Δ,d)-Moore 有向图, 则它的阶

$$n=1+\Delta+\Delta^2+\cdots+\Delta^d$$

如式 (4) 所示.

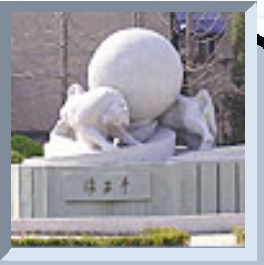
- 由 (Δ,d)-Moore 有向图的性质(习题 1.8.5)知: (i) D 是 Δ 正则简单图; (ii) 不含长 $\leqslant d$ 的有向圈; (iii) 对任何 $x,y\in V(D)$, D 中存在唯一长 $\leqslant d$ 的 (x,y) 路.

- 设 $\mathbf{A}=\mathbf{A}(D)$ 是 D 的邻接矩阵. 由(i) 易知 Δ 是 $\mathbf{A}$ 的一重特征值且 $\mathbf{1}$ 是其对应特征向量(Perron-Frobenius定理, 习题 1.9.8 (d)).

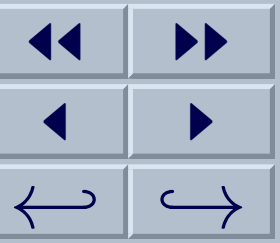
- 由 (iii) 和定理 1.9 易得,

$$\mathbf{I}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\cdots+\mathbf{A}^d=\mathbf{J}, \tag{12}$$

式 (12) 意味着 $\mathbf{J}$ 是 $\mathbf{A}$ 的多项式. 因此, $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{J}$ 有相同的特征向量.



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



- 设 r 是 $\mathbf{A}$ 的异于 Δ 的特征值，X 是 $\mathbf{A}$ 属于特征值 r 的特征向量(即，$X \neq \mathbf{1}$). 由于 0 是 $\mathbf{J}$ 的 $n-1$ 重特征值，所以

$$\mathbf{A}X = rX, \qquad \mathbf{J}X = 0.$$

由式 (12) 得关系式

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^d = 0. \tag{13}$$

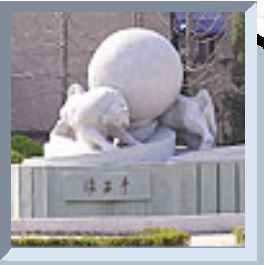
式 (13) 说明 r 是 $d+1$ 重单位根，即 $r^{d+1} = 1$.

- 设 $r_1, r_2, \cdots, r_{n-1}$ 是 $\mathbf{A}$ 的 $n-1$ 个异于 Δ 的特征值. 由(ii)，和定理 1.9 知，$\mathbf{A}^i (1 \leqslant i \leqslant d)$ 的所有主对角线元素都是 0. 因此，它们的和

$$\mathrm{Tr}\mathbf{A}^i = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, d.$$

这说明 $\mathbf{A}^i$ 的所有特征值之和

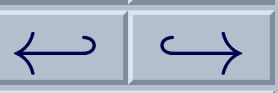
$$\Delta^i + \sum_{j=1}^{n-1} r_j^i = 0, \quad i = 1, 2 \cdots, d. \tag{14}$$



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示







- 因为 $r_j\bar{r}_j = |r_j|^2 = 1 = r_j^{d+1}$, 所以 $r_j^{-1} = \bar{r}_j = r_j^d$, 其中 $\bar{r}_j$ 是 r_j 的共轭复数.

- 考虑式 (14) 中的 $i = 1$ 和 $i = d$, 得

$$-\Delta = \sum_{j=1}^{n-1} r_j, \qquad -\Delta^d = \sum_{j=1}^{n-1} r_j^d.$$

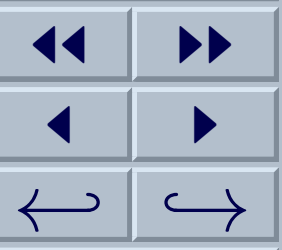
在上面第一式子两边取共轭, 并注意到 $\bar{r}_j = r_j^{-1} = r_j^d$, 得

$$-\Delta = \sum_{j=1}^{n-1} r_j^{-1} = \sum_{j=1}^{n-1} r_j^d = -\Delta^d.$$

上式成立 $\Leftrightarrow$ 或者 $d = 1$ 或者 $\Delta = 1$. 这与假定 $d, \Delta \geq 2$ 矛盾. 定理得证. ∎



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



注: 用 $\overrightarrow{n}(\Delta,d)$ 表示最大度为 Δ 且直径为 d 的有向图的最大阶. 注意到 Kautz 有向图 $K(\Delta,d)$ 有 $\Delta^d+\Delta^{d-1}$ 个顶点. 于是, 对于 $\Delta\geqslant 2$ 和 $d\geqslant 2$ 有下列不等式:

$$\Delta^{d-1}+\Delta^d \leqslant \overrightarrow{n}(\Delta,d) \leqslant \Delta+\Delta^2+\cdots+\Delta^{d-1}+\Delta^d. \quad (15)$$

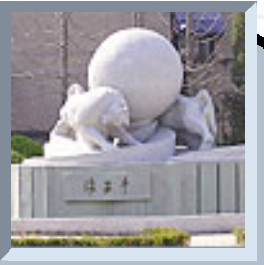
由式(15), $\overrightarrow{n}(\Delta,2)=\Delta+\Delta^2$. 达到这个界的有向图是 $K(\Delta,2)$.

作业

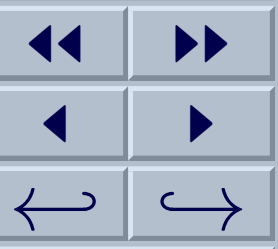
1.9.8 设 $\mathbf{A}$ 为 (有向或无向) 图 D 的邻接矩阵, $\mathbf{I}$ 是 n 阶单位方阵. 多项式

$$P_D(\lambda)=\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})=\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\cdots+c_{n-1}\lambda+c_n$$

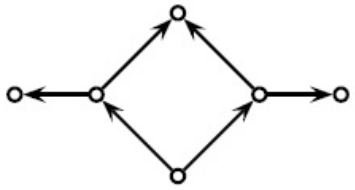
称为 D 的特征多项式; $P_D(\lambda)$ 的根称为 D 的特征根; 图的特征根连同它们的重数称为该图的谱.

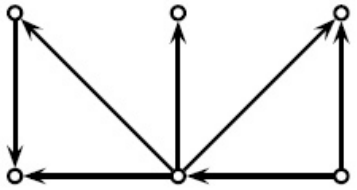


Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示



(a) 求下列两个图的特征多项式(均为λ^6)和特征根.





注：像上图中这样具有相同谱的图称为同谱图。显然，已知图，则其谱也唯一确定；但反之却是图论中未解决困难问题之一。



Title Page
图论介绍
图的基本概念
图的同构
图的顶点度和运算
路与连通
回与圈
距离与直径定义
作业
欧拉(Euler)图
Hamilton 图
P and NP
距离与直径
图的矩阵表示











