– 图论及其应用–

# 树与图空间

侯新民

计算与应用数学系
xmhou@ustc.edu.cn

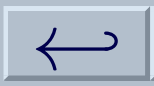
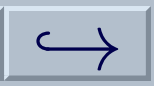


Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







# 目　录


**1　树与支撑树　4**

定义 . . . . . 5

支撑林与支撑树 . . . . . 16

余树与边割集 . . . . . 19

作业 . . . . . 23

**2　图的向量空间　24**

顶点空间与圈空间 . . . . . 24

圈空间与割空间 . . . . . 26

作业 . . . . . 46

**3　支撑树的数目　48**

作业 . . . . . 63




4 最小连接问题 64

支撑树算法 . . . . . 65

Prim 算法 . . . . . 66

算法复杂度估计 . . . . . 71

作业 . . . . . 72

5 最短路问题 76

作业 . . . . . 84

6 电网络方程 86

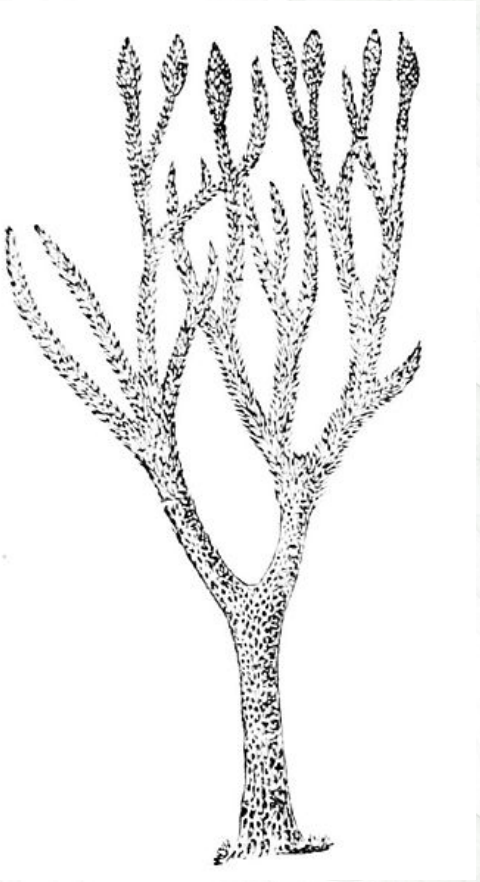
7 Fulkerson conjecture 87




# 1 树与支撑树










Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture
















## 定义

- 不含圈的图称为林 (forest)，亦称无圈图 (acyclic graph).
- 连通的无圈图称为树 (tree). 在图 1 中，(a) 中所示的图是林，(b) 和 (c) 所示的都是树，其中 (c) 也称为**根** (root) 在 $x$ 的外向树.
- 由于 $D$ 是林 $\Leftrightarrow$ $D$ 的每个连通分支都是树，而且 $D$ 是树 $\Leftrightarrow$ $D$ 的基础图 $G$ 是树. 所以在本节只需对无向图 $G$ 来叙述树和林的性质.



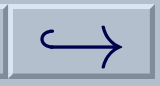

Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture











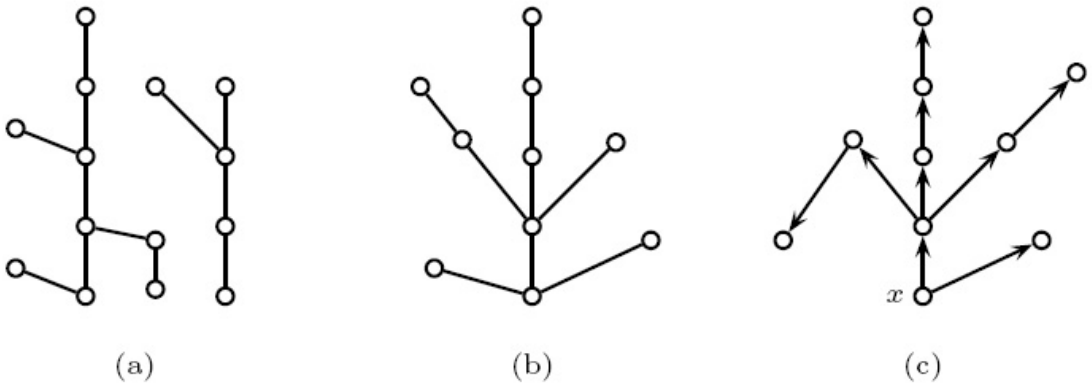



Figure 1: (a) 林 (b) 树 (c) 根在$x$的树

**定理 2.1.1** 设$G$是简单图，则下列结论等价：

(1) $G$是树;

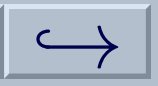


Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







(2) (D. König, 1936) $G$ 中任何两不同顶点恰由一条路所连接;

(3) $G$ 连通且对任何 $e \in E(G)$ 均有 $\omega(G-e)=2$;

(4) $G$不含圈，但对$G$ 中任何不相邻顶点$x, y$, $G+xy$ 含圈.

**证明** (1) $\Rightarrow$ (2)

- 设 $x, y \in V(G)$, 并设 $P_1$ 和 $P_2$ 是 $G$ 中两条不同的 $xy$ 路. 则 $P_1 \cup P_2$ 是闭链. 又闭链可以分解为若干边不交的闭迹的并，而闭迹可以分解为若干边不交圈的并，和 $G$ 中无圈矛盾.

(2) $\Rightarrow$ (3)

- $G$ 连通是显然的。设 $e=xy \in E(G)$. 则 $xey$ 是 $G$ 中唯一 $xy$ 路. 所以 $x$ 和 $y$ 在 $G-e$ 的不同连通分支中，即 $\omega(G-e) \geqslant 2$, 又 $\omega(G-e) \leq 2$, 故 $\omega(G-e)=2$.



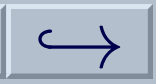

Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture











(3) $\Rightarrow$ (4)

- 先证$G$ 不含圈。设$G$含圈$C$并设$e=xy\in E(C)$. 即$C-e$ 是$G-e$ 中$xy$ 路, 和$\omega(G-e)=2$ 矛盾.
- 再证对$G$ 中任意不相邻顶点$x,y$, $G+xy$ 含圈. 因$G$ 连通，故$G$ 中含连接$x,y$ 的路，设为$P$, 则$P+xy$即为$G+xy$中圈。

(4) $\Rightarrow$ (1)

- 只需证$G$连通即可。设$G$不连通，$G_1$, $G_2$ 是$G$的两个分支，取$x\in V(G_1)$, $y\in V(G_2)$. 则$G+xy$ 不含圈，矛盾。

**Remark.** Given a family $\mathcal{F}$ of graphs, we call a graph $G$ *$\mathcal{F}$-saturated* if $G$ is $\mathcal{F}$-free but $G+e$ contains at least one copy $F\in\mathcal{F}$ for any $e\in E(G^c)$. (4) tell us that a tree is $C_{\geq 3}$-saturated.

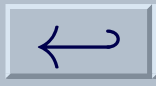
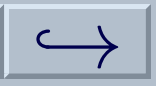



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







**定理 2.1.3** $G$ 是$n$阶树 $\Leftrightarrow$ $G$ 连通且 $e(G)=n-1$.

**证明** $(\Rightarrow)$

- 因为 $G$ 是树, 所以 $G$ 是连通的.
- 下面对 $e(G)\geqslant 0$ 用归纳法来证明 $e(G)=n-1$.
- 当 $e(G)=0$ 时, 结论显然成立.
- 假定对于边数小于 $e(G)$ 的所有树均使结论成立, 并设 $G$ 是边数为 $e(G)(\geqslant 1)$ 的树.
- 取 $e\in E(G)$. 由定理2.1.2(3)知 $\omega(G-e)=2$. 设 $G_1$ 和 $G_2$ 是 $G-e$ 的两个连通分支, 则 $G_1$ 和 $G_2$ 都为树, 并且 $e(G_i)<e(G)$, $i=1,2$. 由归纳假设 $e(G_i)=|V(G_i)|-1$. 于是

$$e(G)=e(G_1)+e(G_2)+1=n-1.$$

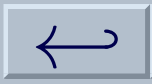
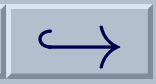



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







($\Leftarrow$)

- 对 $n \geqslant 1$ 用归纳法来证明 $G$ 中不含圈.
- 当 $n = 1$ 时, $e(G) = 0$. $G$ 是平凡图, 因而无圈.
- 下设任何 $n(\geqslant 1)$ 阶且 $e(G) = n-1$ 的连通图都不含圈, 并设 $G$ 是 $n+1$ 阶且 $e(G) = n$ 的连通图.
- 因为 $G$ 连通, 所以 $\delta(G) \geqslant 1$.
- 若 $\delta(G) \geqslant 2$, 则由推论 1.3.1 知

$$2n = 2e(G) = \sum_{x \in V} d_G(x) \geqslant 2(n+1),$$

矛盾.

- 所以存在 $x \in V(G)$ 使 $d_G(x) = 1$.




Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture











- 于是$G-x$是$n$阶连通图, 并且$e(G-x)=n-1$. 由归纳假设$G-x$不含圈. 所以$G$是不含圈的连通图, 因而是树. ∎

**推论 2.1.3** $G$是$n$阶林 $\Leftrightarrow e(G)=n-\omega(G)$. ∎

**推论 2.1.3-1**无孤立点的林至少有$2\omega$个1度点. 特别的, 非平凡树至少有两个一度点(称为树的叶点, 和叶点相邻的点称为支撑点)。

**证明**

- 设$G$是无孤立点的$n$阶林, 则$\delta(G)\geqslant 1$.
- 设$X=\{x\in V(G):\ d_G(x)=1\}$.

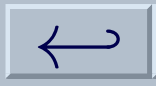
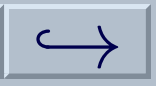



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







- 由推论 1.3.1 和推论 2.1.3 有

$$2(n-\omega) = 2e(G) = \sum_{x\in V} d_G(x) \geqslant |X| + 2(n-|X|).$$

由此可知 $|X| \geqslant 2\omega$ 即, $G$ 中至少有 $2\omega$ 个 1 度点. ∎

作为林或树的应用, 我们举一个例子.

**Theorem 1** *[Bondy's Theorem, 1972]*
设 $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 是 $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ 的 $n$ 个不同子集构成的子集族, 则存在 $x \in X$ 使得 $A_1 \setminus \{x\}, A_2 \setminus \{x\}, \cdots, A_n \setminus \{x\}$ 互不相同.

**证明**



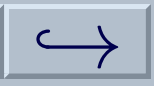

Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture











- 注意到，若存在$i \in X$ 及$A,B \subset \mathcal{A}$，使得$A \setminus \{i\} = B \setminus \{i\}$，则或者$A = B \cup \{i\}$或者$B = A \cup \{i\}$. 即，$A$与$B$的对称差

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{i\}.$$

- 构造一标号图$G$，使得$V(G) = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$，

$$A_i A_j \in E(G) \text{ 且标号} x \Leftrightarrow A_i \Delta A_j = \{x\}.$$

用$L(E)$表示图$G$的边标号集合，即

$$L(E) = \{l(e) : e \in E(G)\}.$$

- 要证结论等价于证明$L(E)$ 是$X$ 的真子集，即$|L(E)| < n$. 若$G$ 不含圈，则$|L(E)| \leq e(G) \leq n-1$，结论得证。下设$G$含圈。

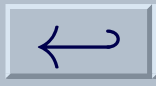
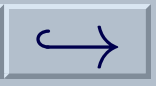



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







- 设$C=(A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_s},A_{i_1})$ 是$G$中一个圈. 则由

$$\begin{aligned} A_{i_1}\Delta A_{i_s} &= (A_{i_1}\Delta A_{i_2})\Delta(A_{i_2}\Delta A_{i_3})\Delta\cdots\Delta(A_{i_{s-1}}\Delta A_{i_s}) \\ &\subseteq \bigcup_{j=1}^{s-1}(A_{i_j}\Delta A_{i_{j+1}}) \end{aligned}$$

知，$C$ 上每条边的标号在$C$上至少出现两次。

- 设$G'$是从$C$上删除任何一条边所得图，则$L(E(G'))=L(E(G))$.
- 若$G'$ 含圈，则同样的操作可得图$G''$使得$L(E(G''))=L(E(G'))=L(E(G))$. 依次进行这样的删边操作，可得林$F$ 使得$L(E(F))=L(E(G))$.
- 因为$e(F)\leq n-1$, 故$|L(E)|\leq n-1$.
- 即存在$i\in X$, 但$i\notin L(E)$. $i$ 即为所求。命题得证. ∎

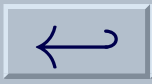
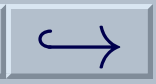



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







**Problem 1.1 (Hajnal, 1972)** 设$n > k$ 且$m = 1 + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}$, $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ 是$X = \{1, 2, \cdots, n\}$的$m$ 个不同子集构成的子集族, 则存在$x \in X$ 使得$\mathcal{A} \setminus \{x\}$中存在$1 + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n-1}{i}$个不同子集.

(已证明存在$X$ 的$n-k$元子集$X'$, 使得$\mathcal{A} \setminus X'$ 中存在$2^k$个不同子集(Sauer, 1972).)




Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture

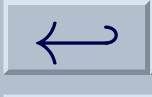


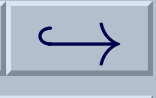










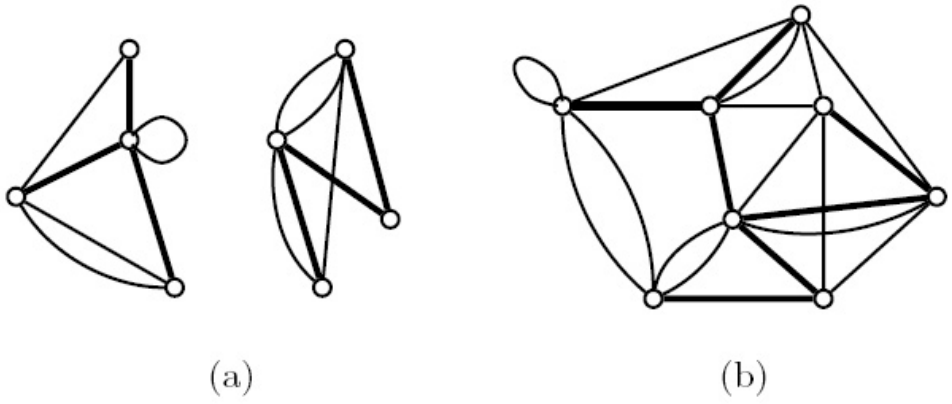



Figure 2: (a) 支撑林 (b) 支撑树

## 支撑林与支撑树

- 设 $F$ 是图 $D$ 的支撑子图，并且 $\omega(F) = \omega(D)$. 若 $F$ 是林，则称 $F$ 为 $D$ 的支撑林 (spanning forest);
- 若 $F$ 是树，则称 $F$ 为 $D$ 的支撑树 (spanning tree).

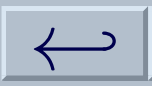
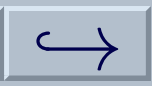


Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







**定理 2.1.4** (D. König, 1936)　每个连通图都含支撑树.

**证明**

- 设 $T$ 是连通图 $G$ 的边尽可能少的连通支撑子图.
- 则对任何 $e \in E(T)$ 有 $\omega(T-e)=2$.
- 由定理 2.1.1 (3) 知 $T$ 是树. ∎

**推论 2.1.4**　每个图 $G$ 都含支撑林或者支撑树, 且 $e(G) \geqslant |V(G)|-\omega(G)$.



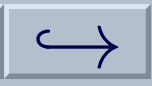

Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture











**定理 2.1.5** (D. König, 1936) 设 $F$ 是 $G$ 的支撑林. 若存在 $e \in E(G) \setminus E(F)$, 则 $F+e$ 含有且仅含有一个圈 (称为$G$的关于支撑林$F$的基本圈（fundamental cycle） ).

**证明**

- 设 $e \in E(G) \setminus E(F)$.
- 由支撑林的定义知 $F+e$ 含圈.
- 设 $F+e$ 含两条不同的圈 $C_1$ 和 $C_2$. 由于 $F$ 不含圈, 则 $e \in E(C_1 \cap C_2)$.
- 因此 $(C_1 \cup C_2)-e$ 是 $F$ 中闭链, 因而含圈 $C'$. 与 $F$ 是林相矛盾. 故 $F+e$ 恰含一个圈. ∎

推论 2.1.5 $n$阶图 $G$ 中恰含 $e(G)-n+\omega$ 条不同的基本圈. ∎

数 $e(G)-n+\omega$ 称为 $G$ 的圈秩 (cycle rank), 亦称为 Betti 数 (Betti number).




Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture











# 余树与边割集

- 设$H$是$G$的子图, 则$G-E(H)$称为$H$在$G$中的余图 (cograph), 记为$\overline{H}(G)$.
- 易知, 若$G=K_n$, 则$\overline{H}(K_n)=H^c$.
- 若$F$是$G$的支撑林(或树), 则$\overline{F}(G)$称为$G$的余林(或余树) (coforest 或 cotree).
- 在不至于引起混淆的情况下, 简记$\overline{F}(G)$为$\overline{F}$, 简记$\overline{T}(G)$为$\overline{T}$. 有时也用$\overline{F}$ (或$\overline{T}$) 替代$E(\overline{F})$ (或$E(\overline{T})$).
- 例如, 图 2 (a) 中粗边所示的子图是$G$的支撑林$F$, 而细边所示的子图是$G$的余林$\overline{F}(G)$; (b) 中粗边所示的子图是$G$的支撑树$T$而细边所示的子图是$G$的余树$\overline{T}(G)$.



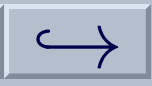

Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture











- 设$B$是$E$的非空子集. 若存在非空子集$S \subset V(G)$使$B = E_G(S, \overline{S})$, 则称$B$为$G$的边割集 (edge-cut set).
- 若$B$的任何非空真子集都不是边割集, 则称$B$为极小边割集(minimal edge-cut set), 亦称为键(bond).
- 边数为1的边割集即为割边, 亦称为桥(bridge).
- 断言: $B$是极小边割集, 当且仅当$\omega(G-B) = \omega(G)+1$.
- 若$e$是$G$中割边, 则$e$为键. 图3所示的是一个边割集和一个键(粗边表示).

**定理2.1.6** (D. König, 1936) 设$F$是非空图$G$的支撑林, $e \in E(F)$, 则

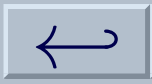
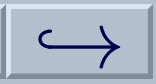



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







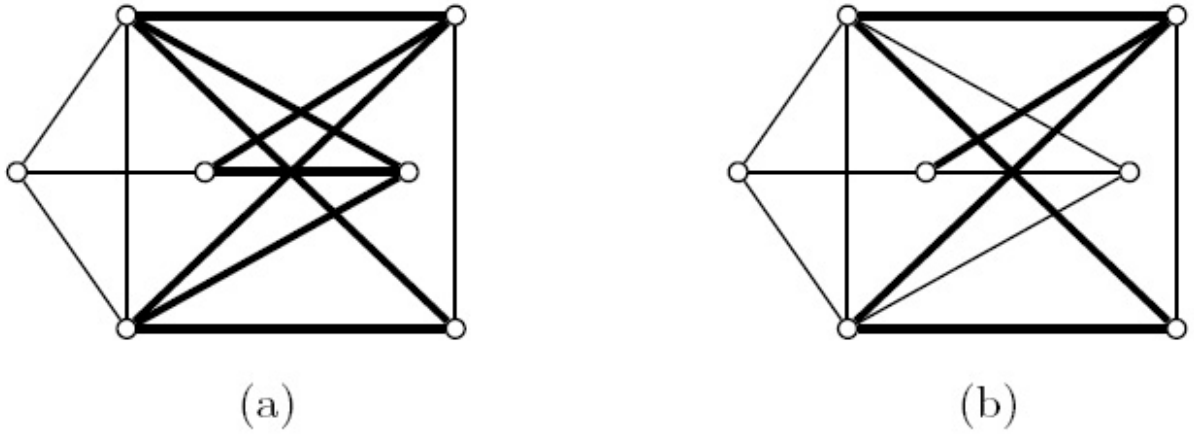



Figure 3: (a) 边割集 (b) 键

(i) $\overline{F}$ 不含键;

(ii) $\overline{F}+e$ 含有且仅有一个键. (称为图$G$关于$F$ 的基本键（fundamental bond）)

证明 (i) 因为$\overline{F}$不是$G$的边割集，故其任一子集都不是$G$的边割集，更不可能含键。



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture

(ii)

- 设$S$是$F-e$的某连通分支的顶点集，则$B=E_G(S,\overline{S})$是$G$的边割集，因而$\overline{F}+e$含$G$的键.
- 设$\overline{F}+e$含两个不同的键$B_1$和$B_2$. 由(i)知，$\overline{F}$不含键，所以，$e\in B_1\cap B_2$.
- 因此，$B_1\Delta B_2=(B_1\cup B_2)-e$是$G$的边割集(习题2.1.16)，故含有$G$的键$B'$，即$\overline{F}$含键$B'$. 矛盾于(i)，故$\overline{F}+e$仅含一个键. ∎

**推论 2.1.6** 图$G$中恰含$|V(G)|-\omega(G)$个不同的基本键.∎

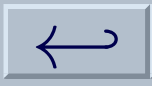
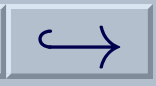



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







# 作业

2.1.3 设 $T$ 是非平凡树. 证明:

(a) $T$ 是2部图;

(b) 设 $\{X,Y\}$ 是 $T$ 的2部划分, 则:

(i) 若 $|X| \geqslant |Y|$, 则 $X$ 中至少有1个1度点;

(ii) 若 $|X| = |Y| + k$, 则 $X$ 中至少有 $k+1$ 个1度点.

2.1.10 设 $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 是 $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ 的 $n$ 个不同子集族. 证明: 则存在 $x \in X$ 使得 $A_1 \cup \{x\}, A_2 \cup \{x\}, \cdots, A_n \cup \{x\}$ 互不相同.

2.1.16 证明: 设 $B_1$ 和 $B_2$ 是键, 则 $B_1$ 和 $B_2$ 对称差 $B_1 \Delta B_2$ 是边割集, 因而含键.




Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture

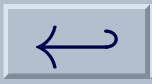


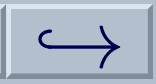










# 2 图的向量空间

## 顶点空间与圈空间

- 设$D$ 是 图，$V(D) = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$，$E(D) = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$.
- $D$ 的顶点空间 (vertex-space) $\mathcal{V}(D)$ 定义为$V(D)$到实数集$\mathbf{R}$ 中的所有函数在函数加法和数乘运算下构成的向量空间，即

$$\mathcal{V}(D) = (\{\mathbf{f} : V(D) \to R\}, +, \text{数乘}).$$

- 定义函数$\mathbf{u}_i$:

$$\mathbf{u}_i(u_j) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } j = i; \\ 0, & \text{如果 } j \neq i, \end{cases}$$




Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture











- 则对$\mathbf{f} \in \mathcal{V}(D)$, 若$\mathbf{f}(u_i) = x_i$, 则

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{u}_i.$$

即$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n$ 即是$\mathcal{V}(D)$的一组基, 即维数$\dim \mathcal{V}(D) = n$. $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$可以看作是$\mathbf{f}$在这组基下的坐标. 记$\mathbf{f} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

- $D$的边空间(edge-space) $\mathcal{E}(D)$定义为$E(D)$到实数集$\mathbf{R}$中的所有函数关于函数加法和数乘构成的向量空间. 即

$$\mathcal{E}(D) = (\{\mathbf{g} : E(D) \to R\}, +, 数乘)$$

- 同样地, 设$\mathbf{g} \in \mathcal{E}(D)$, $\mathbf{g}(a_i) = y_i$. 可以写

$$\mathbf{g} = \sum_{i=1}^{\varepsilon} y_i \mathbf{a}_i, \quad 其中 \mathbf{a}_i(a_j) = \begin{cases} 1, & 如果\ j = i; \\ 0, & 如果\ j \neq i, \end{cases}$$



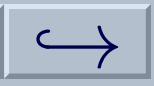

Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture











即 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_m$ 是 $\mathcal{E}(D)$ 的一组基，$(y_1, y_2, \cdot, y_m)$ 是 $\mathbf{g}$ 在这组基下的坐标，记 $\mathbf{g} = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$. 显然，$\dim \mathcal{E}(D) = m$.

## 圈空间与割空间

- 设 $\mathbf{w} \in \mathcal{E}(D)$，称 $(D, \mathbf{w})$ 为加权图 (weighted graph)，$\mathbf{w}$ 亦称为权函数，$\mathbf{w}(a)$ 称为边 $a$ 的权 (weight).
- 权通常是以矩阵的形式给出，这样的矩阵称为加权矩阵. 事实上，加权矩阵是邻接矩阵的推广，因为当 $\mathbf{w}(a) \equiv 1$ 时的加权矩阵就是邻接矩阵.
- 加权图经常出现在应用中，根据实际中的问题，权可以是距离，也可以是费用等等. 权为距离和费用的加权矩阵分别称为距离矩阵和费用矩阵.




Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture











- 设 $B \subseteq E(D)$. 记

$$\mathbf{w}(B) = \sum_{a \in B} \mathbf{w}(a).$$

- 设 $S \subset V(D)$. 记 $E_D^+(S) = E_D^+(S, \overline{S})$, 即 $D$ 中起点在 $S$ 而终点在 $\overline{S}$ 的边集. 同样地, 记 $E_D^-(S) = E_D^-(S, \overline{S})$, 即 $D$ 中起点在 $\overline{S}$ 而终点在 $S$ 的边集.

$$\mathbf{w}^+(S) = \mathbf{w}(E_D^+(S)), \quad \mathbf{w}^-(S) = \mathbf{w}(E_D^-(S)).$$

- 设 $\mathbf{f} \in \mathcal{E}(D)$. 若

$$\mathbf{f}^+(u) = \mathbf{f}^-(u), \quad \forall\, u \in V(D), \tag{1}$$

则称 $\mathbf{f}$ 为 $D$ 的圈向量 (cycle vector). 图 4 (a) 所示的是 $D$ 的一个圈向量 $\mathbf{f}$.

- 设 $C$ 是 $D$ 中圈 (不一定是有向圈), 并指定 $C$ 的正向. 用 $C^+$ 表示 $C$ 中其方向与 $C$ 的正向一致的边

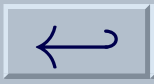



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







集; $C^-$ 表示 $C$ 中其方向与 $C$ 的正向相反的边集. 定义 $\mathbf{f}_C \in \mathcal{E}(D)$ 如下:

$$\mathbf{f}_C(a) = \begin{cases} 1, & \text{若 } a \in C^+; \\ -1, & \text{若 } a \in C^-; \\ 0, & \text{若 } a \notin C^+ \cup C^-. \end{cases}$$

容易验证, $\mathbf{f}_C$ 满足 (1)式. 所以, $\mathbf{f}_C$ 是 $D$ 的圈向量. $\mathbf{f}_C$ 称为圈 $C$ 的圈向量.

- 由推论2.1.5, $D$ 有 $m-n+\omega$ 个基本圈 $C_1, C_2, \cdots, C_{m-n+\omega}$; 容易验证圈向量 $\mathbf{f}_{C_1}, \mathbf{f}_{C_2}, \cdots, \mathbf{f}_{C_{m-n+\omega}}$ 线性无关。

- 不难证明, $D$ 的所有圈向量构成 $\mathcal{E}(D)$ 的子空间. 称这个子空间为 $D$ 的圈空间 (cycle space), 记为 $C(D)$. 显然 $\dim C(D) \geq m-n+\omega$.



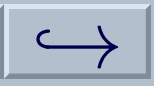

Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture











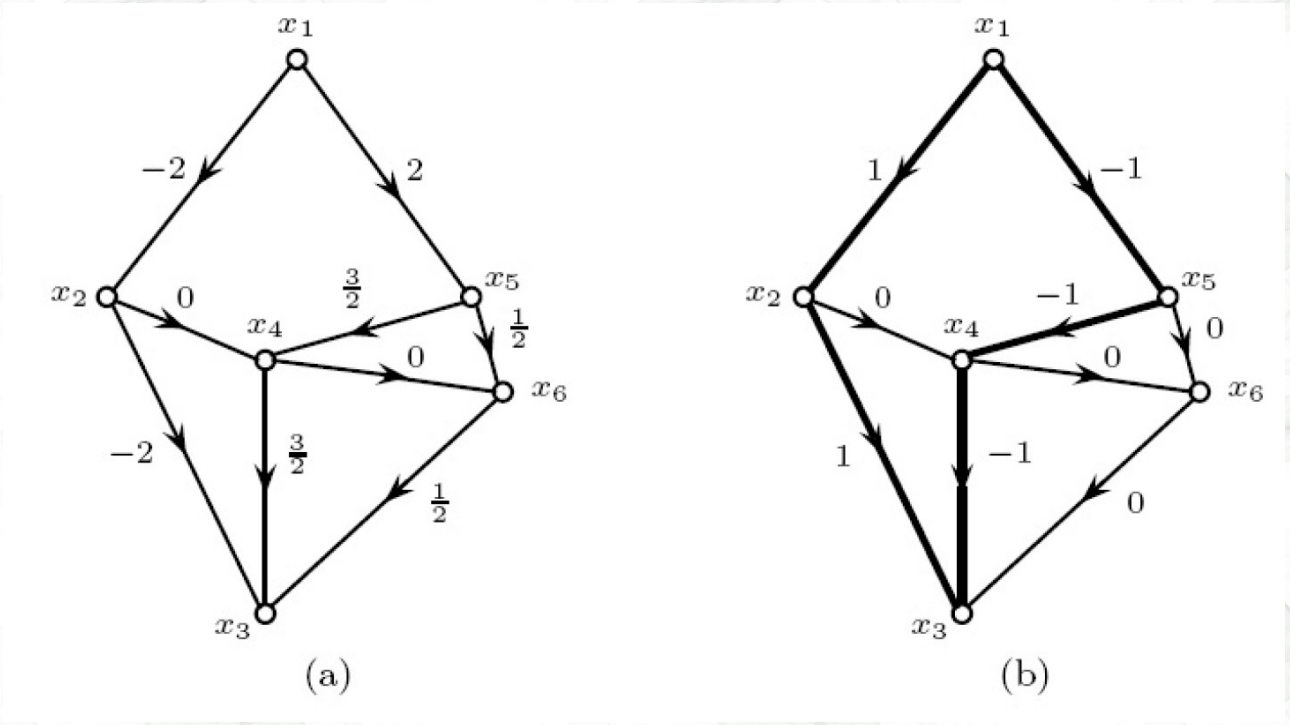



Figure 4: (a) 加权图中的一个圈向量 (b) 对应于一个圈的圈向量

- 设 $\mathbf{p} \in \mathcal{V}(D)$. 按下列规则定义 $\delta_{\mathbf{p}} \in \mathcal{E}(D)$:

$$\delta_{\mathbf{p}}(a) = \mathbf{p}(x) - \mathbf{p}(y), \ \forall\, a = (x,y) \in E(D). \qquad (2)$$

$\delta_{\mathbf{p}}$ 称为 $D$ 的割向量 (cut vector). 图 5 (a) 所示的

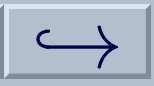


Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







是 $\mathbf{p} \in \mathcal{V}(D)$ 及对应的 $\delta_{\mathbf{p}}$.

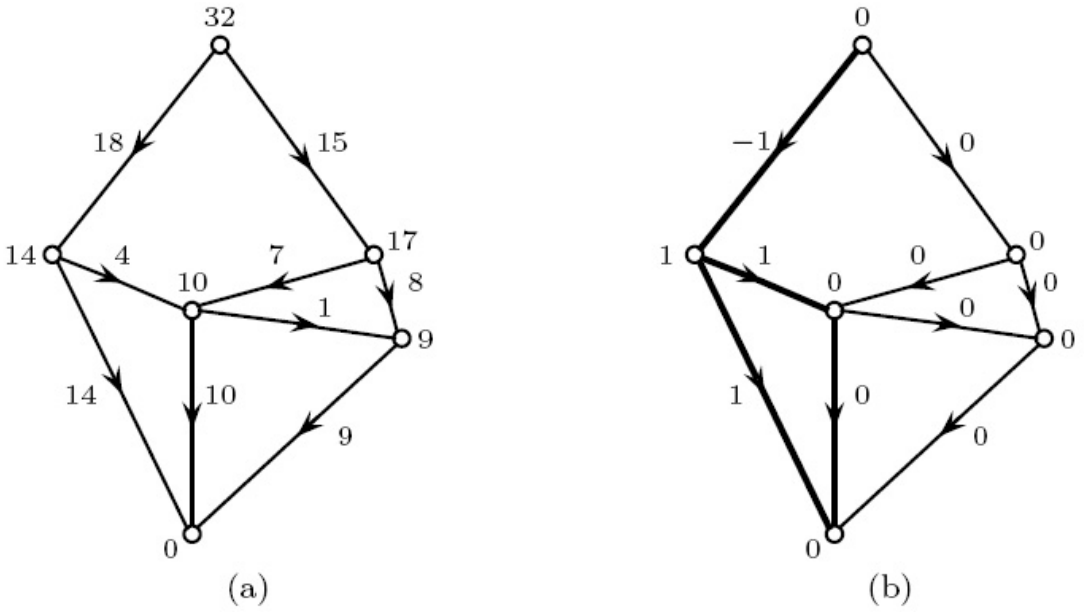



Figure 5: (a) 加权图中的一个割向量 (b) 对应于一个键的割向量

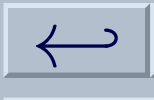
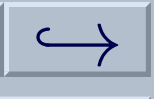



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







- 设 $B = E_D(S,\overline{S})$ 是 $D$ 中的键. 定义 $\mathbf{g}_B \in \mathcal{E}(D)$ 如下:

$$\mathbf{g}_B(a) = \begin{cases} 1, & \text{若 } a \in E_D^+(S,\overline{S}); \\ -1, & \text{若 } a \in E_D^-(\overline{S},S); \\ 0, & \text{若 } a \notin B. \end{cases}$$

若令

$$\mathbf{p}(u) = \begin{cases} 1, & u \in S; \\ 0, & u \notin S. \end{cases}$$

则 $\mathbf{g}_B = \delta_{\mathbf{p}}$. 于是, $\mathbf{g}_B$ 是 $D$ 的割向量. $\mathbf{g}_B$称为键 $B$ 的割向量. 图 5(b) 所示的是对应于键 $B$ (粗边表示) 的割向量 $\mathbf{g}_B$.

- 由推论2.1.6, $D$ 有$n-\omega$ 个基本键且容易验证这$n-\omega$ 个基本键对应割向量线性无关。

- 不难证明, $D$的所有割向量构成 $\mathcal{E}(D)$的子空间. 称这个子空间为$D$的割空间 (cut space), 记为 $\mathcal{B}(D)$. 显然$\dim \mathcal{B}(D) \geq n-\omega$.




Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture











**定理 2.2.1** 设 $\mathbf{M}$ 是 $D$ 的关联矩阵, 则 $\mathcal{B}(D)$ 是 $\mathbf{M}$ 的行向量空间 $\mathcal{M}$, 而 $\mathcal{C}(D)$ 是它的正交补.

**证明**

- 设 $\mathbf{g} \in \mathcal{B}(D)$. 于是, 存在 $\mathbf{p} \in \mathcal{V}(D)$ 使 $\delta_{\mathbf{p}} = \mathbf{g}$ 且 $\mathbf{p}$ 满足式 (2).
- 因此, 对任何 $a = (x, y) \in E(D)$, 均有

$$\mathbf{g}(a) = \delta_{\mathbf{p}}(a) = \mathbf{p}(x) - \mathbf{p}(y) = \sum_{u \in V} \mathbf{m}_u(a)\mathbf{p}(u),$$

其中 $\mathbf{m}_u(a)$ 表示顶点 $u$ 对应于 $\mathbf{M}$ 中的行向量在边 $a$ 上的分量, 即

$$\mathbf{m}_u(a) = \begin{cases} 1, & \text{若 } a \in E^+(u); \\ -1, & \text{若 } a \in E^-(u); \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

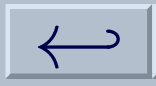
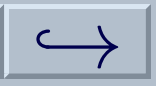



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







- 故 $\mathbf{g}=\sum_{u\in V}\mathbf{p}(u)\mathbf{m}_u$ 可以表示成 $\mathbf{M}$ 的行向量的线性组合, 即 $\mathcal{B}(D)\subseteq\mathcal{M}$.
- 反之, 设 $\mathbf{m}_x=(m_x(a_1),m_x(a_2),\cdots,m_x(a_m))$ 是 $\mathbf{M}$ 中任意行向量. 显然, $\mathbf{m}_x\in\mathcal{E}(D)$.
- 令

$$\mathbf{p}_x(u)=\begin{cases}1, & \text{若 } u=x;\\ 0, & \text{若 } u\neq x.\end{cases}$$

  则 $\mathbf{p}_x\in\mathcal{V}(D)$ 且 $\mathbf{m}_x=\delta_{\mathbf{p_x}}$. 因此, $\mathbf{m}_x\in\mathcal{B}(D)$.
- 由于 $M$ 中任何行向量的线性组合仍属于 $\mathcal{B}(D)$, 故 $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{B}(D)$.
- 所以, $\mathcal{M}=\mathcal{B}(D)$.
- 下证 $\mathcal{C}(D)$ 是 $\mathcal{B}(D)$ 在 $\mathcal{E}(D)$ 中的正交补. 设 $\mathbf{f}\in$

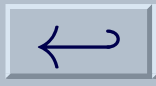
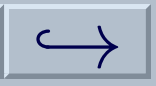



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







$C(D)$. 则

$$\begin{aligned}\mathbf{f} \text{ 满足式}(1) &\Leftrightarrow \mathbf{f}^+(x)-\mathbf{f}^-(x)=0,\ \forall\ x\in V(D)\\ &\Leftrightarrow \sum_{a\in E^+(x)}\mathbf{f}(a)-\sum_{a\in E^-(x)}\mathbf{f}(a)=0\\ &\Leftrightarrow \sum_{a\in E}\mathbf{m}_x(a)\mathbf{f}(a)=0,\ \forall\ x\in V(D),\\ &\Leftrightarrow \mathbf{f} \text{ 与 } \mathbf{M} \text{ 中每个行向量都正交.}\end{aligned}$$

- 又因为$\dim C(D)+\dim \mathcal{B}(D)\geq m$, 所以, $C(D)$是$\mathcal{B}(D)$在$\mathcal{E}(D)$中的正交补. ∎

**推论 2.2.1** 对任何图$D$都有$\mathcal{E}(D)=\mathcal{B}(D)\oplus C(D)$. ∎

**推论 2.2.2** (i)

$$\dim \mathcal{B}=n-\omega;$$



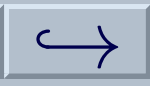

Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture











(ii)

$$\dim \mathcal{C} = m - n + \omega.$$

- 设 $\mathbf{f} \in \mathcal{E}(D)$. 用 $D_{\mathbf{f}}$ 表示 $D$ 中使 $\mathbf{f}$ 的值不为 0 的边集所导出的子图. $D_{\mathbf{f}}$ 称为 $\mathbf{f}$ 的支撑图.
- 例如, 图 4 (b)所示的 $\mathbf{f}$, 它的支撑图 $D_{\mathbf{f}}$ 为一个圈 (图中粗边所示); 而图 5 (b) 所示的 $\mathbf{g}$, 它的支撑图 $D_{\mathbf{g}}$ 为 $D$ 中一个键 (图中粗边所示).

一般地, 有下述结果.

**引理 2.2.2** (i) 若 $\mathbf{f} \in C(D)$ 且非零, 则 $D_{\mathbf{f}}$ 含圈;

(ii) 若 $\mathbf{g} \in \mathcal{B}(D)$ 且非零, 则 $D_{\mathbf{g}}$ 含键.

**证明**




Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture











**(i)** 由于 $0 \neq \mathbf{f} \in C(D)$, 所以由式 (1) 可知, 对每个 $u \in V(D_{\mathbf{f}}), d_{D_{\mathbf{f}}}(u) \geqslant 2$, 即 $\delta(D_{\mathbf{f}}) \geqslant 2$. 故 $D_{\mathbf{f}}$ 含圈.

**(ii)** 由于 $0 \neq \mathbf{g} \in \mathcal{B}(D)$ 所以存在非零 $\mathbf{p} \in \mathcal{V}(D)$ 使 $\mathbf{g} = \delta_{\mathbf{p}}$.

任取 $u \in V(D_{\mathbf{g}})$, 并令

$$S = \{w \in V(D) : \ \mathbf{p}(w) = \mathbf{p}(u)\}.$$

则 $E_D(S, \overline{S})$ 是 $D$ 的边割集, 并且对任何 $a \in E_D(S, \overline{S})$ 均有 $\mathbf{g}(a) \neq 0$, 所以 $E_D(S, \overline{S}) \subseteq E(D_{\mathbf{g}})$. 即(由习题 2.1.16), $D_{\mathbf{g}}$ 含键. ∎

- 设 $\mathbf{B}$ 是其行由 $\mathcal{E}(D)$ 中向量组成的矩阵, $R \subseteq E(D)$. 则用 $\mathbf{B}|R$ 表示 $\mathbf{B}$ 中列限制在 $R$ 上得到的子矩阵. 为使记号简化, 若 $R$ 是 $D$ 的子图, 也记 $\mathbf{B}|E(R)$ 为 $\mathbf{B}|R$.

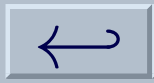
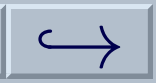



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







**定理 2.2.2** 设 $B$ 和 $C$ 分别是 $\mathcal{B}(D)$ 和 $\mathcal{C}(D)$ 的基矩阵, 则对任何 $R \subseteq E(D)$, 有

(i) $\mathbf{B}|R$ 的各列线性无关 $\Leftrightarrow$ $D[R]$ 不含圈;

(ii) $\mathbf{C}|R$ 的各列线性无关 $\Leftrightarrow$ $D[R]$ 不含键.

**证明** (i) 用 $\mathbf{B}_a$ 表示 $\mathbf{B}|\{a\}$, 即 $\mathbf{B}$ 中对应于边 $a$ 的列向量.

($\Leftarrow$) (反证法)

- 设 $\mathbf{B}|R$ 的各列线性相关, 则存在 $\mathbf{0} \neq \mathbf{f} \in \mathcal{E}(D)$,

$$\mathbf{f}(a)\begin{cases} \neq 0, & \text{若 } a \in R; \\ = 0, & \text{若 } a \notin R \end{cases} \quad \text{使得} \quad \sum_{a \in R} \mathbf{f}(a)\mathbf{B}_a = \mathbf{0}.$$

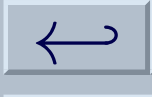
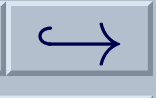



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







- 即

$$\mathbf{0} = \sum_{a \in R} \mathbf{f}(a)\mathbf{B}_a = \sum_{a \in E(D)} \mathbf{f}(a)\mathbf{B}_a = \mathbf{B}\mathbf{f}^T.$$

- 所以 $D_{\mathbf{f}} \subseteq D[R]$, 并且 $\mathbf{f}$ 与 $\mathbf{B}$ 中每个行向量都正交, 即 $\mathbf{f}$ 与 $\mathcal{B}$ 中每个向量都正交, 即 $\mathbf{f} \notin \mathcal{B}$.
- 由推论 2.2.1 知, $\mathbf{f} \in C$. 再由引理 2.2.2 (i) 知, $D_{\mathbf{f}}$ 含圈, 因而 $D[R]$ 也含圈, 矛盾于假定. 所以, $\mathbf{B}|R$ 各列必线性无关.

($\Rightarrow$) (反证法)

- 若 $D[R]$ 含圈, 则取 $C$ 为 $D[R]$ 中的圈. $\mathbf{f}_C$ 是 $D$ 中对应于圈 $C$ 的非零圈向量, 即 $\mathbf{0} \neq \mathbf{f}_C \in C(D)$.
- 由推论 2.2.1 知, $\mathbf{f}_C$ 与 $\mathbf{B}$ 中每个行向量都正交, 即

$$\sum_{a \in E(D)} \mathbf{f}_C(a)\mathbf{B}_a = \mathbf{B}\mathbf{f}_C^T = \mathbf{0}.$$




Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture











- 另一方面,

$$\mathbf{0} = \sum_{a \in E(D)} \mathbf{f}_C(a)\mathbf{B}_a = \sum_{a \in R} \mathbf{f}_C(a)\mathbf{B}_a = (B|R)(\mathbf{f}_C|R)^T.$$

- 即 $\mathbf{B}|R$ 的各列线性相关. 矛盾于假定, 所以 $D[R]$ 不含圈.

- 利用引理 2.2.2 (ii), 做类似的叙述可证 (ii). ∎

- 设 $F$ 是 $D$ 的支撑林. 用 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 对 $D$ 的边进行标号使

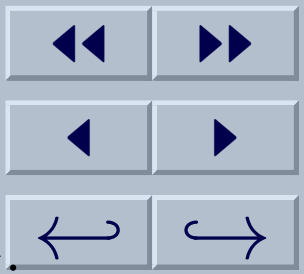
$$E(\overline{F}) = \{a_1, a_2, \cdots, a_{m-n+\omega}\},\ E(F) = \{a_{m-n+\omega+1}, \cdots, a_m\}.$$

- 由定理 2.1.5 知, 对每个 $a_i \in E(\overline{F})$, $F + a_i$ 含唯一圈(这条圈为 $C_i$, 称为 $D$ 中**对应于 $F$ 的基本圈** (fundamental cycle)).




Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture



- 用 $\mathbf{f}_i$ 表示对应于圈 $C_i$ 且使 $\mathbf{f}_{C_i}(a_i)=1$ 的圈向量.
- 于是, 以

$$\mathbf{f}_1,\ \mathbf{f}_2,\ \cdots,\ \mathbf{f}_{m-n+\omega} \tag{3}$$

为行而构成的 $(m-n+\omega)\times m$ 阶矩阵 $\mathbf{C}_F$ 必有下列分块表示形式:

$$\mathbf{C}_F=(\mathbf{I}_{m-n+\omega}\ \mathbf{C}_2),$$

其中 $\mathbf{I}_{m-n+\omega}=\mathbf{C}_F|\overline{F}$ 为 $(m-n+\omega)$ 阶单位方阵, 而 $\mathbf{C}_2=\mathbf{C}_F|F$ 是 $(m-n+\omega)\times(n-\omega)$ 阶矩阵.

- 由于 $\mathrm{rank}(\mathbf{C}_F)=m-n+\omega$, 所以向量组 (3) 是圈空间 $C(D)$ 中的一组基. $\mathbf{C}_F$ 称为 $C(D)$ 中**对应于** $F$ **的基矩阵**.
- 类似地, 设 $a_j\in E(F)$. 则由定理 2.1.6 知 $\overline{F}+a_j$ 含唯一的键, 记为 $B_j$ (称为 $D$ 中**对应于** $F$ **的基本键** (fundamental bond)).

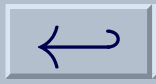
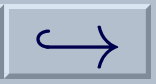



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







- 用 $\mathbf{g}_j$ 表示对应于 $B_j$ 且使 $\mathbf{g}_{B_j}(a_j)=1$ 的割向量, $j=m-n+\omega+1,\cdots,m$. 于是, 以

$$\mathbf{g}_{m-n+\omega+1},\ \mathbf{g}_{m-n+\omega+2},\ \cdots,\ \mathbf{g}_m \tag{4}$$

为行而构成的 $(n-\omega)\times m$ 阶矩阵 $\mathbf{B}_F$ 必有下列分块表示形式:

$$\mathbf{B}_F=(\mathbf{B}_1\ \mathbf{I}_{n-\omega}),$$

其中 $\mathbf{B}_1=\mathbf{B}_F|\overline{F}$ 是 $(n-\omega)\times(m-n+\omega)$ 阶矩阵, 而 $\mathbf{I}_{n-\omega}=\mathbf{B}_F|F$ 是 $(n-\omega)$ 阶单位方阵.

- 由于 $\operatorname{rank}\mathbf{B}_F=n-\omega$, 所以向量组(4)是割空间 $\mathcal{B}(D)$ 中的一组基. $\mathbf{B}_F$ 称为 $\mathcal{B}(D)$ 中**对应于** $F$ 的基矩阵.

- 例如, 图 4 所示的加权图 $(D,\mathbf{f})$, 其边标号和支撑树 $T$ 如图 7 所示(粗边所示).

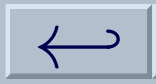



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







全 屏

搜 索

关 闭

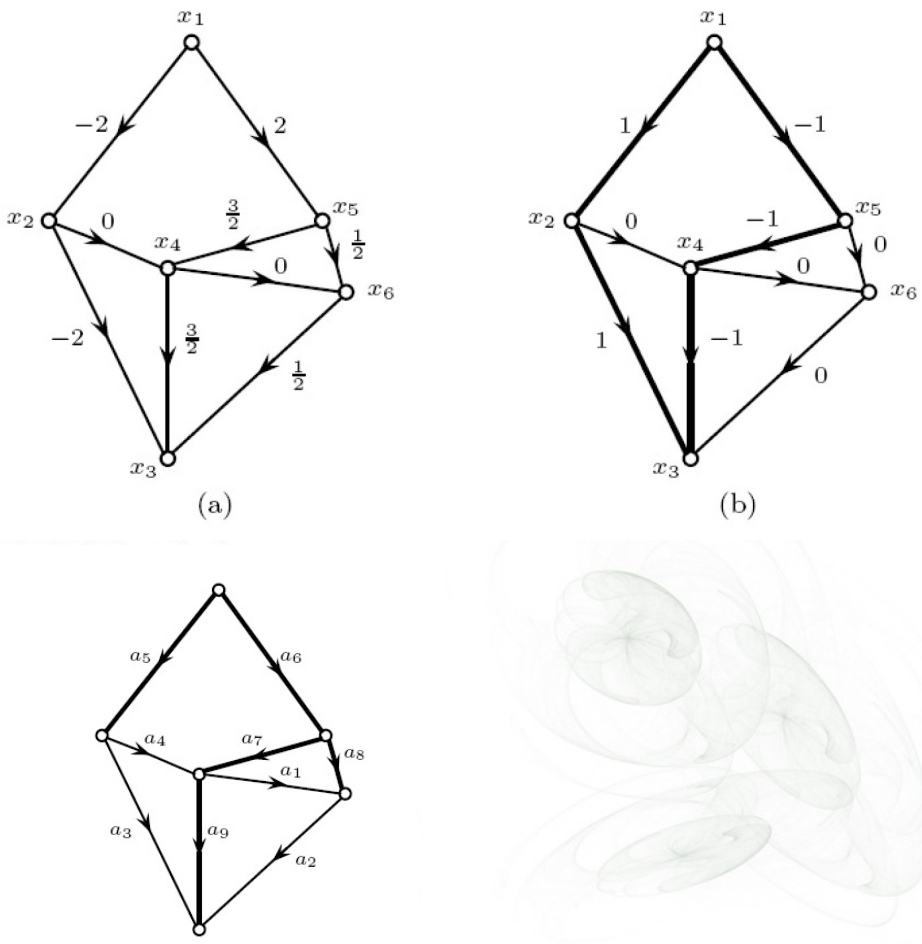



Figure 6: 有向图$D$和它的支撑树

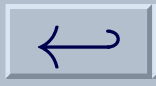
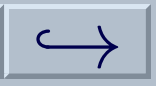



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







$E(\overline{T}) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \}$. $D$ 中对应于 $T$ 的基本圈向量 $\mathbf{f}_i\,(i = 1,2,3,4)$ 为：

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_1 &= (1, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 1, \quad -1, \quad 0) \\
\mathbf{f}_2 &= (0, \quad 1, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad -1, \quad 1, \quad -1) \\
\mathbf{f}_3 &= (0, \quad 0, \quad 1, \quad 0, \quad 1, \quad -1, \quad -1, \quad 0, \quad -1) \\
\mathbf{f}_4 &= (0, \quad 0, \quad 0, \quad 1, \quad 1, \quad -1, \quad -1, \quad 0, \quad 0)
\end{aligned} \tag{5}$$

- $C(D)$ 中对应于 $T$ 的基矩阵

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_T = & \begin{array}{ccccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \end{array} \\
& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
= & (\mathbf{I}_4, \mathbf{C}_2).
\end{aligned} \tag{6}$$

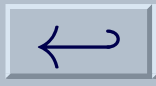



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







- 图 4 中所示的圈向量 $\mathbf{f}$ 可以表示为

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= (\mathbf{f}(a_1),\mathbf{f}(a_2),\mathbf{f}(a_3),\cdots,\mathbf{f}(a_8),\mathbf{f}(a_9))\\ &= \left(0,\ \tfrac{1}{2},\ -2,\ 0,\ -2,\ 2,\ \tfrac{3}{2},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{3}{2}\right)\\ &= 0\cdot\mathbf{f}_1+\tfrac{1}{2}\cdot\mathbf{f}_2+(-2)\cdot\mathbf{f}_3+0\cdot\mathbf{f}_4\\ &= \sum_{i=1}^{4}\mathbf{f}(a_i)\,\mathbf{f}_i.\end{aligned}$$

- 这说明: $\mathbf{f}$ 的值是由 $\mathbf{f}|\overline{T}$ 上的值所唯一确定. 事实上, 对任何圈向量, 此结论都成立 (见习题 2.2.6).

- 例如, 图 7 所示的图 $D$ 和支撑树 $T$ (粗边所示), $E(T)=\{a_5, a_6, a_7, a_8, a_9\}$. $D$ 中对应于 $T$ 的基本割




Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture

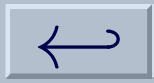


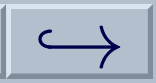










向量 $\mathbf{g}_i\,(i=5,6,7,8,9)$ 为：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{g}_5 &= (\ 0,\ \ 0,\ -1,\ -1,\ \ 1,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0) \\
\mathbf{g}_6 &= (\ 0,\ \ 0,\ \ 1,\ \ \ 1,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0) \\
\mathbf{g}_7 &= (-1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ \ 1,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 0,\ \ 0) \\
\mathbf{g}_8 &= (\ 1,\ -1,\ \ 0,\ \ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 0) \\
\mathbf{g}_9 &= (\ 0,\ \ 1,\ \ 1,\ \ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 1)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

- $\mathcal{B}(D)$ 中对应于支撑树 $T$ 的基矩阵

$$
\mathbf{B}_T = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccccccc}
0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\end{array}
= (\mathbf{B_1}\ \mathbf{I_5}).
\tag{8}
$$

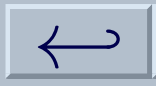
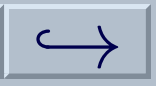



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







- 图 5 所示的割向量 $\mathbf{g}$ 可以表示为

$$\begin{aligned}\mathbf{g} &= (1,\ 9,\ 14,\ 4,\ 18,\ 15,\ 7,\ 8,\ 10)\\ &= 18\cdot\mathbf{g}_5+15\cdot\mathbf{g}_6+7\cdot\mathbf{g}_7+8\cdot\mathbf{g}_8+10\cdot\mathbf{g}_9\\ &= \sum_{j=5}^{9}\mathbf{g}(a_j)\,\mathbf{g}_j.\end{aligned}$$

- 这说明: $\mathbf{g}$ 的值是由 $\mathbf{g}|T$ 上的值所唯一确定. 事实上, 对任何割向量, 此结论仍然是成立的(见习题 2.2.6).

## 作业

**例 2.2.2** 设 $\mathbf{K}$ 为从连通图 $D$ 的关联矩阵 $\mathbf{M}$ 中删去任意一行后所得到的矩阵, 则 $\mathbf{K}$ 是割空间 $\mathcal{B}(D)$ 的基矩阵.



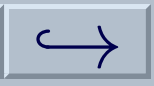

Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture











2.2.2 设 $C$ 是 $D$ 中的圈, $B$ 是 $D$ 中的键. 证明:

(a) $\mathbf{f}_C \in \mathcal{E}(D)$ 是 $D$ 的圈向量, $D$ 的所有圈向量构成 $\mathcal{E}(D)$ 的子空间;

(b) $\mathbf{g}_B \in \mathcal{E}(D)$ 是 $D$ 的割向量, $D$ 的所有割向量构成 $\mathcal{E}(D)$ 的子空间.




Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture











# 3 支撑树的数目

- 用$\tau(D)$表示无环连通图$D$中支撑树的数目。
- 本节给出$\tau(D)$的计算公式. 这里介绍的证明方法属于 Tutte (1965).



William Thomas Tutte OC FRS FRSC was a British-born Canadian codebreaker and mathematician. During the Second World War, he made a brilliant and fundamental advance in cryptanalysis of the Lorenz cipher, a major Nazi German cipher system which was used for top-secret communications within the Wehrmacht High Command. The high-level, strategic nature of the intelligence obtained from Tutte's crucial breakthrough, in the bulk decrypting of Lorenz-enciphered messages specifically, contributed greatly, and perhaps even decisively, to the defeat of Nazi Germany. He also had a number of significant mathematical accomplishments, including foundation work in the fields of graph theory and matroid theory.↵

- 设$D$为无环连通有向图, $\mathbf{B}$是割空间$\mathcal{B}(D)$的基矩阵.

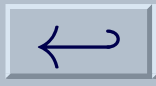
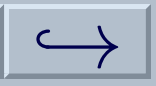



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







- 从定理2.2.2 (i)知，若$R \subseteq E(D)$且$|R| = n-1$，则子方阵$\mathbf{B}|R$可逆$\Leftrightarrow$导出子图$D[R]$是$D$的支撑树.
- 于是，$\tau(D)$就等于$\mathbf{B}$中阶为$n-1$的可逆方阵的数目.
- 设$\mathbf{M}$是$n \times m$阶矩阵. 如果$\mathbf{M}$中的所有满阶(即$\min\{n,m\}$阶)子方阵的行列式都取值$0, -1$或$1$，那么称$\mathbf{M}$为幺模矩阵 (unimodular matrix).
- $\mathbf{M}$称为全幺模矩阵 (totally unimodular matrix)，如果它的所有子方阵都是幺模的，即所有子方阵行列式为$0$或$\pm 1$.

**Proposition 3.1** 设$\mathbf{B}$是割空间$\mathcal{B}(D)$的基矩阵，$F$是$D$的支撑林，$\mathbf{B}_F$是$\mathcal{B}(D)$中对应于$F$的基矩阵. 则$\mathbf{B}$由$\mathbf{B}|F$唯一确定，且$\mathbf{B} = (\mathbf{B}|F)\mathbf{B}_F$.



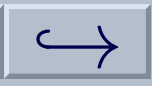

Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture











证明

- 因为 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{B}_F$ 都是 $\mathcal{B}(D)$ 中的基矩阵, 所以存在唯一可逆方阵 $\mathbf{P}$ 使得 $\mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{B}_F$.
- 于是 $\mathbf{B}$ 由 $P$ 唯一确定.
- 由于 $\mathbf{B}|F = (\mathbf{P}\mathbf{B}_F)|F = \mathbf{P}(\mathbf{B}_F|F) = \mathbf{P}$,
- 所以, $\mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{B}_F = (\mathbf{B}|F)\mathbf{B}_F$. ∎

类似的, 我们可以证明

**Proposition 3.2** 设 $\mathbf{C}$ 是圈空间 $C(D)$ 的基矩阵, $F$ 是 $D$ 的支撑林, $\mathbf{C}_F$ 是 $C(D)$ 中对应于 $F$ 的基矩阵. 则 $\mathbf{C}$ 由 $\mathbf{C}|\bar{F}$ 唯一确定, 且 $\mathbf{C} = (\mathbf{C}|\bar{F})\mathbf{C}_F$.

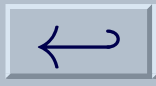
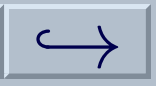



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







**Proposition 3.3** 设 $D$ 是无环有向图, $F$ 是 $D$ 中支撑林, $\mathbf{B}_F$ 和 $\mathbf{C}_F$ 分别是 $\mathcal{B}(D)$ 和 $C(D)$ 中对应于 $F$ 的基矩阵. 则 $\mathbf{B}_F$ 和 $\mathbf{C}_F$ 都是幺模矩阵.

**证明**

- 设 $\mathbf{P}$ 是 $\mathbf{B}_F$ 中任意一个满阶子方阵.
- 由推论 2.2.2 (i) 知 $\mathbf{P}$ 是 $n-\omega$ 阶方阵.
- 设 $R$ 是 $\mathbf{P}$ 对应于 $D$ 中的边子集, 并设 $R$ 在 $D$ 中导出子图 $D[R]$ 为 $F_1$. 于是, $\mathbf{P}=\mathbf{B}_F|F_1$.
- 若 $F_1$ 中含有圈, 由定理 2.2.2 (i) 知, $\det\mathbf{P}=0$.
- 下设 $F_1$ 是 $D$ 中的支撑林. 设 $\mathbf{B}_1$ 是 $\mathcal{B}(D)$ 中对应于 $F_1$ 的基矩阵.
- 由Proposition 3.1 知,

$$(\mathbf{B}_F|F_1)\mathbf{B}_1=\mathbf{B}_F.$$



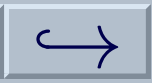

Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture











- 上式两边限制在 $F$ 上得

$$(\mathbf{B}_F|F_1)(\mathbf{B}_1|F) = \mathbf{B}_F|F.$$

两边取行列式, 并注意到 $\mathbf{B}_F|F$ 是单位矩阵, 得

$$\det(\mathbf{B}_F|F_1)\cdot\det(\mathbf{B}_1|F) = 1. \tag{9}$$

- 由于式(9)中两个行列式都是整数矩阵的行列式, 所以其值都为整数. 由此可知,

$$\det\mathbf{P} = \det(\mathbf{B}_F|F_1) = \pm 1.$$

于是证明了 $\mathbf{B}_F$ 是幺模矩阵.

- 同理可证 $\mathbf{C}_F$ 也是幺模矩阵. (作业!) ∎

**Proposition 3.4** 设 $\mathbf{M}$ 是无环有向图 $D$ 的关联矩阵, $\mathbf{K}$ 是从 $\mathbf{M}$ 中删去任何一行后得到的子矩阵, 则 $\mathbf{K}$ 是幺模矩阵.



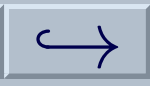

Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture











## 证明

- 设$\mathbf{P}$是$\mathbf{K}$的满阶子方阵. 下面用归纳法来证明$\mathbf{P}$是全幺模的.
- 由于$\mathbf{M}$是$D$的关联矩阵, 所以$\mathbf{M}$中(即$\mathbf{P}$中)的元素是$0,-1$或$1$. 因此, $\mathbf{P}$的任一1阶子方阵是幺模的.
- 假定$\mathbf{P}$的任一$k(\geq 1)$阶子方阵是幺模的. 要证明$\mathbf{P}$中任何$(k+1)$阶子方阵的行列式也为$0,-1$或$1$.
- 设$\mathbf{Q}=(q_{ij})(1\leqslant i,j\leqslant k+1)$是$\mathbf{P}$中$k+1$阶子方阵.
- 由关联矩阵$\mathbf{M}$的定义知, $\mathbf{Q}$中每列至多有两个非零元素.
- 若$\mathbf{Q}$中每列都恰有两个非零元素, 则$\mathbf{Q}$中所有行向量之和为零向量. 于是, $\det\mathbf{Q}=0$.



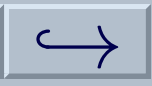

Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture











- 下设 $\mathbf{Q}$ 中至少有一列至多有一个非零元素，设为 $q_{ij}(=0,-1$ 或 $1)$.
- 将 $\det\mathbf{Q}$ 按第 $j$ 列进行行列式展开. 于是，$\det\mathbf{Q}=(-1)^{i+j}q_{ij}\cdot\det\mathbf{Q}_{ij}$，其中 $\det\mathbf{Q}_{ij}$ 是 $\mathbf{Q}$ 的 $k$ 阶子方阵.
- 由假定知，$\det\mathbf{Q}_{ij}=0,-1$ 或 $1$. 所以 $\det\mathbf{Q}=0,\pm1$.
- 由 $k$ 的任意性知，$\det\mathbf{P}=0,\pm1$.
- 再由 $\mathbf{P}$ 的任意性知，$\mathbf{K}$ 是幺模矩阵. ∎

**定理 2.3** 设 $D$ 是无环连通有向图，$\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$ 分别是 $\mathcal{B}(D)$ 和 $\mathcal{C}(D)$ 的幺模基矩阵. 则

$$\tau(D)=\det(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)=\det(\mathbf{C}\mathbf{C}^T).$$

其中 $\mathbf{B}^T$ 和 $\mathbf{C}^T$ 分别表示 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$ 的转置矩阵.



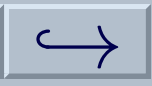

Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture











**证明**

- 利用两个矩阵乘积的行列式的 Binet-Cauchy 公式得

$$\det(\mathbf{B}\mathbf{B}^T) = \sum_{\substack{R \subseteq E(D) \\ |R| = n-1}} (\det(\mathbf{B}|R))^2. \qquad (10)$$

- 于是, 一方面由定理 2.2.2 (i)知, 式 (10) 右边中非零项的数目等于 $\tau(D)$.
- 另一方面, 由于 $D$ 是连通的并且 $\mathbf{B}$ 是幺模矩阵, 所以式 (10) 右边非零项的值都是 1.
- 因此, $\tau(D) = \det(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)$.
- 同理可证, $\tau(D) = \det(\mathbf{C}\mathbf{C}^T)$. ∎

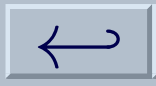
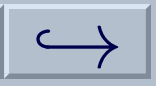



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







**推论 2.3.1** 设 $D$ 是无环连通有向图, $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$ 分别是 $\mathcal{B}(D)$ 和 $\mathcal{C}(D)$ 中的幺模基矩阵. 则

$$\tau(D) = \pm\det\begin{pmatrix}\mathbf{B}\\ \mathbf{C}\end{pmatrix}.$$

**证明**

- 由定理 2.3 有

$$\tau(D)^2 = \det(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)\cdot\det(\mathbf{C}\mathbf{C}^T) = \det\begin{pmatrix}\mathbf{B}\mathbf{B}^T & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{C}\mathbf{C}^T\end{pmatrix}.$$

- 由于 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$ 正交, 所以 $\mathbf{C}\mathbf{B}^T = \mathbf{B}\mathbf{C}^T = \mathbf{O}$.

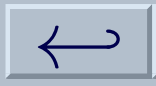
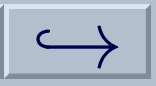



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







- 于是,

$$\begin{aligned}\tau(D)^2 &= \det\begin{pmatrix}\mathbf{B}\mathbf{B}^T & \mathbf{B}\mathbf{C}^T\\ \mathbf{C}\mathbf{B}^T & \mathbf{C}\mathbf{C}^T\end{pmatrix}\\ &= \det\left(\begin{pmatrix}\mathbf{B}\\ \mathbf{C}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{B}^T & \mathbf{C}^T\end{pmatrix}\right)\\ &= \det\begin{pmatrix}\mathbf{B}\\ \mathbf{C}\end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix}\mathbf{B}^T & \mathbf{C}^T\end{pmatrix}\\ &= \left(\det\begin{pmatrix}\mathbf{B}\\ \mathbf{C}\end{pmatrix}\right)^2\end{aligned}$$

- 故推论得证. ∎

**推论 2.3.2** 设 $D$ 是无环连通有向图, $T$ 是 $D$ 中支撑树, $\mathbf{B}_T$ 和 $\mathbf{C}_T$ 分别是 $\mathcal{B}(D)$ 和 $C(D)$ 中对应于 $T$ 的基矩阵, $\mathbf{K}$ 是从 $D$ 的关联矩阵 $\mathbf{M}$ 中删去任意一行后得到的矩阵.

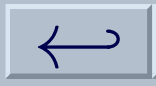
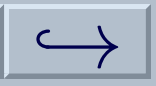



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







则

$$\tau(D) = \det\left(\mathbf{B}_T\mathbf{B}_T^T\right) = \det\left(\mathbf{C}_T\mathbf{C}_T^T\right) = \det\left(\mathbf{K}\mathbf{K}^T\right).$$

**证明**

- 由Propsition 3.1和3.2 知, $\mathbf{B}_T$ 和 $\mathbf{C}_T$ 都是幺模矩阵.
- 再由定理2.3 有,

$$\tau(D) = \det(\mathbf{B}_T\mathbf{B}_T^T) = \det(\mathbf{C}_T\mathbf{C}_T^T).$$

- 由例 2.2.2知, $\mathbf{K}$ 是 $\mathcal{B}(D)$ 的基矩阵.
- 由Propsition 3.4 知, $\mathbf{K}$ 是幺模矩阵.
- 再由定理2.3 有 $\tau(D) = \det(\mathbf{K}\mathbf{K}^T)$. ∎

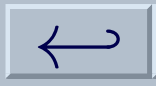
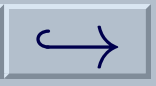



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







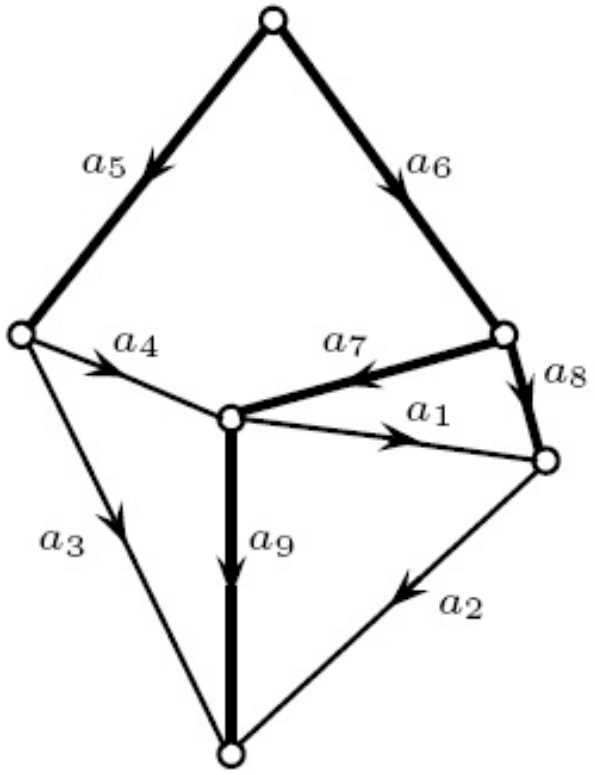



Figure 7: 有向图$D$和它的支撑树

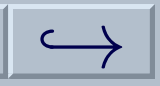


Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







**例 2.3.3** 考察图 7 中所示的有向图 $D$. 它的关联矩阵为

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

令 $\mathbf{K}$ 为从 $\mathbf{M}$ 中删去最后一行所得到的矩阵, 则

$$\det \mathbf{K}\mathbf{K}^{T}=\det\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}=66$$

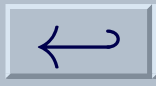
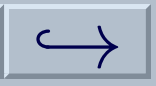



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







设$T$ 是$D$ 中由边子集$\{a_5,a_6,a_7,a_8,a_9\}$ 导出的支撑树(图 7粗边所示). $\mathcal{B}(D)$ 和 $C(D)$ 中对应于$T$ 的基矩阵$\mathbf{B}_T$ 和$\mathbf{C}_T$ 分别为式(5)和(7)所示. 于是,

$$\mathbf{B}_T\mathbf{B}_T^T=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 & -1\\ -2 & 3 & 2 & 0 & 1\\ -2 & 2 & 5 & -2 & 2\\ 0 & 0 & -2 & 3 & -1\\ -1 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_T\mathbf{C}_T^T=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & -1\\ -2 & 4 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 5 & 3\\ -1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

因而有 $\det(\mathbf{B}_T\mathbf{B}_T^T)=66=\det(\mathbf{C}_T\mathbf{C}_T^T)$. ∎

**推论 2.3.3** 设$T_n$ 表示$n(\geqslant 2)$ 阶竞赛图, 则$\tau(T_n)=n^{n-2}$.

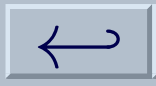
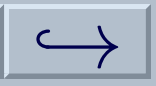



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







**证明** 由推论 2.3.2, 有

$$\begin{aligned}\tau(T_n) &= \det \mathbf{K}\mathbf{K}^T \\ &= \det \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{pmatrix}_{n-1} \\ &= n^{n-2}. \end{aligned}$$

∎

**推论 2.3.4** (矩阵-树定理, Kirchhoff, 1847) 设 $G$ 是顶点集为 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 的无环连通无向图, 则 $\tau(G) = \det \mathbf{K}\mathbf{K}^T$, 其中 $\mathbf{K}$ 是从 $G$ 的任何一个定向图 $D$ 的关联矩阵 $\mathbf{M}(D)$ 中删去任意一行后得到的矩阵.

**推论 2.3.5** (Cayley 公式, 1889) 设 $K_n$ 是顶点集为 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 的完全图, 则 $\tau(K_n) = n^{n-2}$, $n \geqslant 2$.

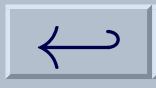
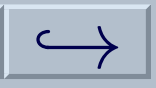



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







# 作业

2.3.7 设 $D$ 是非平凡无环连通有向图, $a$ 是 $D$ 的任意一条边. 证明:

$$\tau(D) = \tau(D \cdot a) + \tau(D - a).$$




Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture











# 4 最小连接问题

- 假设在某地区内要修建一个连接若干个城镇的公路系统. 已知城$x_i$ 与城$x_j$ 之间直通公路的造价为$c_{ij}$. 试设计一个造价最低的建造方案.
- 这类问题很多, 如某城市内供气, 供水、供电以及通讯等等系统的设计. 我们把这类问题称为最小连接问题 (minimum connection problem).
- 构作加权简单图$(G, \mathbf{w})$, 其中城镇$x_i$ 被视为$G$ 的顶点$x_i$,

$$x_i x_j \in E(G) \Leftrightarrow c_{ij} < \infty$$

(若$c_{ij} = \infty$, 则认为城$x_i$ 和城$x_j$ 之间不可能修筑公路), $\mathbf{w}(x_i x_j) = c_{ij}$.

- 于是, 最小连接问题就转化为在$(G, \mathbf{w})$ 中找出权和最小的支撑树. 这样的支撑树称为最小树 (minimum tree).

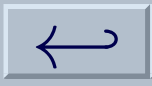
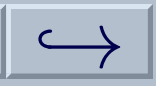



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







- 显然, 最小连接问题有解$\Leftrightarrow$ $G$ 为连通图。
- 枚举$G$ 的所有支撑树, 然后比较它们的权和, 找出最小树. 用这种方法来找出$G$ 的最小树无疑是可以的.
- 但一般说来, 当图的顶点数$n$ 很大时, 列出$\tau(G)$棵支撑树本身就是一件十分困难的事.(由推论 2.3.5 有$\tau(G) \leqslant \tau(K_n) = n^{n-2}$). 因此有必要寻找求最小树的有效算法.

## 支撑树算法

首先考虑最简单的情形, 即对每个$e \in E(G)$ 均有$\mathbf{w}(e) = 1$. $G$ 中任何支撑树都是最小树. 于是, 只需构造出任意支撑树. 有如下递归算法:

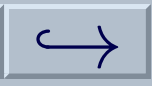


Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







**1.** 任取 $x_0 \in V(G)$, 令 $V_0 = \{x_0\}$, $T_0 = x_0$, $k = 0$.

**2.** 若 $V_{k-1}$ 和 $T_{k-1}$ 已选好, 则任取 $e_k \in [V_{k-1}, \overline{V}_{k-1}]$. 因而存在 $u \in V_{k-1}$, $x_k \in \overline{V}_{k-1}$ 使 $e_k = ux_k$.

令 $V_k = V_{k-1} \cup \{x_k\}$, $T_k = T_{k-1} + e_k$.

**3.** 若 $k < n-1$, 则转 2; 若 $k = n-1$, 则停止.

这个算法是可行的, 因为每步构造出的是顶点集为 $V_k$ 的子树 $T_k$. 由于 $G$ 是连通的, 所以该算法必停止于 $V_{n-1} = V(G)$ 和 $G$ 中支撑树 $T_{n-1}$.

**Remark.** 另外两种著名搜索算法为: 广度优先(BFS)和深度优先(DFS)算法.

## Prim 算法

Prim 推广了上述算法到一般情形.



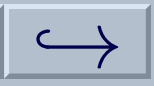

Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture











**Prim 算法:**

**1.** 任取 $x_0 \in V(G)$, $\ell(x_0) = 0$, $\ell(x) = \infty (x \neq x_0)$, $V_0 = \{x_0\}$, $T_0 = x_0$ 且 $k = 0$.

**2.** 对 $\forall\ x \in N_G(x_{k-1}) \cap \overline{V}_{k-1}$, 若 $\mathbf{w}(x_{k-1}x) < \ell(x)$, 则用 $\mathbf{w}(x_{k-1}x)$ 替代 $\ell(x)$.

选取 $x_k \in \overline{V}_{k-1}$ 使 $\ell(x_k) = \min\{\ell(x) : x \in \overline{V}_{k-1}\}$.

设 $e_k = ux_k$, $u \in V_{k-1}$ 使 $\mathbf{w}(e_k) = \ell(x_k)$. 令

$$V_k = V_{k-1} \cup \{x_k\},\ T_k = T_{k-1} + e_k.$$

**3.** 若 $k < n-1$, 则转 2; 若 $k = n-1$,则停止.

**例 2.4.1** 考虑图 8 (a) 所示的加权图 $(G, \mathbf{w})$. 按 Prim 算法构造最小树 $T_{n-1}$ 的过程图解在图 8 中, 其中 (b) 所示的是算法的第 1 步; 而 (c) 到 (h) 所示的是算法第 2 步



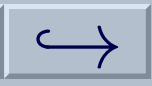

Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture











的6次迭代, 每次迭代后得到新顶点$x_k$ 和新边$e_k$ (图中粗边所示). 最后得到的最小树$T_{n-1}$ 如图 8(h) 所示(粗边). $\mathbf{w}(T_{n-1}) = 21$ (即各顶点标号$\mathbf{l}(x)$ 之和). ∎

下述定理确保了由Prim算法求出的$T_{n-1}$ 是$G$ 的最小树.

**定理 2.4.1** 按Prim算法求出的$T_{n-1}$ 是加权连通图$(G, \mathbf{w})$ 的最小树.

**证明**

- 只需证明$T_k$ 是$G$ 中某最小树的子图. 对$k \geqslant 0$ 用归纳法. 当$k = 0$ 时, 结论显然成立. 假设结论对$k-1$ 成立. 考虑$T_k = T_{k-1} + e_k$.




Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture

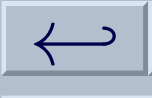












- 先证 $T_k$ 是树. 由归纳假设 $T_{k-1}$ 是树. 因 $V(T_{k-1}) = V_{k-1}$ 和 $e_k \in [V_{k-1}, \overline{V}_{k-1}]$, 所以 $T_k$ 是连通的.
- 又因 $e_k = ux_k$, $u \in V_{k-1}$, $x_k \in \overline{V}_{k-1}$, 故 $x_k$ 是 $T_k$ 中 1 度点, 即 $T_k = T_{k-1} + e_k$ 无圈, 因而 $T_k$ 是树.
- 下面证明 $T_k$ 是 $G$ 中某最小树的子图. 由归纳假设 $T_{k-1}$ 是 $G$ 中最小树 $T^*$ 的子图. $T_k = T_{k-1} + e_k$.
- 若 $e_k \in T^*$, 则 $T_k$ 是 $T^*$ 的子图.
- 若 $e_k \notin T^*$, 则由定理 2.1.5 知 $T^* + e_k$ 含唯一圈 $C$.
- 由于 $e_k \in [V_{k-1}, \overline{V}_{k-1}]$, 所以存在 $e'_k \in C$ 并且 $e'_k \in [V_{k-1}, \overline{V}_{k-1}]$, $e'_k \neq e_k$.
- 令

$$T' = (T^* + e_k) - e'_k,$$

则 $T_k \subseteq T'$.

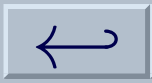
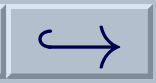



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







- 于是, 只需证明 $T'$ 也是 $G$ 的最小树.
- 由于 $T'$ 是连通的, 并且 $e(T') = n-1$, 所以由定理 2.1.3 知 $T'$ 是 $G$ 的另一棵支撑树, 并且

$$\mathbf{w}(T') = \mathbf{w}(T^*) + \mathbf{w}(e_k) - \mathbf{w}(e'_k). \tag{11}$$

- 在 Prim 算法中选取的边 $e_k \in [V_{k-1}, \overline{V}_{k-1}]$ 且具有最小的权, 所以

$$\mathbf{w}(e_k) \leqslant \mathbf{w}(e'_k). \tag{12}$$

- 结合式 (11) 和式 (12), 有 $\mathbf{w}(T') \leqslant \mathbf{w}(T^*)$, 即 $T'$ 也是 $G$ 的最小树. 由归纳原理, 定理得证. ∎



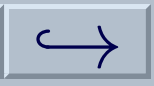

Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture











# 算法复杂度估计

怎样来判断算法的优劣？Edmonds (1965) 提出一个判定标准.

- 一个图论算法称为多项式算法 (polynomial algorithm), 如果在任何图上执行这个算法所需要的计算次数都可由顶点数 $n$ 和边数 $m$ 的多项式 (例如 $3n^2m$) 为其上界. 这个上界, 习惯上称为计算复杂度, 简称为复杂度 (complexity).
- 例如, Prim 算法的复杂度为 $O(n^2)$ (共需 $n-1$ 次迭代, 第 $k$ 次迭代时, 执行至多 $n-k$ 次函数值替代, 最多需要做 $n-k$ 次函数值比较选取 $x_k \in \overline{V}_{k-1}$, $k$ 次比较选取 $e_k \in [V_{k-1}, \overline{V}_{k-1}]$, 和 2 次赋值于 $V_k$ 和 $T_k$. 因此其算法复杂度为至多 $(n-1)(2n) = O(n^2)$).
- 一个算法的复杂度若为指数 (例如 $2^n$) 或 $n!$, 则当 $n$ 较大时, 该算法是无效的.

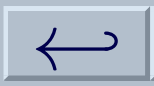
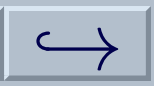



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







- 多项式算法也称为有效算法(efficient algorithm)或好的(good algorithm). Prim 算法是个有效算法.
- 表示算法复杂度量级常用记号:

$$f = O(g) : f(n) \le c \cdot g(n);$$

$$f = \Omega(g) : f(n) \ge c \cdot g(n);$$

$$f = \Theta(g) : f(n) = c \cdot g(n).$$

## 作业

2.4.3 求加权连通简单图 $(G, \mathbf{w})$ 中最小树的 **Kruskal** 算法如下:

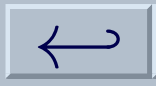
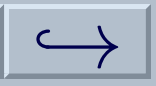



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







1. 选取 $e_1 \in E(G)$ 使 $\mathbf{w}(e_1)$ 尽可能小,

2. 若 $e_1, e_2, \cdots, e_i$ 选定, 则取 $e_{i+1} \in E(G) \setminus \{e_1, \cdots, e_i\}$ 使 $G[\{e_1, \cdots, e_i, e_{i+1}\}]$ 不含圈而且 $\mathbf{w}(e_{i+1})$ 尽可能地小,

3. 若 $i < n-1$, 则转 2; 若 $i = n-1$, 则停止.

(a) 证明: 由 Kruskal 算法构作 $G$ 的子图必是 $G$ 的最小树.

(b) 利用 Kruskal 算法求出下图中最小树.

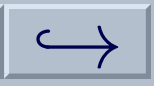


Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







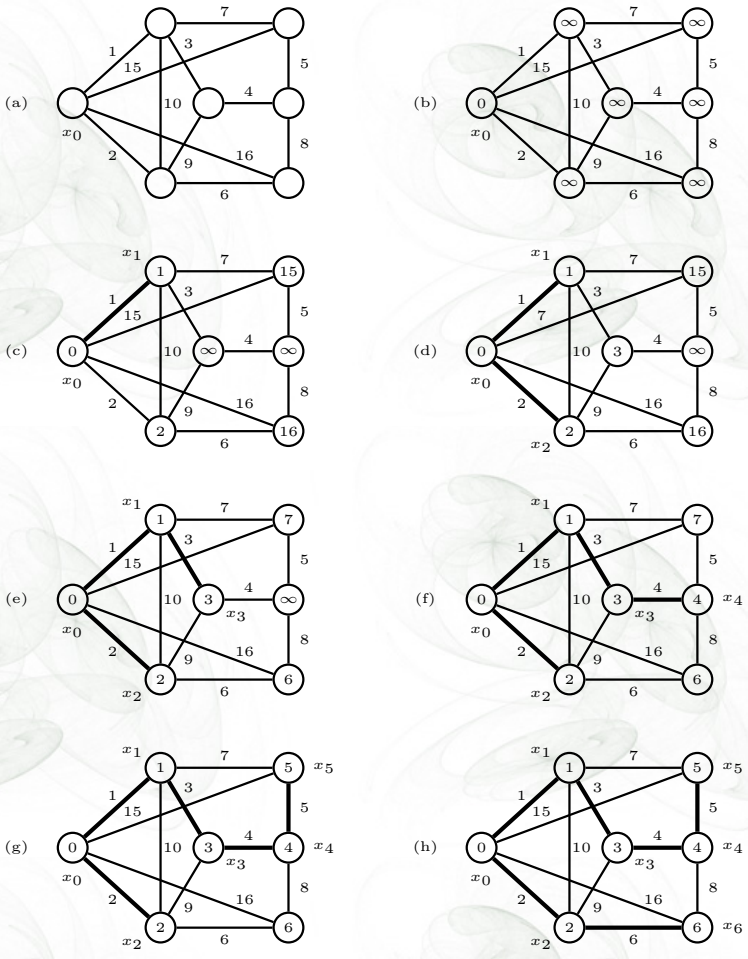



Figure 8: Prim 算法的应用

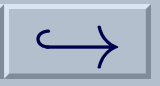


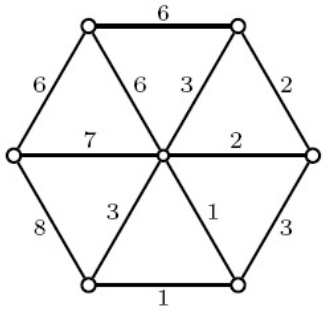
Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture

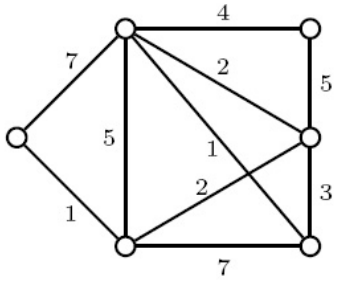








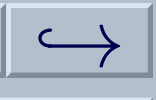



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







# 5 最短路问题

- 设有一个铁路系统连接着若干个城市,$x_0$ 是该系统中的一个固定城市(比如是首都或者省会城市). 在该系统中试求从 $x_0$ 到其他各城市的最短路线. 这个问题称为最短路问题 (shortest path problem).
- 用一个具有正值权函数 $\mathbf{w}$ 的加权简单无向图 $(G,\mathbf{w})$ 来表示这个铁路系统, 其中 $\mathbf{w}\in\mathcal{E}(G)$. 边 $e=xy$ 上的值 $\mathbf{w}(e)$ 表示城市 $x$ 和城市 $y$ 之间的铁路里程. 于是, 最短路问题就转化为在 $(G,\mathbf{w})$ 中找出 $x_0$ 到 $G$ 中各点最短路.
- 更一般的最短路问题的提法是: 设 $(D,\mathbf{w})$ 是有正值加权简单有向图,$x_0$ 是 $D$ 中的一个固定顶点. 寻找从 $x_0$ 到 $D$ 中各点最短有向路。
- 显然, 最短路问题有解的一个必要条件是 $D$ 中存在根在 $x_0$ 的支撑外向树. 反之,若 $D$ 中存在根在 $x_0$

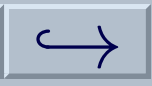


Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







的支撑外向树, 则最短路问题一定有解. 以下假定 $D$ 中存在根在 $x_0$ 的支撑外向树.

- 注意: 最短路问题的解不一定是最小支撑树. 即使是对于无向图中最短路问题, Prim 算法也无能为力. 例如, 图 8 (h) 中粗边所示的是用 Prim 算法求出的支撑树 $T$. 由习题 2.4.2 知, $T$ 是唯一的最小树. 沿着 $T$ 的边, 从 $x_0$ 到 $x_5$ 的路 $P$ 的长度为 13. 但从 $x_0$ 出发, 经过 $x_1$, 沿边 $x_1x_5$ 到达 $x_5$ 的路 $Q$ 的长度为 8. 因此, $P$不是 $G$ 中最短 $x_0x_5$ 路. 于是, 为求解最短路问题, 必须寻找另外的方法.

下面叙述的算法是 Moore (1957), Dijkstra (1959), Dantzig (1960) 以及 Whiting & Hillier (1960) 各自发现的. 该算法基于定理 1.4.2, 修改了 Prim 算法第 2 步. 在整个算法中, 试图求出一个函数 $\ell \in \mathcal{V}(D)$ 和含 $x_0$ 的顶点子集序列 $S_k$, 以及以 $S_k$ 为顶点集的根在 $x_0$ 的外向树

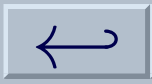
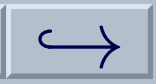



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







序列$T_k$, $k=0,1,\cdots,v-1$. 算法开始时, 令

$$\ell(x)=\begin{cases}0, & \text{若 } x=x_0;\\ \infty, & \text{若 } x\neq x_0,\end{cases}\qquad V_0=\{x_0\}=P_0.$$

在算法执行过程中, 通过不断修改$\ell(x)$ 的值而递归地构造出$S_k$ 和起点在$x_0$ 的有向路$P_k$.

## Moore-Dijkstra 算法

**1.** $\ell(x_0)=0$, $\ell(x)=\infty(x\neq x_0)$, $S_0=\{x_0\}$, $T_0=x_0$ 且$k=0$.

**2.** 对每个$x\in N_D^+(x_k)\cap\overline{S}_k$, 令

$$\ell(x):=\min\{\ell(x),\ell(x_k)+\mathbf{w}(x_k,x)\}.$$

取$x_{k+1}\in N_D^+(S_k)\cap\overline{S}_k$ 使得

$$\ell(x_{k+1})=\min_{x\in\overline{S}_k}\{\ell(x)\},$$

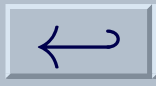
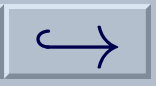



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







和 $x_j \in S_k$ $(j \leqslant k)$ 使 $(x_j, x_{k+1}) \in E(D)$.

令 $S_{k+1} = S_k \cup \{x_{k+1}\}$, $T_{k+1} = T_k + (x_j, x_{k+1})$ .

**3.** 若 $k = n-1$, 则停止. 若 $k < n-1$, 则用 $k+1$ 替代 $k$ 并转入第 2 步.

下面举例说明这个算法的应用.

**例 2.6.1** 考虑 9(a) 所示的加权图 $(D, \mathbf{w})$. Moore-Dijkstra 算法执行如图 9.

从图 9 可以看出, Moore-Dijkstra 算法执行过程实际上是 $D$ 中根在 $x_0$ 的支撑外向树的生长过程. 我们将证明图中顶点 $x_i$ 的标号 $\ell(x_i)$ 就是 $D$ 中从 $x_0$ 到 $x_i$ 的加权距离 $d_D(x_0, x_i)$.

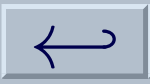



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture








Moore-Dijkstra 算法结束时构作的子图 $T$ 是 $n$ 个顶点,$n-1$ 条边, 无圈且连通, 因而 $T$ 是 $D$ 的支撑树. 又由于 $d_T^-(x_0)=0$, $d_T^-(x_i)=1\,(i\neq 0)$, 所以(由习题 2.1.1), $T$ 为外向树. 下述定理确保了对每个 $x_i\in V(D)$, $T$ 中 $(x_0,x_i)$ 路是 $D$ 中最短 $(x_0,x_i)$ 路.

**定理 2.5.1** 设 $T$ 是 $(D,\mathbf{w})$ 中由 Moore-Dijkstra 算法求出的根在 $x_0$ 的支撑外向树, 则对每个 $x\in V(D)$, $T$ 中 $(x_0,x)$ 路是 $D$ 中最短 $(x_0,x)$ 路.

**证明**

- 只需证明对每个 $x\in V(D)$, 均有 $d_D(x_0,x)=\ell(x)$.
- 一方面, 由 $T$ 的构造知, $T$ 中存在长为 $\ell(x)$ 的 $(x_0,x)$ 路 $P$. 因此, $d_D(x_0,x)\leqslant\ell(x)$.
- 另一方面, 我们证明对每次迭代过程中选取的 $x$ 都有 $\ell(x)=d_D(x_0,x)$. 假设 $x$ 是在第 $k$ 次迭代过程选取的点且首次满足 $\ell(x)>d_D(x_0,x)$.

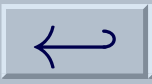
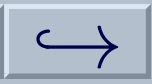



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







- 设 $Q=(x_0,x_1,\cdots,x_k=x)$ 是 $D$ 中最短 $(x_0,x)$ 路，并设 $Q$ 与 $\overline{S}_k$ 第一个公共顶点为 $x_i$.

- 断言：$\ell(x_i)=d_D(x_0,x_i)$.

  事实上，(注意到$i\geq 1$, $x_{i-1}\in S_k$)

$$\ell(x_i)\leq \ell(x_{i-1})+\mathbf{w}(x_{i-1},x_i)=d_D(x_0,x_{i-1})+\mathbf{w}(x_{i-1},x_i)$$

$$=d_D(x_0,x_i).$$

  最后一个等号用到事实：最短路的子路还是最短路

- 故

$$\ell(x)>d_D(x_0,x)\geq d_D(x_0,x_i)\geq \ell(x_i),$$

  和$x$ 的选取矛盾. ∎

Moore-Dijkstra 算法是个好算法，其复杂度为 $O(n^2)$.

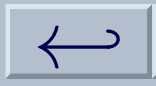
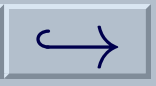



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







利用该算法还可以得到计算图的直径的多项式时间算法：

- Moore-Dijkstra 算法求出从 $x_0$ 到任何另外顶点 $x$ 的最短路和距离 $\ell(x)$. 由于 $x_0$ 是任意取定的顶点，所以当 $x_0$ 取遍图中所有顶点时，即 Moore-Dijkstra 算法重复执行 $n$ 次以后就能求出图 $D$ 的直径 $d(D)$.

- 例如，在图 9 所示的加权有向图 $(D,\mathbf{w})$ 上执行 6 次后求出 $D$ 中根在 $x_i\,(i=0,1,2,3,4,5)$ 的支撑外向树，其中根在 $x_0$ 的支撑外向树如图 9 (h) 所示. 对于每棵根在 $x_i$ 的支撑外向树 $T_i$ $(0\leqslant i,j\leqslant 5)$，顶点 $x_j$ 上的标号即为距离 $d_D(x_i,x_j)$. 以 $d_D(x_i,x_j)$ 作

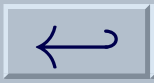
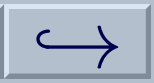



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







为 $(i,j)$ 元素所构成的6 阶方阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 & 6 & 8 \\ 12 & 0 & 2 & 4 & 7 & 7 \\ 10 & 11 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ 8 & 9 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 13 & 14 & 3 & 5 & 0 & 8 \\ 17 & 18 & 13 & 9 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

称为**距离矩阵** (distance matrix). 比较距离矩阵中的元素,即得 $D$ 的直径

$$d(D) = \max\{d_D(x_i, x_j) : 0 \leqslant i, j \leqslant 5\} = 18.$$

- 由于求 $d(D)$ 需重复执行Moore-Dijkstra 算法 $n$ 次, 然后对距离矩阵中 $n^2$ 个元素比较, 所以该算法求直径的计算复杂度为 $O(n \cdot n^2 + n^2) = O(n^3)$.
- 如果允许边上的权为负值，当图不含负圈时，上述最短路算法仍可执行；当图含有负圈时，最短路问题没有有效算法，该问题是NP-hard.

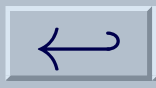
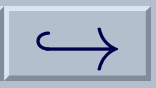



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







- Remark: 最长路径问题可以转化为最短路问题，当图含正圈时，最长路问题没有有效算法。

## 作业

2.5.5 某公司在六个城市 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ 中都设有分公司. 从 $x_i$ 到 $x_j$ 的直接航程票价由下列矩阵的第 $(i, j)$ 元素给出 ($\infty$ 表示无直达航线). 试为该公司制作一张任意两城市之间的最廉价路线表.

$$\begin{pmatrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{pmatrix}$$




Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture











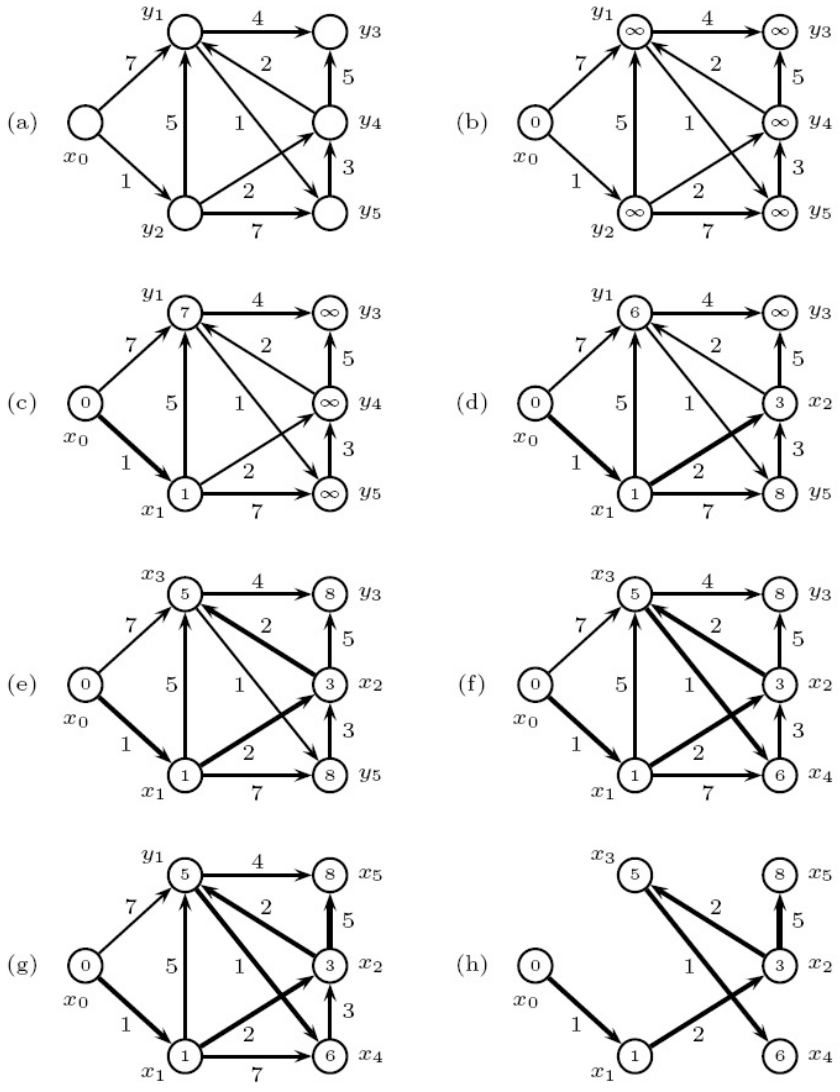



Figure 9: 最短路算法的应用

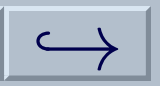


Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture







# 6 电网络方程

本节留给大家自学。



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture










# 谢谢大家!



Title Page
树与支撑树
图的向量空间
支撑树的数目
最小连接问题
最短路问题
电网络方程
Fulkerson conjecture





