– 图论及其应用–

平图与平面图

侯新民

计算与应用数学系

xmhou@ustc.edu.cn



Title Page

平图与 Euler 公式

Kuratowski 定理

对偶图

正多面体

印刷电路板的设计













目　录

1　平图与 Euler 公式　4

Euler 公式 12

作业 22

2　Kuratowski 定理　23

作业 34

3　对偶图　37

组合对偶图 44

作业 45

4　正多面体　46

作业 53

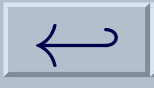


5 印刷电路板的设计 54
平面性算法 58
作业 65










1 平图与 Euler 公式

- 设 S 是一个给定的曲面, 比如平面、球面、双环面等等. 如果图 D 能画在曲面 S 上使得它的边仅在端点处相交, 则称 D 可嵌入曲面 (embeddable in the surface) S.
- D 在 S 上的这种画法 $\widetilde{D}$ 称为 D 在 S 上的表示 (representation).
- 由于图是否能嵌入曲面 S 与图中边的方向无关, 所以, 在下面的讨论中只需考虑无向图 G 的嵌入问题.
- 本章只讨论 S 是平面或球面的情形. 事实上, 我们有下列结论.

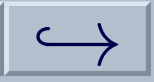
定理 3.1.1 图 G 可嵌入球面 $S \Leftrightarrow G$ 可嵌入平面 P.



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计





证明

- 考虑球极平面射影(见图 1). 球面 S 与平面 P 相切, 过切点的直径的另一端点为 z. 定义映射 $\varphi: S \to P$ 如下: 对任意点 $s \in S \setminus \{z\}$ 和点 $p \in P \setminus \{\infty\}$, 当且仅当 z, p, s 共线时, $\varphi(s) = p$ 并且 $\varphi(z) = \infty$. 易知 φ 是双射.

- 设 G 可嵌入平面 P, $\widetilde{G}$ 是 G 在 P 上的表示, 则 $\varphi^{-1}(\widetilde{G})$ 就是 G 在球面 S 上的表示.

- 反之, 设 $\widetilde{G}'$ 是 G 在 S 上的表示. 不妨设 z 不在 $\widetilde{G}'$ 的顶点上, 也不在 $\widetilde{G}'$ 的边上, 则 $\varphi(\widetilde{G}')$ 即为 G 在 P 上的表示. 因此, G 可嵌入球面 $S \Leftrightarrow G$ 可嵌入平面 P. ∎

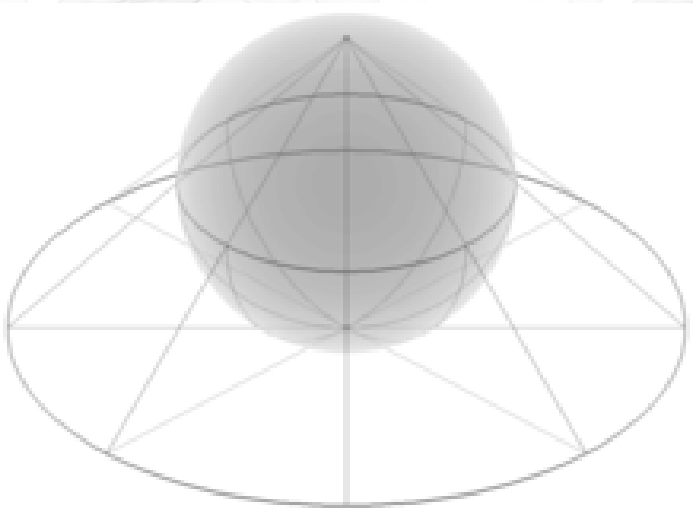


Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计







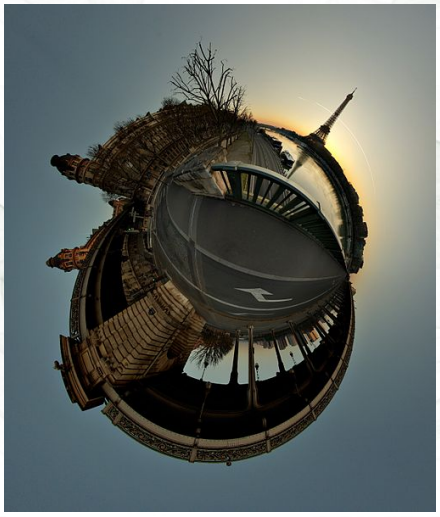


Figure 1: 球极平面射影

- 若图G可嵌入平面(或球面), 则称G是平面图 (planar graph).
- 不能嵌入平面 (或球面) 的图称为非平面图 (non-planar graph).
- G的平面表示用$\widetilde{G}$来表示. $\widetilde{G}$本身可看作是同构于G的图. $\widetilde{G}$称为平图 (plane graph).



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计

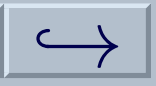


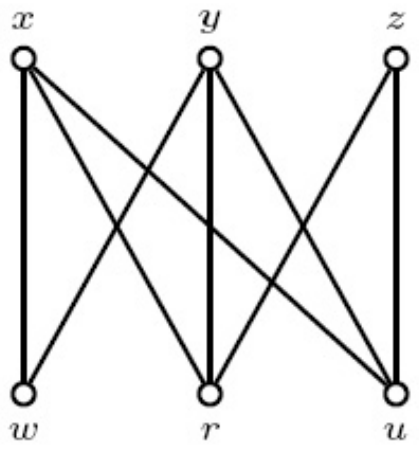




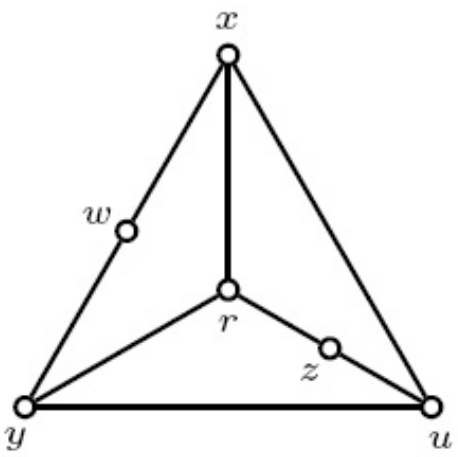








$G = K_{3,3}^{-}$



$\widetilde{G}$

Figure 2: 平面图 G 和它的平面表示 $\widetilde{G}$

- 图 2 所示的是平面图 G 和它的平面表示 $\widetilde{G}$, 其中 $G = K_{3,3}^{-}$ (表示从 $K_{3,3}$ 中除掉任何一条边后而得到的图, 这里 $G = K_{3,3} - zw$). $K_{3,3}^{-}$ 的这种平面表示



也可以看成是它在四面体上的嵌入, 使其顶点和边都在该四面体的棱上. 这种表示将在定理3.2的证明中用到.

- 从直观上看, 非空平面图的平面表示$\widetilde{G}$把平面P划分成若干个连通区域, 这些区域称为G的面 (face).
- 在平面图G的任何平面表示$\widetilde{G}$中, 有且恰有一个面含平面P中∞点, 该面称为$\widetilde{G}$的外部面 (exterior face).
- 不含平面P中∞点的面称为$\widetilde{G}$的内部面 (interior face).
- 设G是平面图, x是G中任意顶点, 则不难证明(习题3.1.2), 存在G的平面表示$\widetilde{G}$使得x在$\widetilde{G}$的外部面的边界上.



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计

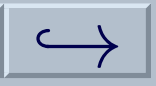












- 用 $F(G)$ 和 $\phi(G)$ 分别表示平图 G 的面集和面的数目.
- 易知, 对于任何平图 G, 均有 $\phi(G) \geqslant 1$, 而且 $\phi(G) = 1 \Leftrightarrow G$ 是林, $\phi(G) \geqslant 2 \Leftrightarrow G$ 中含回.
- 包围面 f 的诸边所构成的若干条闭链称为面 f 的边界。用 $B_G(f)$ 表示平图 G 中面 f 的边界 (boundary).
- $B_G(f)$ 中边的数目记为 $d_G(f)$ （割边计两次），称为面 f 的度 (degree of a face)（对连通图可以看成一个人从 f 的边界上的任一顶点出发沿 f 的边界一周回到起点所经过边的数目）.
- 例如图 3 所示的平图 G 中面 f_0 的边界

$$B_G(f_0) = x_3\ e_2\ x_1\ e_1\ x_2\ e_4\ x_6\ e_7\ x_3\ e_8\ x_5\ e_9\ x_5\ e_8\ x_3.$$



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计







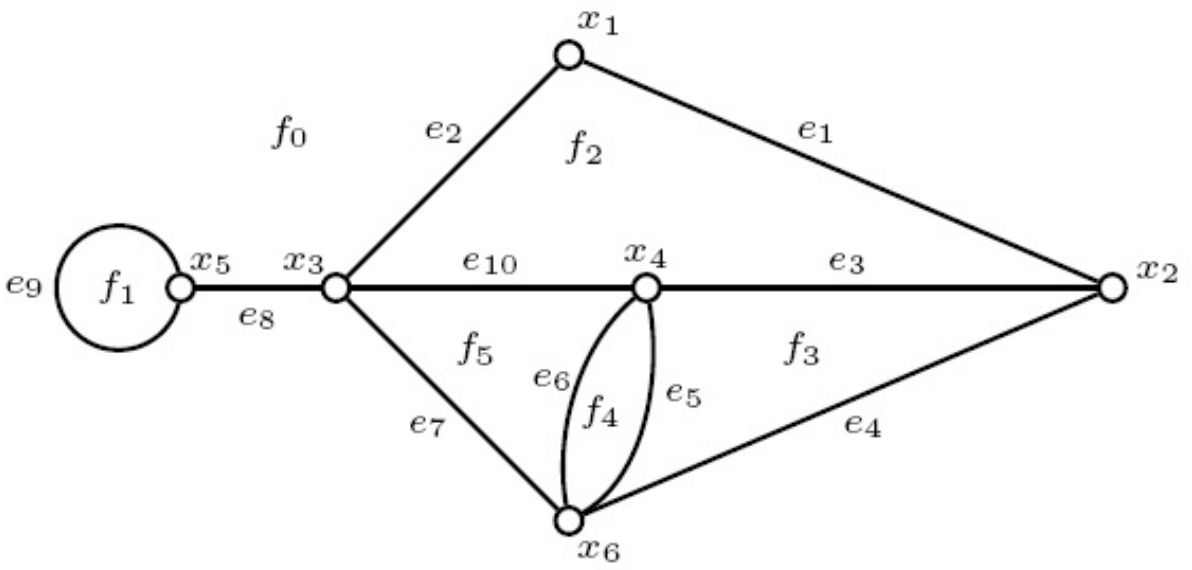



Figure 3: 平图的面

有 $d_G(f_0) = 7,\ d_G(f_1) = 1.$

- 容易看到, 平图 G 的任何内部面的边界是由 G 中一条闭链组成. 连通平图 G 的外部面的边界也是由 G 中一条闭链组成; 而非连通平图 G 的外部面



的边界是由 G 中若干条点不交的闭链组成.

平图 G 的面度 $d_G(f)$ 和边数 $e(G)$ 有下列关系:

定理 3.1.2 对于任何平图 G, 均有

$$\sum_{f \in F(G)} d_G(f) = 2e(G).$$

(证I: Double-counting) $A = \{(e,f) : e \in B_G(f)\}$, where $w((e,f)) = 2$ if e is a bridge, 1 otherwise.

(证II: 贡献法)

- 若 G 是空图, 定理自然成立.
- 下设 G 非空. 设 e 是 G 的任意边, 则 e 要么在某两个面的公共边界上(如图 3 中 G 的边 e_1 在面 f_0



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计








和面 f_2 的公共边界上), 要么在某个面的边界上出现两次 (如上例中的边 e_8 在面 f_0 的边界上出现两次).

- 因此,

$$\sum_{f\in F(G)} d_G(f) = 2e(G).$$

定理得证. ∎

Euler 公式

设G为连通平图, n, m 和 ϕ 分别为G的顶点数、边数及面数。据信在1750年，Euler给出了著名的Euler 多面体公式（或平面图公式）.

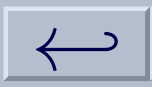
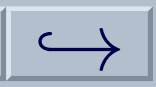
Lemma 1 设G 是连通平图，$e \in E(G)$.



Title Page
平图与 Euler公式
Kuratowski定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计





(i) 若e 包含在G的某圈C 中，则e 恰落在图G的两个面的边界上；

(ii) 若e 是G 的割边，则e 恰落在图G 的一个面的边界上。

定理 3.1.3 (Euler 公式, Euler, 1753)　设G 是连通平图，则

$$n+\phi-m=2 \ (\text{ 或} |V(G|+|F(G)|-|E(G)|=2). \quad (1)$$

证明 方法1

- 设G 是连通的平图, T 是G 的支撑树, 则 $\phi(T)=1$ 且$e(\overline{T})=m-n+1$.
- 由引理1知, 从G 中每次去掉余树$\overline{T}$ 中一条边导致G 中面减少一个. 所以,

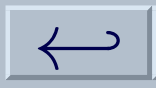
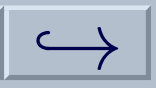
$$\phi(G)-e(\overline{T})=\phi(G)-(m-n+1)\geqslant\phi(T). \quad (2)$$



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计





- 另一方面, 在T 中每添加$\overline{T}$ 中一条边将增加G 的一个面. 所以,

$$\phi(G) \leqslant \phi(T) + e(\overline{T}) = \phi(T) + m - n + 1. \qquad (3)$$

- 由式(2)和式(3), 有

$$\phi(G) = \phi(T) + m - n + 1 = m - n + 2,$$

即 Euler 公式(1)成立.

方法2

- 对$\phi \geqslant 1$ 用归纳法.
- 当$\phi = 1$ 时,G 为树, $m = n - 1$, 结论显然成立. 假设结论对面数$\phi < k$ 的所有连通平图都成立.
- 设G 是$\phi(G) = k \geqslant 2$ 的连通平图. 因而G 含有圈C.



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计








- 任取 $e \in E(C)$, 则 $G-e$ 是连通平图, 且 $\phi(G-e) = k-1$.
- 由归纳假设, 有

$$n(G-e) - e(G-e) + \phi(G-e) = 2.$$

- 再由关系式

$$n(G-e) = n, e(G-e) = e(G) - 1,$$

$$\phi(G-e) = \phi(G) - 1.$$

- 就有

$$n - m + \phi(G) = 2.$$

定理得证. ∎

推论 3.1.3.1 设 G 是平图, 则 $n + \phi - m = 1 + \omega$.



推论 3.1.3.2 平面图 G 的所有平面表示 $\widetilde{G}$ 都有相同的面数.

推论 3.1.3.3 设 G 是 $n(\geqslant 3)$ 阶简单 2 部连通平面图, 则 $e(G) \leqslant 2n-4$.

证明

- 由于 $\widetilde{G}$ 是 2 部图, 所以 $\widetilde{G}$ 不含奇圈. 因此对每个 $f \in F(\widetilde{G})$, 均有 $d_{\widetilde{G}}(f) \geqslant 4$.
- 由定理 3.1.2 有

$$4\phi \leqslant \sum_{f \in F(\widetilde{G})} d_{\widetilde{G}}(f) = 2e(G),$$

即 $e(G) \geqslant 2\phi = 2(2+e(G)-n)$.

- 于是, 由 Euler 公式 (1) 得 $e(G) \leqslant 2n-4$. ∎



推论 **3.1.3.4** $K_{3,3}$ 是非平面图.

- 设 G 是简单平面图, x 和 y 是 G 中任意两个不相邻的顶点. 若 $G+xy$ 是非平面图, 则称 G 为极大平面图 (maximal planar graph).
- 由定义立即可知, 任何 $n(\geqslant 3)$ 阶极大平面图 G 的任何平面表示 $\widetilde{G}$ 中的每个面都是三角形.
- 例如, 见图 4 (a) 中所示的是一个极大平面图, (b) 中所示的是它的一个平面表示.

- 极大平面图的平面表示称为三角剖分平图 (triangulation of a plane graph), 简称三角剖分图 (triangulation).



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计







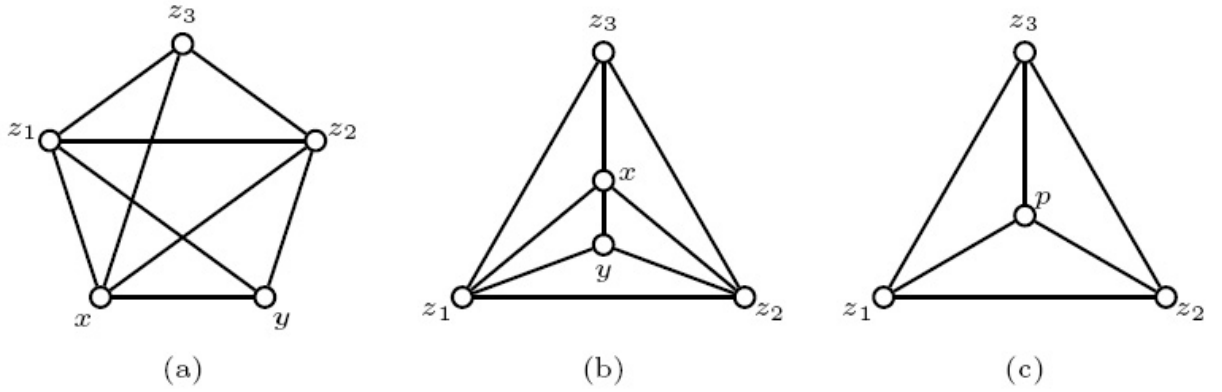



Figure 4: 证明定理3.1.5的辅助图

推论 3.1.4.1 设 G 是 $n(\geqslant 3)$ 阶简单平面图, 则 $e(G) \leqslant 3n-6$. ∎

推论 3.1.4.2 设 G 是简单平面图, 则 $\delta \leqslant 5$.

证明

- 当 $n=1,2$ 时, 结论成立是显然的.



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计

- 若 $n \geqslant 3$, 则由推论 1.3.1 和推论 3.1.4.1 有

$$\delta n \leqslant \sum_{x \in V} d_G(x) = 2e(G) \leqslant 2(3n-6),$$

即得 $\delta \leqslant 5$. ∎

推论 3.1.4.3 K_5 是非平面图.

证明 直接计算边数可得。 ∎

平面图的下列特征是K. Wagner (1936) 和I. Fáry (1948) 独自发现的.

定理 3.1.5 简单平面图 G 有平面表示 $\widetilde{G}$ 使其中每条边都是直线段.

证明

- 只要对极大平面图 G 来证明定理成立就可以了.



- 对阶数 $n(\geqslant 3)$ 用归纳法. 当 $n=3$ 时, G 是三角形, 定理显然成立.
- 假设定理对所有阶数小于 n 的极大平面图都成立, 并设 G 是 $n(\geqslant 4)$ 阶极大平面图. 不妨设 G 是三角剖分图.
- 选取 $x \in V(G)$ 使 x 不是外部面边界上的点. 取 $y \in N_G(x)$. 于是 xy 仅是某两个内部三角形的公共边.
- 不妨设这两个三角形分别为 (z_1, x, y, z_1) 和 (z_2, x, y, z_2) (见图 4 (b)).
- 考虑边 xy 的收缩图 $G \cdot xy$. 令 $G \cdot xy$ 中 x 和 y 收缩为点 p, 并令 G' 为 $G \cdot xy$ 中删去重边后得到的图 (见图 4 (c)).
- 显然 G' 是平面图, 而且由定理 3.1.4 有

$$e(G') = e(G) - 3 = 3(n(G) - 1) - 6 = 3n(G') - 6.$$



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计








- 再由定理3.1.4知G'是$(n-1)$阶极大平面图.
- 由归纳假设, G'有平面表示$\widetilde{G}'$使其中的每条边都是直线段.
- 考虑$\widetilde{G}'$中边pz_1和pz_2. 将它们分裂成两个三角形(见图4(c)和(b)). 这样得到的图$\widetilde{G}$就是G的平面表示, 而且每条边都是直线段. 由归纳原理, 定理得证. ∎



作业

3.1.4 设 G 是 $n(\geqslant 4)$ 阶图, $\Delta=\Delta(G)$, n_i 表示 G 中 i 度点数目. 证明:

(a) 若 G 是三角剖分图, 则 $3n_3+2n_4+n_5=n_7+2n_8+\cdots+(\Delta-6)n_\Delta+12$;

(b) 若 G 是树, 则 $n_1=n_3+2n_4+3n_5+\cdots+(\Delta-2)n_\Delta+2$.

3.1.7 证明: (a) 若 G 是围长 $g\geqslant 3$ 的 n 阶连通平面图, 则 $e(G)\leqslant g(n-2)/(g-2)$;

(b) Petersen 图是非平面图.

3.1.10 设 G 是简单平面图, 且 $\Delta(G)=n-1$. 证明: 若 $n\geqslant 5$, 则 G 中存在不相邻两顶点使其顶点度都 $\leqslant 3$.



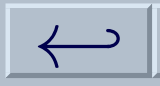
Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计

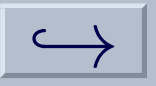












2 Kuratowski 定理

- 设 $e \in E(G)$ 且 $e = xy$. 边e 的细分 (edge subdivision) 是指从 G 中删去 e 并用一条与 G 内部点不交的长为 2 的路连接 x 和 y.
- 图 G 的细分图 (subdivision of a graph) 是指把 G 的边进行一系列细分而得到的图.
- 例如, 图 5 所示的是 K_5 中一条边的细分和 $K_{3,3}$ 的一个细分图.

Proposition 2.1 *G is planar if and only if the subdivision of G is planar.*

- 设 H 是 G 的子图, 在 $E(G) \setminus E(H)$ 上定义关系 "$\sim$" 如下: $e_1 \sim e_2 \Leftrightarrow$ 在 $G - E(H)$ 中存在一条



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计







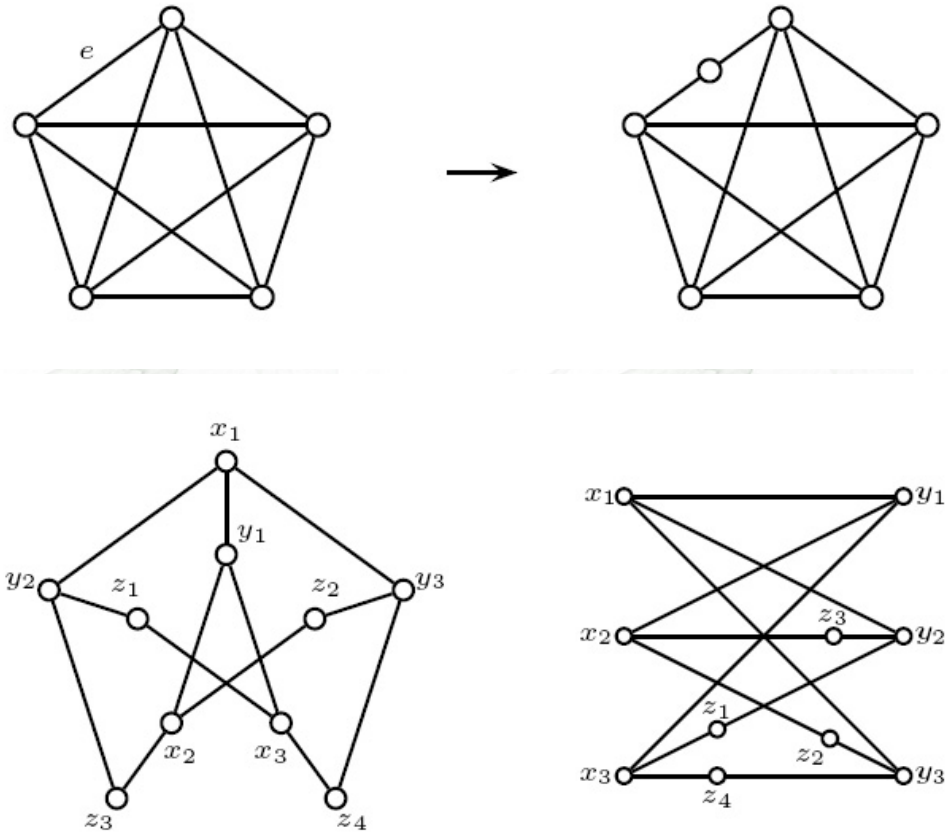



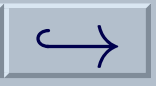
Figure 5: K_5中边 e 的细分，$K_{3,3}$ 的细分图



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计





链 W 使得
(i) W 的第一条边和最后一条边分别是 e_1 和 e_2;
(ii) W 与 H 是内点不交的.

- 容易验证“$\sim$”是 $E(G)\setminus E(H)$ 上的等价关系. 由关系“$\sim$”的等价类导出的 $G-E(H)$ 中的子图称为 G 的 H 分支.

- 从定义直接推出:若 B 是 G 的 H 分支, 则 B 是连通的, 并且 B 的任何两顶点都由与 H 内部点不交的路连接着, 而且任何两个不同的 H 分支是边不交的.

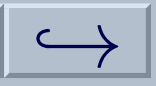
- 对于 H 分支 B, 记 $V_G(B,H)=V(B)\cap V(H)$, 并称 $V_G(B,H)$ 为 B 和 H 在 G 中的接触点集.

- 在图 6 所示的图 G 中, 子图 H 为圈 $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_1)$, B_1, B_2, B_3, B_4 是 4 个 H 分支,







$$V_G(B_1,H) = V_G(B_2,H) = \{x_1,x_2,x_3\},$$
$$V_G(B_3,H) = \{x_4,x_6,x_7,x_9\},\ V_G(B_4,H) = \{x_5,x_8\}.$$

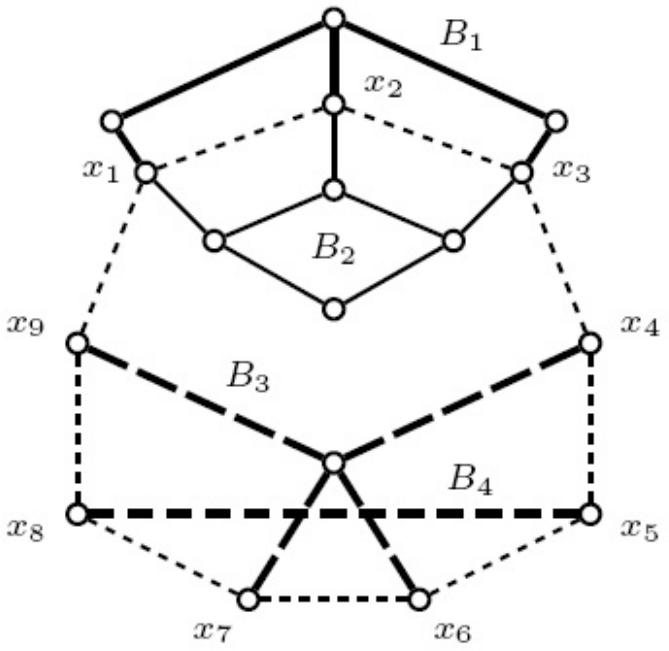


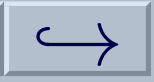
Figure 6: G 的 H 分支



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计





下述定理给出了平面图的一个特征，它是波兰数学家C. Kuratowski (1930)和美国数学家O. Frink & P. A. Smith (1930)独立发现的，一般文献中都称为Kuratowski 定理. 这里给出的是H. Tverberg (1989)的证明.

定理 3.2 (Kuratowski 定理) 图 G 是平面图 $\Leftrightarrow$ G 不含 K_5 或 $K_{3,3}$ 的细分图.

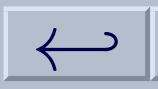
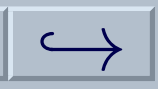
证明

- 必要性显然成立.
- 下证充分性. 显然只需对连通的简单图来证明. 阶数 $n \leqslant 5$ 的图，易验证其充分性成立.







- (反证法) 下设 G 是一个阶数 $n(\geqslant 6)$ 最小, 边数最多且不含 K_5 或 $K_{3,3}$ 细分图的非平面简单图, 则 G 不含割点且 G 含 K_5^- (K_5 去掉一边)或 $K_{3,3}^-$ ($K_{3,3}$ 去掉一边)的细分图, 记为 H.
- 断言: G 必含 $K_{3,3}^-$ 的细分图.
- 若 H 是 K_5^- 的某个细分图. 由于 H 是平面图, G 是非平面图, 所以必存在 G 的 H 分支 B 与 H 至少有两个接触点 x 和 y (因 G 不含割点).
- 设 P 是 B 中一条 xy 路 (图 7 (a) 中粗边所示), 则 $xy \in E(H)$ (否则 G 含 K_5 细分图).
- 由于 G 是简单图, 所以, $n(P) \geqslant 3$ 且 $H \cup P$ 含 $K_{3,3}^-$ 细分图 (见图 7 (b)). 断言得证!



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计







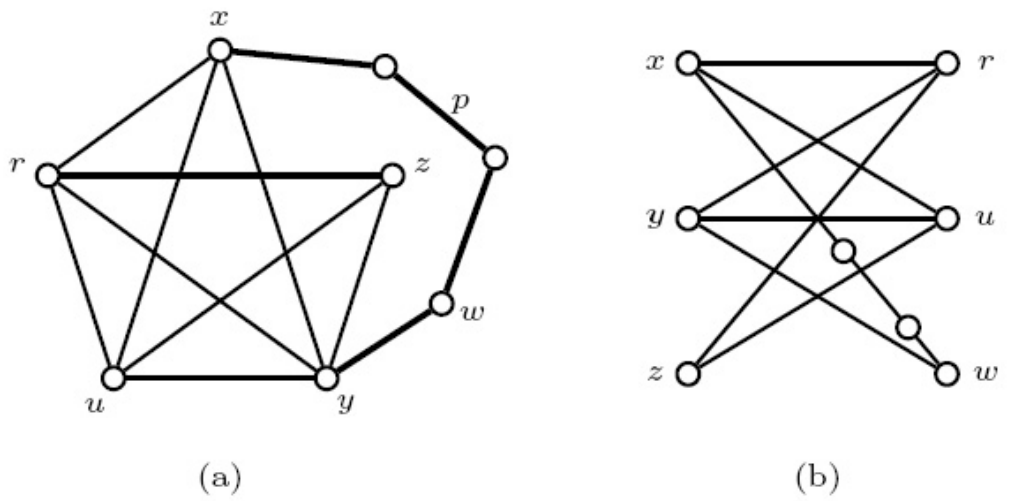



Figure 7: (a) G 中子图 $H \cup P$ (b) $H \cup P$ 中子图 $K_{3,3}^{-}$ 的细分图

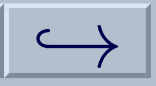
- 因此, 不妨假定 H 是 $K_{3,3}^{-}$ 的细分图, 它的“2 部划分”为 $\{X,Y\}$, 其中 $X=\{x,y,z\}$, $Y=\{r,u,w\}$, 且不含“边” P_{zw} (参见图 7 (b)).
- 考虑到平面嵌入与球面嵌入是等价的, 我们试图



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计





将G嵌入四面体的表面来导致矛盾.

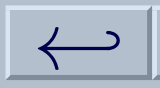
- 设四面体T的4个顶点为x,y,r,u, 平面图H的顶点除x,y,r,u外全都嵌在T的棱上.
- 因此, H中至少还有两个顶点, 比如w和z被嵌在T的异面棱上. 不妨设w和z分别被嵌在T的棱xy和ru上(见图8).
- 由G的非平面性和$n(G)$的最小性知, $d_G(w) \geqslant 3$且$d_G(z) \geqslant 3$, 所以w和z都是某些H分支的接触点.
- 设B是H分支. 由于G不含$K_{3,3}$的细分图, 所以B与H的接触点不在T的异面边界上(否则, 例如, 若点w和z在B上,则G中含$K_{3,3}$的细分图).



Title Page
平图与Euler公式
Kuratowski定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计







全 屏

搜 索

关 闭

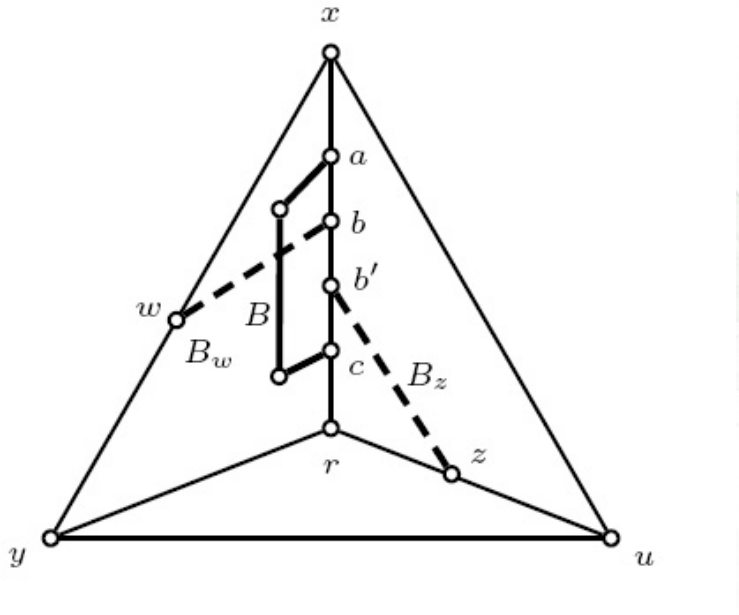


Figure 8: 证明定理3.2的辅助图

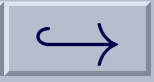
- 于是B与H的接触点或者全在T的一条棱上(此时称B为小分支), 或者在T的某个面的2条或3条边界上(此时称B为大分支). 因此, G的每个分支都在T的某一个面上.



Title Page
平图与Euler公式
Kuratowski定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计





- 注意到：不同大分支的嵌入互不影响；不同楞上的小分支的嵌入也互不影响。
- 设 B_w 和 B_z 分别是其含点 w 和 z 的 H 分支.
- 由 $n(G)$ 的最小性知, $G-w$ 和 $G-z$ 都能嵌入 T. 所以, 若 B_w 是小分支, 则其不影响其余分支嵌入 T. 因此, 若 G 不能嵌入 T, 则 B_w 必是大分支. 同理, B_z 也是大分支.
- 但由于 B_w 和 B_z 都不影响其余大分支的嵌入, 所以 B_w 和 B_z 必影响某个小分支 B 嵌入 T.
- 不妨设 B 与 H 的接触点在 T 的棱 xr 上. 于是在棱 xr 上存在点 a, b, b', c, 其中 b, b' (可能有 $b'=b$) 在 a 与 c 之间, 且 a 与 c 是 B 与 H 的接触点, b 和 b' 分别是 B_w 和 B_z 与 H 的接触点 (见图 8).
- 今将 H 中沿 T 的棱 xr 上的 ac 路换成 B 中的 ac 路 (图 8中粗边所示)而得到的子图为 H'. 并令 P 是

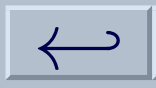


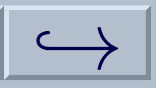












由 B_w 中 wb 路和在 T 中棱 xr 上的 bb' 路以及 B_z 中的 $b'z$ 路的并而得到的 wz 路(图 8 中粗虚边所示), 则 $H' \cup P$ 为 $K_{3,3}$ 的细分图, 矛盾于假定. 充分性得证. ∎

由 Kuratowski 定理 (3.2), 立刻可以断定所有树都是平面图. 同时也可以断定 Petersen 图不是平面图, 因为它含有 $K_{3,3}$ 的细分图, 如图 5 所示, 其中 "2 部划分" 为 $\{X, Y\}$, $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$.

平面图还存在若干个特征, 如 K. Wagner (1937) 证明了:
图 G 是平面图 $\Leftrightarrow$ G 不含边收缩为 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图.

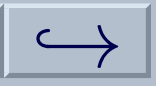
又如 S. McLane (1937) 证明了: 图 G 是无桥平面图 $\Leftrightarrow$ G 有一个基圈集(导出其整个圈空间的一组圈), 与另一条圈的并正好含 G 中每条边两次.



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计





结构图论中著名猜想之一：双圈覆盖猜想(Cycle Double Cover Conjecture)

Conjecture 2.2 (Szekeres,1973, and Seymour 1980) *Every bridgeless graph has a multiset of cycles covering every edge exactly twice.*

作业

3.2.1 证明: (a) 若 G 是非平面图, 则 G 的每个细分图也都是非平面图;

(b) 若 G 是平面图, 则 G 不含 K_5 或 $K_{3,3}$ 的细分图;

(c) 若 G 是平面图, 则 G 的每个子图也是平面图.



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计










Figure 9: Petersen 图的5圈双覆盖

3.2.6 设 G 是奇阶平图. 证明: 若 G 中有 Hamilton 圈, 则 G 有偶数 $(\geqslant 2)$ 个奇度面.

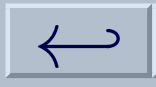
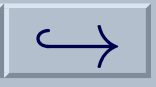
3.2.7 A graph is called outerplanar graph if it has a drawing in which every vertex lies on the boundary of the



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计





out face. Show that a graph is outerplanar if and only if it contains no subdivision of K_4 and $K_{2,3}$.



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计













3 对偶图

- 设 G 是平图, $F(G)=\{f_1,f_2,\cdots,f_\phi\}$. 定义图 G^* 如下: G 中每个面 f_i 都和 G^* 中一个顶点 f_i^* 对应, 即 $V(G^*)=\{f_1^*,f_2^*,\cdots,f_\phi^*\}$, G 中每条边 e 都和 G^* 中一条边 e^* 对应, 即 $E(G^*)=\{e^* \mid e\in E(G)\}$

  f_i^* 和 f_j^* 有边 e^* 相连 $\Leftrightarrow$ G 中面 f_i 和 f_j 有公共边界 e.

  G^* 称为 G 的几何对偶图 (geometric dual graph).

- 图 10 所示的是平图 G (细线所示) 和它的几何对偶图 G^* (粗线表示).



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计

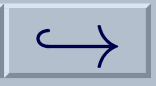












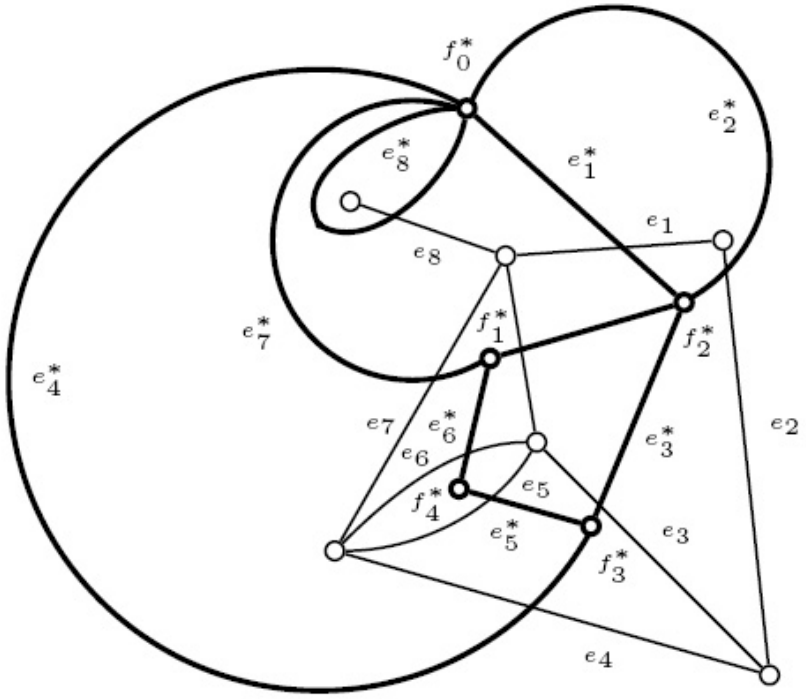


Figure 10: 平图 G (细线所示) 的几何对偶图 G^* (粗线表示)

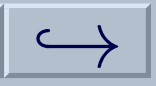
- 容易看出,平图 G 的几何对偶图 G^* 仍是平图 (习题 3.3.2).



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计





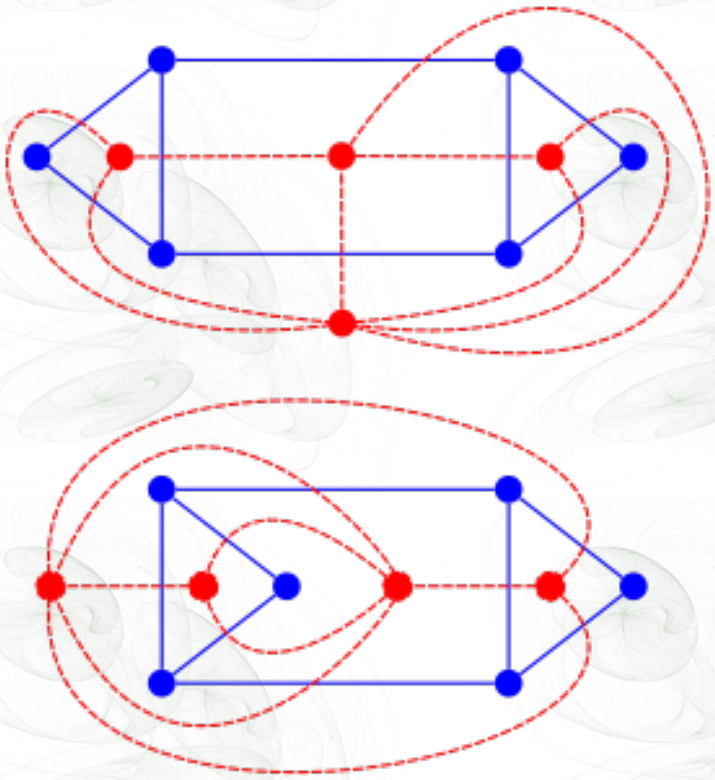


Figure 11: 其几何对偶图不同构的两个同构平图

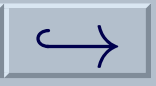
- 值得注意的是, 同构的平图可以有不同构的几何对偶图. 例如, 图 11 中所示的两个平图是同构的,



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计





但它们的几何对偶图却不同构. 因为左边的图有一个5度的面, 而右边的图则没有这样的面.

- 因此, 几何对偶图的概念仅对平图是有意义的, 一般不能推广到平面图上去.
- 从 G^* 的定义, 立即有

$$\begin{cases} n(G^*) = \phi(G), & e(G^*) = e(G), \\ d_{G^*}(f^*) = d_G(f), & \forall\ f \in F(G). \end{cases} \tag{4}$$

定理 3.3.1 设 G^* 是平图 G 的几何对偶图, $B \subseteq E(G)$, $B^* = \{e^* \in E(G^*) : e \in B\}$. 则

(i) $G[B]$ 是 G 的圈 $\Leftrightarrow$ B^* 是 G^* 的键;

(ii) B 是 G 的键 $\Leftrightarrow$ $G^*[B^*]$ 是 G^* 的圈.

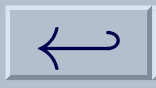
证明 (i) ($\Leftarrow$)



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计







全 屏

搜 索

关 闭

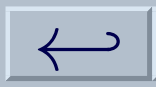
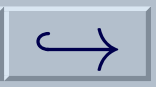
- 设 B^* 是 G^* 的键, 要证明 $G[B]$ 是 G 中圈.
- 由于 B^* 是 G^* 的键, 所以 $V(G^*)$ 存在两个不交的非空真子集 F_1^* 和 F_2^* 使 $B^* = E_{G^*}[F_1^*, F_2^*]$.
- 由于 $V(G^*) = F(G)$. 所以 $G[B]$ 将 $F(G)$ 划分成两个不交的非空真子集 F_1 和 F_2, 其中 $F_i (i = 1,2)$ 是 G 中对应于 F_i^* 的面集.
- 因为 B^* 是极小边割集, $G^*[F_i^*]$ 是连通的.
- 令 G_i 为 F_i 中面的并 $(i = 1,2)$. 由于 $F_i \neq \emptyset$, 所以 G_1 有边界 H 且 $E(H) = B$.
- 由于 $G^*[F_1^*]$ 是连通的, 所以 G_1 的外部面边界 $H = G[B]$ 是连通的.
- 又由于 H 中每条边是 G_1 中面和 G_2 中面的公共边界, 所以 $H = G[B]$ 中顶点都是 2 度点, 于是 H 是 G 的圈.



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计





$(\Rightarrow)$

- 设 $G[B]$ 是 G 中圈, 要证明 B^* 是 G^* 中键.
- 由于 $G[B]$ 是 G 中圈, 所以它将 G 的面集 $F(G)$ 划分成两个不交的非空真子集 F_1 和 F_2.
- 令 $F_i^*\,(i=1,2)$ 是 G^* 中对应于 F_i 的顶点集.
- 不妨设 F_1 在 $G[B]$ 的内部. 于是 $G[B]$ 是 F_1 中面之并的外部面边界, 即 B 中任何一条边都在 F_1 中某个面和 F_2 中某个面的公共边界上.
- 换言之, B 中任何一条边 e 都在 $G[B]$ 的内部面和外部面的公共边界上, 因而 e^* 连接 F_1^* 中顶点到 F_2^* 中顶点, 即 B^* 是 G^* 边割集 $E_{G^*}(F_1^*, F_2^*)$.
- 由于 $G^*[F_1^*]$ 和 $G^*[F_2^*]$ 都是连通的, 所以由习题 2.2.3 知, $B^* = E_{G^*}[F_1^*, F_2^*]$ 是 G^* 的键.









(ii) 的证明类似于 (i) 的证明, 留给读者 (习题 3.3.4). ∎

推论 3.3.1.1 设 T 是连通平图 G 的支撑树, $E^* = \{e^* \in E(G^*) : e \in E(\overline{T})\}$, 则 $T^* = G^*[E^*]$ 是 G^* 的支撑树.

证明

- 当 $\phi(G) = 1$ 时, $G = T, E^* = \emptyset$, G^* 和 T^* 是平凡图, 结论成立.
- 下设 $\phi(G) \geqslant 2$. 由于 G 的每个面的边界都含 $E(\overline{T})$ 中边, 所以 G^* 的每个顶点都与 E^* 中边关联, 即 T^* 是 G^* 的支撑子图.
- 若 T^* 中含 G^* 的圈, 则由定理 3.3.1 知, $E(\overline{T})$ 含 G 的键, 矛盾于定理 2.1.6 (i). 所以 T^* 不含圈.
- $$e(T^*) = e(\overline{T}) = e(G) - n + 1 = \phi - 2 + 1 = n(G^*) - 1,$$



这里第三个等号用到了Euler公式。由定理2.2.3知, T^* 是 G^* 的支撑树. ∎

推论 3.3.1.2 设 G 是连通平图, 则

$$\dim \mathcal{C}(G^*) = \dim \mathcal{B}(G)$$

$$\dim \mathcal{B}(G^*) = \dim \mathcal{C}(G).$$

组合对偶图

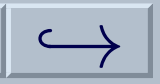
了解! 感兴趣的同学可自学!



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计





作业

3.3.1 设 G 是平图, G^* 是 G 的几何对偶图.

(a) 证明: G^* 是连通的平图.

(b) 举例说明 G 不一定是 G^* 的几何对偶图.

(c) 证明: 设G是连通平图, 则$G^{**} \cong G$.

3.3.6 证明: 任何平图不存在这样的五个面使它们两两有公共边界.



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计








4 正多面体

- 平图的理论与凸多面体的研究有着紧密的联系. 事实上, 每个凸多面体都对应着一个平图.
- 设 P 是凸多面体. 以 P 的顶点为顶点, P 的棱为边而得到的平图 $G(P)$ 称为对应于 P 的平图.
- 易知 $G(P)$ 是连通的而且 $\delta(G(P)) \geqslant 3$, P 的面就是 $G(P)$ 的面, 而且 $G(P)$ 的每条边正好在两个面的边界上.
- 凸多面体 P 和对应于 P 的平图 $G(P)$ 如图 12 所示.
- 习惯上, 用 V, E, F 分别表示凸多面体 P 的顶点数, 棱数和面数, 所以 Euler 公式可以写成

$$V - E + F = 2. \tag{5}$$

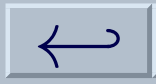
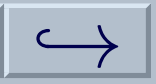
式 (5) 就是著名的 Euler **凸多面体公式**.



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计





- 为方便起见, 用 V_n 和 F_n 分别表示凸多面体 P (或对应的平图 $G(P)$) 的 n 度点和 n 度面的数目.
- 于是 $n \geqslant 3$, 并且, 有

$$2E = \sum_{n\geqslant 3} nV_n = \sum_{n\geqslant 3} nF_n. \tag{6}$$

定理 3.4.1 每个凸多面体中都至少有一个 n 度面（多面角），其中 $3 \leqslant n \leqslant 5$.

证明 反证法.

- 设 $F_3 = F_4 = F_5 = 0$. 则由式 (6), 有

$$2E = \sum_{n\geqslant 6} nF_n \geqslant \sum_{n\geqslant 6} 6F_n = 6\sum_{n\geqslant 6} F_n = 6F,$$



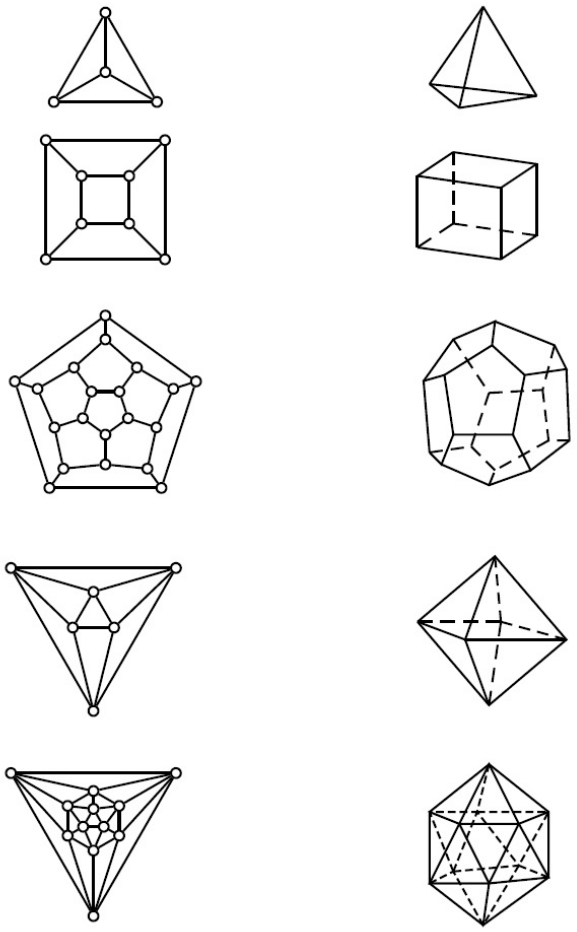


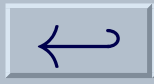
Figure 12: 正多面体



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计








即有

$$F \leqslant \frac{1}{3}E. \tag{7}$$

- 另一方面, 由式(6), 有

$$2E = \sum_{n\geqslant 3} nV_n \geqslant 3\sum_{n\geqslant 3} V_n = 3V,$$

即,

$$V \leqslant \frac{2}{3}E. \tag{8}$$

- 于是, 由Euler凸多面体公式(5)和不等式(7), (8)得:

$$E = V + F - 2 \leqslant \frac{2}{3}E + \frac{1}{3}E - 2 = E - 2,$$

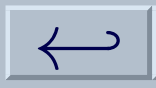
矛盾。定理得证. ∎



Title Page
平图与Euler公式
Kuratowski定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计







每个面都是全等的正多边形，并且各个多面角都是全等的多面角的凸多面体称为正多面体 (regular polyhedron), 亦称为 Plato 体. 对应的平图称为 Plato 图 (见图 12).

Remark. Each plato has $V_k(\geq 4)$ vertices with some $3 \leq k \leq 5$ and $F_h(\geq 4)$ faces with some $3 \leq h \leq 5$.

下述定理是 Euclid (约公元前 330 年–前 275 年) 的 13 卷《几何原本》书中的最后一个结果. 我们用 Euler 凸多面体公式来给出它的证明.

定理 3.4.2 仅有五个正多面体 (如图 12 所示).

证明



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计








- 设P是正多面体且$G(P)$是对应的平图. 由公式(5)和式(6), 对任何凸多面体, 均有

$$\begin{aligned} -8 = & \quad 4E-4V-4F = 2E+2E-4V-4F \\ = & \sum_{n\geqslant 3} nF_n + \sum_{n\geqslant 3} nV_n - 4\sum_{n\geqslant 3} V_n - 4\sum_{n\geqslant 3} F_n \\ = & \sum_{n\geqslant 3} (n-4)F_n + \sum_{n\geqslant 3} (n-4)V_n. \end{aligned} \tag{9}$$

- 因为P是正多面体, 所以存在两个整数$h(\geqslant 3)$和$k(\geqslant 3)$使$F = F_h$且$V = V_k$.

- 因此, 由式(9), 有

$$-8 = (h-4)F_h + (k-4)V_k \tag{10}$$

并且由式(6), 有

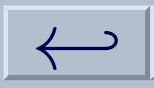
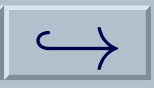
$$hF_h = 2E = kV_k. \tag{11}$$



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计





- 由定理3.4.1知, $3 \leqslant h \leqslant 5, 3 \leq k \leq 5$.

情形 1 当 $h = 3$ 时,

- 由式(10)和式(11)得

$$12 = (6-k)V_k. \tag{12}$$

- 由式(12)和式(10), 有:

  当 $k = 3$ 时, $V_3 = 4, F_3 = 4$, 因此 P 是四面体;

  当 $k = 4$ 时, $V_4 = 6, F_3 = 8$, 因此 P 是八面体;

  当 $k = 5$ 时, $V_5 = 12, F_3 = 20$, 因此 P 是二十面体.

情形 2 当 $h = 4$ 时,

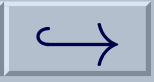
- 由式(10)有 $8 = (4-k)V_k$. 所以 $k = 3, V_3 = 8, F_4 = 6$, 即 P 是立方体.



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计





情形 3 当 $h=5$ 时,

- 由式 (10) 和式 (11) 有 $20=(10-3k)V_k$. 所以, $k=3, V_3=20, F_5=12$, 即 P 是十二面体. ∎

作业

3.4.1 证明: 不存在这样的凸多面体: 它有奇数个面, 而且每个面都有奇数条棱.

3.4.5 证明: 任何凸多面体至少有一个三角形的面或一个三面角的顶点.



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计

5 印刷电路板的设计

- 当设计和制造印刷电路板时，首先遇到的问题是判定一个给定的电路图是否能被印刷在同一层板上而使导线不发生短路？若能，怎样给出具体的布线方案？这个问题称为印刷电路板设计问题 (layout printed circuits).
- 将所要印刷的电路图看成是一个无向图 (实际上是简单的连通图) G, 其中顶点代表电子元件，而边代表导线. 于是上述问题归结为判定 G 是否是平面图？若 G 是平面图，则怎样给出它的一个平面表示来？
- 遗憾的是 Kuratowski 定理并没有提供这样的方法. 本节将介绍由 Demoucron, Malgrange & Pertuiset (1964) 提供的判断图平面性的多项式时间算法，简记为 DMP 算法，且若图是平面图，DMP算法









给出该图的一个平面表示，

- 在介绍这个算法之前，先对图 G 进行下列预处理可以大大简化运算量：

(a) 若 G 不连通，则分别判定它的每个分支；若 G 有割点，则分别判定它的块；

(b) 删去 G 中环不影响其平面性；删去平行边不影响其平面性；

(c) 用一条边替代 G 中 2 度点和与之相关联的两条边不影响其平面性.

- 最后两个简化步骤应当反复且交错地使用直到不能使用为止.

- 在做了上述简化后，在简单图 G 中利用两个基本判别法：



(f) 若 $e(G)<9$ 或者 $n(G)<5$, 则 G 必是平面图 (习题 3.2.2);

(g) 若 $e(G)>3n-6$ 或者 $\delta(G)>5$, 则由推论 3.1.4.1 和推论 3.1.4.2 知 G 必是非平面图.

- 设 G 是平面图, $H\subseteq G$, $\widetilde{H}$ 是 H 的平面表示. 若存在 G 的平面表示 $\widetilde{G}$ 使 $\widetilde{H}\subseteq\widetilde{G}$, 则称 $\widetilde{H}$ 是 G 容许的 (admissible).

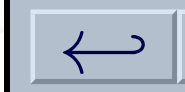
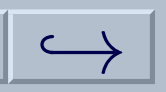
- 例如, 图 13 (a) 是平面图 G, (b), (c) 是 $G-xy$ 的两个平面表示, 其中(b)是 G 容许的, 而 (c)则不是.

- 若 B 是 G 的 H 分支 (H 分支的定义见 3.2 节), f 是 $\widetilde{H}$ 的面并且 B 和 H 在 G 中的接触点集 $V_G(B,H)\subseteq B_{\widetilde{H}}(f)$, 则称 B 在 f 内可画出 (drawable).







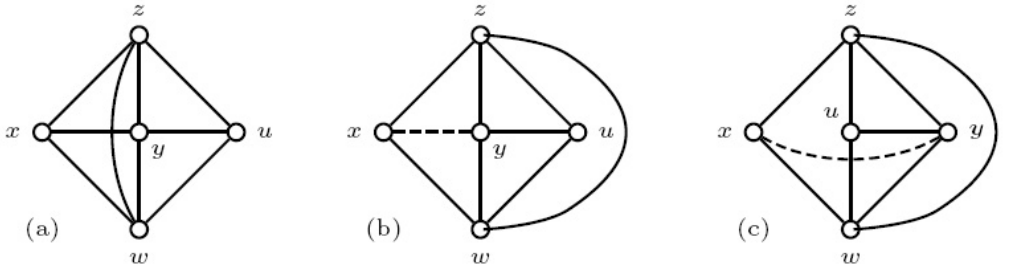


Figure 13: (a) 平面图 G (b) G 容许子图 G_1 (c) 非 G 容许子图 G_2

- 用 $F_G(B,\widetilde{H})$ 表示 $F(\widetilde{H})$ 中 B 在其内可画出的那些面 f 集, 即 $F_G(B,\widetilde{H}) = \{f \in F(\widetilde{H}) : B \text{ 在 } f \text{ 内可画出}\}$.

下述定理提供了 G 是平面图的一个必要条件.

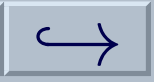
定理 3.5.1 设 $\widetilde{H}$ 是平面图 G 容许的, 则 G 的任何 H 分支 B 有 $F_G(B,\widetilde{H}) \neq \emptyset$.



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计





证明

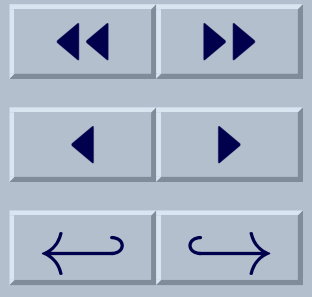
- 设 $\widetilde{H}$ 是 G 容许的. 则由定义知, 存在 G 的一个平面表示 $\widetilde{G}$ 使得 $\widetilde{H} \subseteq \widetilde{G}$.
- 由 H 分支的定义知 B 所对应的 $\widetilde{G}$ 的子图必限制在 $\widetilde{H}$ 的一个面中.
- 因此 $F_G(B, \widetilde{H}) \neq \emptyset$. ∎

平面性算法

DMP平面性算法:

1. 设 G_1 是 G 中的圈(因为我们可以假设G是连通且无割点的图), 求出 G_1 的平面表示 $\widetilde{G}_1$. 令 $i = 1$.





2. 若 $E(G)\setminus E(G_i)=\emptyset$, 则停止. 若 $E(G)\setminus E(G_i)\neq\emptyset$, 则确定 G 的所有 G_i 分支, 并对每个 G_i 分支 B, 求出集 $F_G(B,\widetilde{G}_i)$.

3. 若存在 G_i 分支 B 使 $F_G(B,\widetilde{G}_i)=\emptyset$, 则停止. 由定理3.5.1知 G 是非平面图(这是应为若G是平面图,可以证明$\widetilde{G}$一定是G容许的). 若存在 G_i 分支 B 使 $|F_G(B,\widetilde{G}_i)|=1$, 则令 $\{f\}=F_G(B,\widetilde{G}_i)$; 若不存在这样的分支 B, 则令 B 是任何一个 G_i 分支, 并且任取 $f\in F_G(B,\widetilde{G}_i)$.

4. 选取一条 xy 路 $P_i\subseteq B$ 使 $x,y\in V_G(B,G_i)$. 令 $G_{i+1}=G_i\cup P_i$, 并把 P_i 画在 $\widetilde{G}_i$ 的面 f 内得 G_{i+1} 的一个平面表示 $\widetilde{G}_{i+1}$. 用 $i+1$ 替代 i 并转入第2步.

例 3.5.1 为说明上述算法, 考察图 14 所示的图 G. 从圈 $\widetilde{G}_1=(2345672)$ 开始(为简单起见, 分支用其边集表



示). 在每步中, 对于使 $|F_G(B,\widetilde{G}_i)|=1$ 的分支 B 用粗体字标出. 算法终止于 G 的一个平面表示 $\widetilde{G}_{11}$, 所以 G 是平面图. ∎

定理 3.5.2 DMP 平面性算法是有效的.

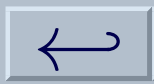
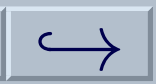
证明

- 若 G 是连通的平面图, 则 $\phi(G)=e(G)-n(G)+2$.
- 令 $m=e(G), n=n(G)$.
- DMP 算法是从 G 的一个圈 G_1 开始, 故 $\phi(G_1)=2$.
- 在算法的执行中, 每当用 $i+1$ 替代 i 时, 其面增加一个, 即 $\phi(G_{i+1})=\phi(G_i)+1=i+2$.







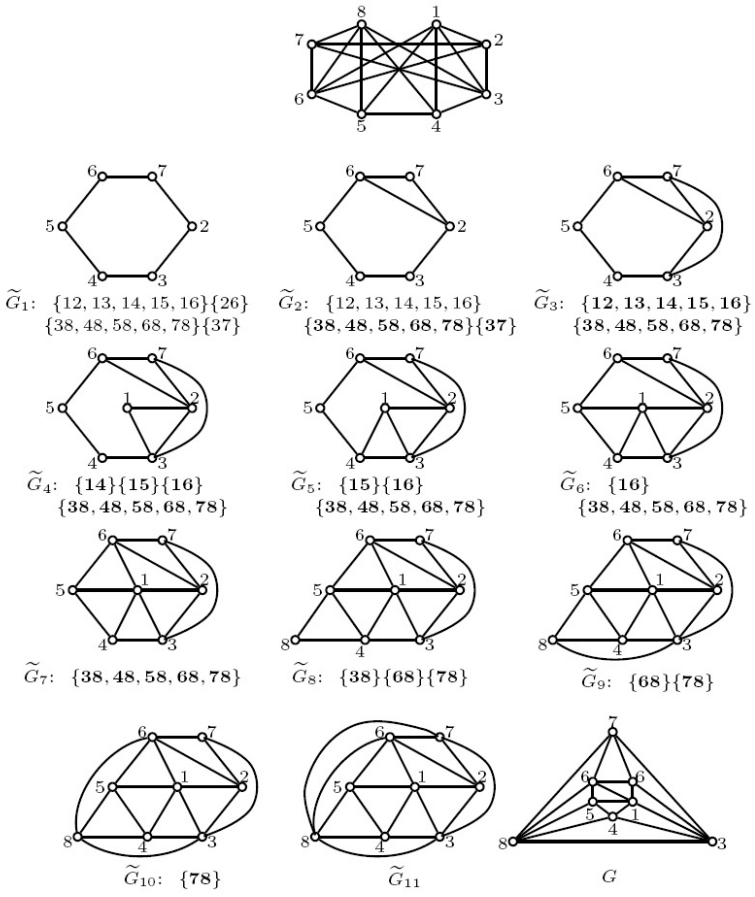


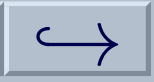
Figure 14: DMP 平面性算法的应用



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计



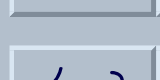
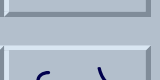


- 所以若G是平面图，则算法结束时必产生序列$\widetilde{G}_1,\cdots,\widetilde{G}_{m-n+1}$.
- 因此，只需证明：若G是平面图，则$\widetilde{G}_1,\cdots,\widetilde{G}_{m-n+1}$都是$G$容许的.
- 对$k=1,2,\ldots,m-n+1$用归纳法.
- 当$k=1$时，由于G是平面图，所以$\widetilde{G}_1$显然是G容许的.
- 假设对每个$i(1\leqslant i\leqslant k<m-n+1)$，$\widetilde{G}_i$都是$G$容许的. 根据定义，存在$G$的平面表示$\widetilde{G}$使得$\widetilde{G}_k\subseteq\widetilde{G}$. 下面证明$\widetilde{G}_{k+1}$是$G$容许的.
- 令B和f是算法第k步所选取的G_k分支和$F_G(B,\widetilde{G}_k)$中的面.
- 若$F_G(B,\widetilde{G}_k)=\{f\}$，则由算法构造出来的$\widetilde{G}_{k+1}$显然满足$\widetilde{G}_k\subseteq\widetilde{G}_{k+1}\subseteq\widetilde{G}$.







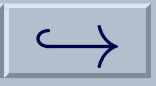
- 所以，假设对G中任何G_k分支B'都有$|F_G(B',\widetilde{G}_k)|>1$,并假定$B$在$F_G(B,\widetilde{G}_k)$的另一个$f'$内画出.
- 由于G是无割点的连通图，所以G中每个G_k分支B'都有$|V_G(B',G_k)|\geqslant 2$. 因此B'正好能画在两个面中.
- 于是，G中每个使$V_G(B',G_k)$含在f和f'的公共边界上的G_k分支B'，既可以画在f中也可以画在f'中.
- 对于这样的B'，按下述方法得到G的另一个平面表示$\widetilde{G}'$：若B'在$\widetilde{G}$的面f'中就画B'在$\widetilde{G}'$的f中；若B'在$\widetilde{G}$的f中就画B'在f'中
- (例如，见图 15，分支B和面f是算法第3步中选取的，但B画在面f'中. 于是将f'中两个分支B和B_2画在f，而将面f中的分支B_1画在f'中).



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计





- 故 $\widetilde{G}_{k+1} \subseteq \widetilde{G}'$, 即 $\widetilde{G}_{k+1}$ 是 G 容许的. ∎

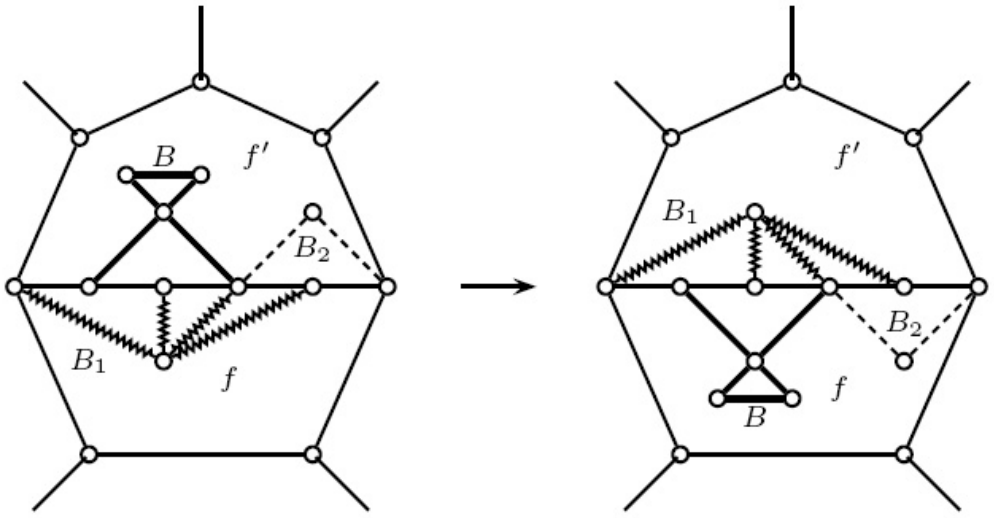


Figure 15: 证明定理 3.13 的辅助图



例 3.5.2 考察图 16 中的图 H. 从圈 $\widetilde{H}_1 = (123487651)$ 开始. 以图示的顺序进行, $\widetilde{H}_5$ 中存在 $\widetilde{H}_5$ 分支 $B = 36$ 使 $F_H(B, \widetilde{H}_5) = \emptyset$. 算法停止, 并由定理 3.12 知 H 是非平面图. ∎

作业

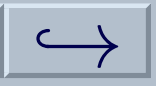
无

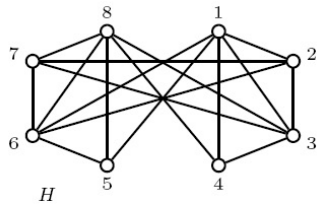


Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计

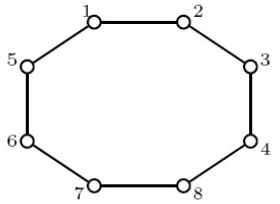




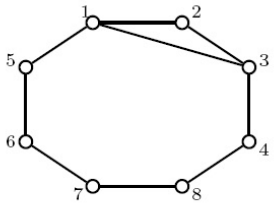





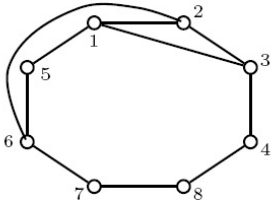
H



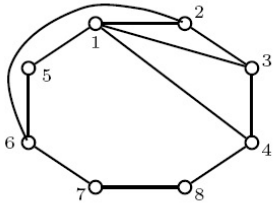
$\widetilde{H}_1$ {13}{14}{26}{27}
{36}{37}{58}{68}



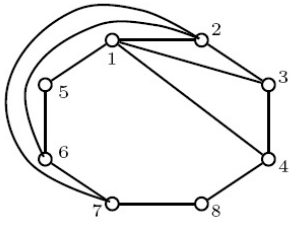
$\widetilde{H}_2$: {14}{26}{27}
{36}{37}{58}{68}



$\widetilde{H}_3$: {14}{27}{36}
{37}{58}{68}



$\widetilde{H}_4$: {27}{36}
{37}{58}{68}



$\widetilde{H}_5$: {36}{37}{58}{68}

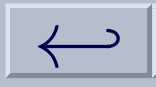
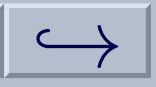
Figure 16: DMP 平面性算法的应用



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计





谢谢大家!



Title Page
平图与 Euler 公式
Kuratowski 定理
对偶图
正多面体
印刷电路板的设计



